



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

- + *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.
- + *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.
- + *Laat de eigendomsverklaring staan* Het "watermerk" van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.
- + *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via <http://books.google.com>

Mathematics

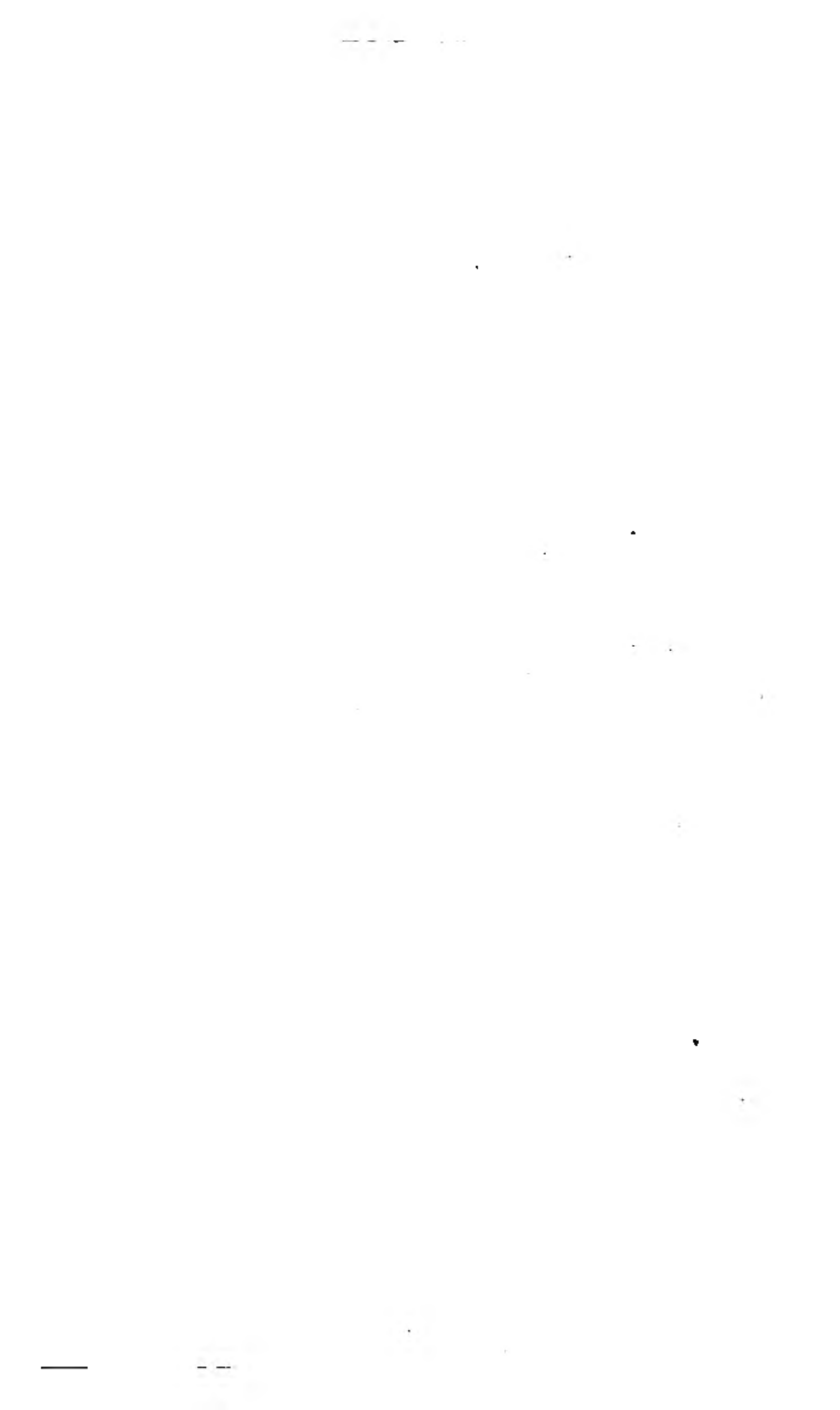
QA

1

W8

A35





VERZAMELING
VAN
VOORSTELLEN,

DOOR
DE LEDEN
VAN HET
GENOOTSCHAP,



TEN SPREUKE VOERENDE:
EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES
TE BOVEN,
ELKANDER TOT ONDERLINGE
OEFENING OPGEGEVEN.

TWEEDE DEEL.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)

Te AMSTERDAM, bij
PIETER GERARDUS GEIJSBEEK,

1815.

Gedrukt ter Boekdrukkerij van P. E. Baer te Amsterdam;

VERZAMELING

VAN

VOORSTELLEN.



1. **M**en. begeert het getal 276 in twee deelen te verdeelen, zoodanig dat het verschil der deelen gelijk zij aan één zesde deel van het verdeelde getal. Door

JACOB DE. GELDER.

2. Wanneer de som van het vierde gedeelte van het grootste en het derde gedeelte van het kleinste der deelen, waar in men het getal 208 verdeeld heeft, vier minder is dan het viervoudige verschil dezer deelen, vraagt men welke die deelen zijn? Door

JACOB DE. GELDER.

3. Bepaal, door eene stelkundige oplossing, in welk jaartal men zich bevindt, wanneer, 307 jaren vroeger, sedert het begin onzer tijdrekening, tweemaal zoo veel jaren, en 445 jaren later, dan dit jaartal, sedert datzelfde begin, driemaal zoo veel jaren verlopen zijn, als de jaren dat Romen voor de geboorte *Christus* gesticht is? Door

JACOB DE. GELDER.

4. Het getal 2196 in vier deelen te verdeelen, zoodanig dat wanneer men deze deelen in rang-
A or-

orde met de getallen 2, 3, 4 en 5 vermenigvuldigt, de komende producten met 3 opklimmen? NB. Men mag maar eene onbekende in de oplossing gebruiken. Door

JACOB DE GELDER.

5 Een getal te vinden, het welk bij de getallen 7, 9, 18 en 23, elk afzonderlijk opgeteld zijnde, de komende sommen eene evenredigheid maken? Door

JACOB DE GELDER.

6. In hoe veel dagen zal een schip onzen aardbol omzeilen op 50° breedte, de koers regt oost of west aanhoudende, 40 duitfche mijlen daags: doch wanneer de top van het schip 160 Rhijnl. voeten boven de oppervlakte der zee verheven is, vraagt men mede, hoe veel wegs de top meer zal afleggen, dan dat gedeelte van het schip, het welk zich aan de gemelde oppervlakte bevindt? Door

W. VAN HAARST.

7. Een zeker stuurman met zijn schip C in zee zijnde doet de volgende waarnemingen en landverkenningen, als: het strand dat hij ziet loopt regt Z. en N., op hetzelfde ziet hij kaap A ten N. N. O. van zich, en peilt meer landwaarts in de toren B N. O. ten O. van zich, wetende dat dezelve Z. O. 600 Rh. roeden van kaap A gelegen is; vervolgens N. ten W. anzeilende, bevindt hij zich in $\frac{1}{2}$ uur zoo ver, dat de toren B, de kaap A en zijn schip eene regte lijn maken; vrage naar de snelheid van dit schip in één wacht of 4 uren, als mede de kortste afstanden, die hij zich bevond van de kust bij de eer-

WISKUNDIGE VOORSTELLEN.

3

eerste en laatste waarneming? rekenende een mijl op $23707\frac{1}{2}$ Rhijnl. voeten. Door

W. VAN HAARST.

8. Als iemand vier soorten van tarwe heeft, als van 200, 210, 220 en 230 gl. het last, en hier van 20 lasten onder een wil mengen, zoodanig, dat hem het last op 215 gl. komt te staan. Hoe veel heele lasten kan hij van iedere soort nemen als ook hoe veel, wanneer hij van iedere soort evenveel wilde nemen? Door

P. JONGLAS.

9. Een Edelman had twee voorname heerlijkheden, in welke te zamen 14 steden waren, en onder ieder stad behoorden zoo veel dorpen als er steden in ieder heerlijkheid waren, en in ieder dorp telde hij zoo veel boesewoningen als er dorpen in ieder heerlijkheid waren: deze boeren wilde hij eene nieuwe belasting opleggen, niet zoo zeer op de menschen als wel op de beesten, om dat hij berekenen kon, dat ieder boer zoo veel koeijen had, als er steden in iedere heerlijkheid waren. — Hierom schreef hij uit dat men hem eene guld. voor ieder beest alle jaren zoude opbrengen, het geen hem jaarlijks een inkomst van 40544 opbragt. Vrage hoe veel steden, dorpen, boeren en koeijen, er in ieder heerlijkheid geschat zijn geweest? Door

P. JONGLAS.

10. Iemand kocht 30 ellen laken van $2\frac{1}{2}$ el breed om hetzelfde in zijne familie te gebruiken; na de krimpung werd bevonden, dat hetzelfde $1\frac{1}{2}$ vierendeel op ieder 5 el lengte, en $1\frac{1}{2}$ achtste deel op ieder $1\frac{1}{2}$ el breedte had verloren. Het

A 2

voer

4 WISKUNDIGE VOORSTELLEN.

voer daar toe bekomende, was $1\frac{3}{4}$ el breed, werd gekrompen, verloor in de lengte, op ieder 18 el de geheele breedte en in breedte $\frac{1}{2}$ achtste deel. Vrage hoe veel ongekrompen voer hij kochte, veronderstellende, dat laken en voering, na de krimping elkander juist bedekten? Door

M. J. ZUIDHOF.

11. Twee gebroeders A en B verkochten eens eenige lasten granen aan een koopman, dewelke door nadeelige negotie, niet ter regter tijd betalen konde, zoo accordeerde hij met zijn twee crediteuren, om het kapitaal à $4\frac{1}{2}$ ten 100 'sjaars, op eene behoorlijke tijd, en liefst over een jaar af te doen. De crediteuren iets wankelende, zoo verkochten zij de schuldbrief hier van aan C, voor $f\ 4040\frac{2}{3}$; en toen ze hunne berekening maakten, bevonden zij, dat ze vijf van het honderd in het jaar verloren hadden. Het jaar geëindigd zijnde, kwam de koopman, om zijne schuld aan kapitaal en intrest te voldoen: dan vond tot zijne verwondering de gepasfeerde schuldbrief in handen van C, die hem toonde, dat hij reeds 8 maanden daar van bezitter was geweest. Nu is de koopman begcrig te weten, wat hij betalen moet, en C nieuwsgierig om den inkoop te weten. Door

M. J. ZUIDHOF.

12. Twee zeelieden zeilden eens op bekende N. Br. naar gisfing N. O. t. O. 27 mijlen en rekenden 1 graad in breedte veranderd te zijn. Dan, hoogte nemende, bevonden zij 20 min. meer in breedte veranderd te wezen. Dewijl nu A de koers, en B de verheid vaststelde, zoo is de vraag, waar zij hunne bestekken plaatsten, en

en wie het naast bij de waarheid kwam; naar het plat te werken? Door

M. J. ZUIDHOF.

13. Als uit een willekeurig punt binnen of buiten eenen driehoek perpendicularen op de zijden worden nedergelaten, begeert men eene equatie te vinden tusſchen de ſegmenten, waarin de zijden door deze perpendicularen zijn gedeeld. Door

J. R. SCHMIDT.

14. Wanneer drie cirkels elkander ſnijden, zal het volgende plaats hebben:

1°. Wanneer de ſnijpunten, waarin de cirkels, 2 en 2 genomen, elkander ſnijden door koorden vereenigd worden, zullen deze 3 koorden elkander in eenzelfde punt ſnijden.

2°. Zoo men op deze koorden cirkels beſchrijft, zullen de lijnen, welke de ſnijpunten van deze nieuwe cirkels, 2 en 2 genomen, vereenigen, door hetzelfde punt gaan, waarin zich de 3 eerſte koorden ſnijden.

3°. Als de ſnijpunten der nieuwe met de eerſte cirkels op gelijke wijze worden vereenigd, zullen de 3 lijnen, welke hier uit ontſtaan, al mede door dit zelfde punt gaan.

4°. De regthoeken uit de deelen, waarin ieder dezer lijnen door het gemeene deelpunt geſneden is, zijn alle even groot.

Men vraagt naar het bewijs. Door

J. R. SCHMIDT.

6 WISKUNDIGE VOORSTELLEN.

15. Wanneer uit een willekeurig punt in een der diagonalen van eenen vierhoek, of in deszelfs verlengde, twee lijnen getrokken worden, waarvan ieder twee der zijden, welke met die diagonaal eenen driehoek maken, of het verlengde van die zijden snijden, en men de snijpunten der zijden, welke met de andere diagonaal driehoeken maken, door lijnen vereenigt, zullen deze lijnen elkander in eenig punt van die andere diagonaal of deszelfs verlengde ontmoeten. Men vraagt naar het bewijs. Door

J. R. SCHMIDT.

16. Wanneer drie lijnen IK, IL, en IM in een punt I te zamen komen, en men uit een willekeurig punt A, twee lijnen trekt, welke twee van de eerstgenoemde lijnen IK en IL snijden in G en C en H en D, dan zal, wanneer men in de derde der eerstgenoemde lijnen IM, twee punten E en F naar welgevallen neemt, en uit F lijnen naar H en D, als mede uit E lijnen naar G en C trekt, het snijpunt B van FD en CE, en het snijpunt K van FH en GE met het punt A in eene rechte lijn liggen. Vraag naar het bewijs. Door

J. R. SCHMIDT.

17. Wanneer drie lijnen IK, IL en IM in een punt I te zamen komen, en men in IK de punten F en C, en in IM de punten P en R naar welgevallen neemt, en men verder uit F, C, P en R lijnen tot de derde IL trekt, welke onderling parallel zijn, als FG, CD, PQ en RS, dan zullen, wanneer men QC, FS, PD en GR trekt, de snijpunten A van FS en QC, en B van PD en RG in eene lijn liggen, welke parallel
mel

met de getrokkenne lijnen FG , CD enz. is.
Men vraagt naar het bewijs. Door

J. R. SCHMIDT.

18. Tusschen twee lijnen AB en AC , die in stelling gegeven zijn, eene lijn DE te trekken gelijk aan een gegevene lijn PQ ; zoodanig dat de driehoek ADE daar uit ontstaande, van eenen gegeven inhoud zij? (a) Door

S. VAN DER PAUW.

19. Van eenen gegeven veelhoek $ABCDEFGH$ een deel $AHIFG$ af te snijden gelijk aan een gegeven regthoek LM door eene lijn PH , die of parallel is met eene gegevene lijn AQ of door een gegeven punt P loopt? (b) Door

S. VAN DER PAUW.

20. Een gegeven driehoek ABC in een voorgesteld getal deelen te deelen, die eene gegevene rede tot elkander hebben, door lijnen die met een der zijden BC van den driehoek parallel getrokken worden? (c) Door

S. VAN DER PAUW.

21. Uit twee gegevena punten A en B twee lijnen AC en BC te trekken, die in eene regte lijn DE , welke in stelling gegeven is, zullen samen komen, zoodanig, dat haar verschil gelijk zij aan eene gegevene regte lijn BD ? (d) Door

S. VAN DER PAUW.

22.

(a) *Gronden der Meetkunst*, Bijvoegfel, N^o. 4.

(b) *Idem*, N^o. 6.

(c) *Idem*, N^o. 7.

(d) *Idem*, N^o. 14.

8 WISKUNDIGE VOORSTELLEN:

22. A verkoopt aan B twee stukken laken, inhoudende het eene zoo menigmaal 6, als het andere 7 ellen; wanneer nu van het grootste de lengte van het kleinste wordt afgesneden, en de rest met het afgesnedene vermenigvuldigd, zoo komt er 96; de inkoop van het kleinste is de el $4\frac{1}{2}$ guld. en die van het grootste 6 guldens, en de verkoop is de el door elkander $5\frac{1}{2}$ guld. Men vraagt naar de lengte der stukken, en wat er gewonnen óf verloren is? (e) Door

D. H. WATERMAN.

23. Iemand laat een stuk lijnwaat maken, dat hem op 16 stuiv. de el komt, het welk hij met eenige winst verkoopt; te weten, de el verkoopt hij $5\frac{1}{2}$ stuiv. hooger dan hij stuivers ten 100 wint; hoe veel heeft hij dan voor ieder el ontvangen? (f) Door

D. H. WATERMAN.

24. Hoe kan men 100 in twee deelen verdeelen, zoo dat het eerste door 7 en het andere door 11 effen deelbaar zij? (g) Door

D. H. WATERMAN.

25. Hoe deelt men 100 in twee deelen, zoo dat hun product het tegenwoordige jaar-getal 1811 voortbrengt? Door

D. H. WATERMAN.

26.

(e) M. J. ZUIDHOF, *Rekenk. Mengelw.* pag. 18.

(f) Idem, pag. 22.

(g) Idem, pag. 28.

26. Men heeft eenen ongeschikten vijfhoek, waar van twee buiten zijden gemeten zijn, en het ander zoo veel noodig, binnen denzelfen als: de voorzijde AB 34, en de opstaande zijde AC 20, voorts is er inwendig gemeten, de diagonaal BC 42, de diagonaal CE 60, de loodlijn BF 30, en de loodlijn DG 48; vrage naar den inhoud? (h) Door

J. WESTENDORP.

27. Men heeft twee ongelijke driehoeken, maar met gelijke grondlijnen. Indien die op elkander geplaatst worden, zoodanig dat de grondlijnen sluiten, dan is de vraag hoe ver de toppen van elkander zijn, zoo de gemeene basis 105, de kleinste opstaande zijden 50 en 85, en de grootste opstaande zijden 100 en 65 doen? (i) Door

J. WESTENDORP.

28. Gegeven zijnde eenen scherphoekigen driehoek ACD, waar van de basis $CD = 3\sqrt{41}$, $AC = 12$ en $AD = 15$ is; in denzelfen worden twee lijnen door elkander getrokken, namelijk, uit C naar de zijde AD, de lijn $CE = 13$, en uit D naar de zijde AC de lijn $BD = 17$, waar door de zijde AC aldus verdeeld is: $AB = 8$ en $BC = 4$, en AD op deze wijze in $AE = 5$ en $DE = 10$; vrage hoe ver het deelpunt F van B, C, D en E is, zijnde F het snijpunt der lijnen BD en CE. (k) Door

J. WESTENDORP.

29.

(h) M. J. ZUIDHOF, *Meetk. Rekenb.* pag 40. N°. 5.

(i) Idem, pag. 41. N°. 6.

(k) Idem, pag. 41. N°. 7.

B

29. Men heeft twee ongelijke driehoeken, echter met gelijke grondlijnen, indien die op elkander geplaatst worden, zoo dat de grondlijnen juist sluiten, en dan de buitenste opstaande zijden verlengd worden, tot dat zij boven in een punt zamenkomen, zoo ontstaat er een nieuwe driehoek op dezelfde basis, naar welks inhoud gevraagd wordt; indien de gemeene basis AB doet 147, de laagste opstaande zijden $AC = 70$ en $BC = 119$; en de hoogste opstaande zijden $AD = 140$ en $BD = 91$. (l) Door

J. WESTENDORP.

30. Men heeft een regthoekig parallelogram veranderd tot eenen ongelijkzijdigen zeshoek, door het afnijden van twee overstaande hoeken, waar van bekend is de diagonaal $AD = 100$, die van den eenen regten hoek tot den anderen loopt; de kortste zijden zijn gebleven 45, zijnde $AB = DE$; de langste zijden zijn nog $AF = CD = 72$, en de twee nieuw gesnedene zijden zijn $BC = FE = 17$; vrage naar den inhoud dezes zeshoeks? (m) Door

J. WESTENDORP.

31. Van eenen regthoekigen driehoek doet de basis AB 16, en de cathetus AC 12; op de basis staat een gelijkzijdige driehoek ADB, wiens top met den top des eersten, door eene rechte lijn CD is samengetrokken, waar uit het *Trapezium* ACDB ontstaan is, naar welks inhoud gevraagd wordt? (n) Door

J. WESTENDORP.

32.

(l) Idem, pag. 41. N^o. 8.

(m) Idem, pag. 42. N^o. 9.

(n) Idem, pag. 43. N^o. 10.

32. Boven eene gegevene regte lijn AB een punt P te vinden, zoodanig dat, trekkende AP en BP, $AP^2 - BP^2$ tot $\triangle APB$ eene gegevene rede hebbe. Door

L. VAN HEUSDEN.

33. Een punt O buiten den omtrek van eenen cirkel, welks middelpunt is G, gegeven zijnde; begeert men in den omtrek van dien cirkel een punt P te bepalen, dat, trekkende uit dat punt O, door het punt P de regte OPF, het deel PF; dat tusfchen den cirkel besloten wordt, gelijk zij aan eene gegevene lijn M. Door

L. VAN HEUSDEN.

34. In een gegeven cirkel den mogelijk grootsten driehoek te beschrijven? (o) Door

P. VAN EEGHEN CHZ.

35. Om een gegeven cirkel den mogelijk kleinsten driehoek te beschrijven? (p) Door

P. VAN EEGHEN CHZ.

36. Een stervende vader beveelt bij testament dat zijne twee zonen en drie dochters in zijn eerste huwelijk verwekt, van zijne nalatenschap, die volgens zijne eigene opgemaakte balans in f 42200 bestond, f 28000 zouden hebben, met be-

(o) STRABBE, *Fluxierekening*, pag. 185. No. 54.

(p) Idem No. 55.

12 WISKUNDIGE VOORSTELLEN.

bevel dezelve aldus te verdeelen: zoo dikwijls als een zoon f 1000 ontvangt zal ieder dochter f 1200 hebben; van de overblijvende som zoude zijne bevruchte vrouw, in geval zij eenen zoon zoude baren, $\frac{5}{8}$ en de zoon het overige hebben; doch zoo zij eene dochter mogt ter wereld brengen zoude de moeder $\frac{7}{8}$ hebben en het overige voor de dochter zijn; zoo nu de gemelde vrouw na eenigen tijd tweelingen ter wereld brengt, namelijk eenen zoon en eene dochter, vraagt men hoe veel elk van de nalatenschap zal bekomen? (q) Door

P. JONGLAS.

37. Iemand vragende hoe laat het was, kreeg tot antwoord: de dag is heden van den zons op tot derzelfer ondergang 15 uren lang, en als men de uren na den zons opgang met die nog voor derzelfer ondergang zijn, vermenigvuldigt, komt er 96; vrage hoe laat het geweest is? Door

P. JONGLAS.

38. Iemand heeft 3 soorten van wijn, de stoop van de beste kost hem 24 stuiv., van de volgende 18 stuiv., en van de gemeenste 12 stuiv. Hij wil deze soorten zoo vermengen, dat hij de stoop voor 15 stuiv. geven kan. Hoe veel moet hij van iedere soort nemen. (r) Door

J. VROOM.

39.

(q) E. FLORYN, 2de Deel, bladz. 194. No. 105,
(r) P. VAN CAMPEN, *Algebra*, pag. 195. N°. 23.

39. Anno 1803 wordt de heldere ster in Bootes, of Arcturus, als dezelve op het laagste is, $30^{\circ}43'$ verder benoorden het toppunt geschoten dan de zuidelijkste ster in het vierkant van den grooten Beer, als die op het laagst in het noorden boven den horizon staat. Vrage op wat breedte dit zoude wezen. (s) Door

W. VAN HAARST.

40. Twee schaapherders over het getal der schapen sprekende, welke zij ter markt brengen, zegt A tegen B, zoo gij mij een van uwe schapen gaaft, zouden wij er ieder evenveel hebben; B antwoordde, zoo ik een van uwe schapen bij de mijne had, en ze dan het stuk voor zoo veel guldens verkocht als gij schapen zoudt overhouden, zoude ik 90 gulden bekomen; vrage hoeveel schapen ieder heeft ter markt gebragt? Door

J. VROOM.

41. Iemand van de eene stad naar de andere gaande, pasfeert 3 tollén, doch daar hij, bij den eersten komende, niet genoeg in den zak had om te betalen, leent hij in de herberg zoo veel als hij bij zich had en betaalt het tolgeld, zijnde een dubbeltje; bij eenen tweeden tol komende, leent hij wederom zoo veel als hij toen in den zak had en betaalt het tolgeld, zijnde een dubbeltje; zulks geschiedt ook de derde reis, doch als dan bevindt hij niets meer over te hebben; men

(s) K. DE VRIES, *Navig.* 2 D. bl. 65. No. 5.

14 WISKUNDIGE VOORSTELLEN.

men begeert te weten hoe veel hij in den begin in den zak had, zonder algebra. Door

W. J. VAN WYK.

42. Om zonder behulp van integraal rekening den inhoud van een parabolisch segment te vinden. Door

ABRAHAM FOCK.

42. Iemand koopt twee foorten van papier, van B 6 Balen en zoo veel riemen als N°. 21. meer dan van A; betaalt voor ieder Baal van A f 27—10 en van B f 31—5, dat is in alles f 1281; vrage hoe veel de partij B alleen gekost heeft? NB. N°. 21 is 4. (†) Door

H. W. CASPARI.

44. Een Rentenier geeft aan een koopman zeker getal guldens tegen één stuiver intrest: per maand van ieder gulden; na zoo veel maanden als N°. 53. bedraagt de intrest $\frac{1}{4}$ van het kapitaal plus f 20 — : vrage hoe veel het kapitaal bedraagt? NB. N°. 53 is 6 (u) Door

H. W. CASPARI.

45. Men begeert door eene eenvoudige meetkundige constructie de middellijn van eenen nauwkeurig gewerkten bol te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

46.

(†) MEISNERS, Rozenkrans, het 22ste roosje.
(u) Idem, het 54ste roosje.

46. De middelpunten der vier cirkels, welke de zijden van eenen onregelmatigen vierhoek aanraken, en, het zij alle naar buiten het zij alle naar binnen gelegen zijn, liggen in den omtrek van eenen cirkel: men vraagt naar het bewijs? Door

JACOB DE GELDER.

47. Gegeven zijnde de sommen der eerste, tweede en derde magten van vier getallen, welke tot elkander in eene gewone evenredigheid staan, gelijk aan a , b en c , of 24, 170 en 1368; vraagt men deze getallen, en wel door de oplossing eener vierkants vergelijking te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

48. Uit de vergelijking $(x + 1)(x^2 + 1) \times (x^3 + 1) = 30x^3$ alle de waarden van x te vinden, welke aan de vergelijking voldoen? Door

JACOB DE GELDER.

49. Vindt drie getallen in eene Harmonische progressie, welker som $32\frac{1}{2}$ is, en het product gelijk aan de som der vierkanten; welke zijn deze getallen? Door

JACOB DE GELDER.

50. Eene Harmonische progressie van drie termen heeft deze eigenschap, dat, wanneer men dezelve met elkander vermenigvuldigt, het product 80 is; maar zoo men de kwadraten optelt is de som 76. Welke is deze progres? Door

JACOB DE GELDER.

51. Gegeven zijnde dat een teerling voet water 48 ponden weegt, en men eenen houten kogel van 1½ duimen diameter en $9\frac{17}{8}$ pond zwaarte in het water legde, zoo is de vraag: hoe diep die zinken zoude? grondende op dezen regel der waterweegkunde: de zwaarte van een teerling voet water staat tot een teerling voet inhoud, als de zwaarte van den houten kogel tot den inhoud van het duikend deel. (v) Door

J. WESTENDORP.

52. A, B en C nemen een stuk lands aan, om te bescapten voor $f\ 100-16$, dat is 4 stuiv. de roede, maar vermits A één roede meer dan B, en B één roede meer dan C dagelijks kan omcapten, zoo maken zij accoord dat elk naar zijn werk arbeidsloon zal genieten; dus te gelijk beginnende, zouden de dagen, die zij ter volmaking van dit werk noodig hebben, gelijk zijn aan de som van twee getallen, waar van het eene het dubbeld is van het andere; en waar van de vierkanten, dat van het grootste en de som der getallen te zamen 1806 uitmaken, ten ware dat A na eenigen tijds door zeker toeval buiten staat geraakt was, en dus B en C daarna het met hun beiden moesten voltrekken; na gedaan werk ontvangen zij hun bedongen loon, en bij het doen van rekening blijkt dat A en C evenveel hebben en B de rest. Vraag hoe veel dagen en roeden ieder gearbeid heeft en wat elk volgens accoord toekomt? Door

P. HAGE.

53.

(v) M. J. ZUIDHOR, *Meerk. Rekenb.* bl. 96. Voorst. 67.

53. Den 26 Junij 1762 was zekeren stuurman met zijn schip in de Baai van Gibralter ten anker op $36^{\circ}.20'$ N. Br. Toen stak hij een pasier, lang $9\frac{1}{2}$ duim, met den eenen voet loodrecht in een horizontaal dek, $\frac{1}{2}$ duim diep in het hout; nam 'smorgens, toen de zon boven den berg kwam, op den losfen voet van den pasier dezelve waar, juist toen de staande en losse voet van den pasier eenerlei schaduw hadden, dat is: toen die twee schaduwen in elkander vielen; ten zelve tijde had hij een peilkompas gereed gemaakt, en bevond daar door, dat de zon juist in het O. Z. O. zat; insgelijks giste hij, op het schip, van den top des bergs één duitfche mijl of 1900 roeden af te zijn; en de opening des pasiers bevond hij ongeveer 60 graden te zijn. Nu vraagt hij, hoe men, met dezen toestel, de hoogte des bergs, den tijd hoe laat en de miswijzing van het kompas vinden kan. Door

M. J. ZUIDHOF.

54. Van eenen onregelmatigen vierhoek ABCD gegeven zijnde de zijden AB en AD, de hoeken A en C, en de diagonaal AC; te vinden de zijden BC en DC, het zij door berekening, het zij door constructie. Door

O. S. BANGMA.

55. Van eenen onregelmatigen vierhoek ABCD gegeven zijnde, de deelen, waarin de overstaande hoeken A en C door den diagonaal AC gedeeld worden; te vinden de deelen, waarin de beide andere hoeken B en D door den diagonaal BD gedeeld worden. Door

O. S. BANGMA.

56. Van eenen onregelmatigen vierhoek gegeven zijnde, de zijden en den inhoud, de diagonalen te vinden. Door

O. S. BANGMA.

57. Op eene regte lijn AD is eenen halven cirkel $ABCD$ beschreven; de middellijn AD is door de punten V en F in de drie gelijke deelen AV , VF en FD verdeeld; op de twee eerste deelen $AV + VF$ als middellijn den halven cirkel AGF gemaakt, en op FD (het andere derde deel) den halven cirkel FED naar beneden; dan is voorts van D tot C in den omtrek van den grooten halven cirkel de radius DC en van C tot B de radius CB gepast, waar door eene *mixtiligne* geformeerd is, bestaande uit een zesde van den grooten cirkel, te weten den boog AB , de twee regte lijnen BC en CD , den halven cirkel FED naar beneden en den halven cirkel FGA naar boven; nu begeert men eene figuur te vinden, die regtlijnig en met de gegevene gelijk van inhoud is, door eenvoudige beginselen der Meetkunde, zonder eenige berekening. Door

JACOB DE GELDER.

58. In de ligchamelijke ruimte zijn eenige punten A, B, C, D, E enz. gegeven, nu begeert men de plaats van alle de punten P te vinden, zoodanig, dat, wanneer men van die punten tot elk der gegevene punten A, B, C, D, E enz. de lijnen AP, BP, CP, DP, EP enz. trekt, de som van $p \times AP^2, q \times BP^2, r \times CP^2, s \times DP^2, t \times EP^2$ enz. (verbeeldende p, q, r, s, t enz., zoo wel meetbare als onmeetbare betrekkingen tot de éénheid) altijd gelijk zij aan een gegeven vlak R ? Men begeert de oplossing van dit voorstel niet stekkundig, zoo als zij bij SCHOOTENII

Excer-

Excercit. Math. pag. 255 vers. Belg. voorkomt, aan te vatten; maar uit de beschouwing van de figuur analijtisch op te maken: ook begeert men in den loop der oplossing aan de uitnoodiging van den Heer STRABBE, in de Noot, op pag. 356 van MONTUCLAS *Historie der Wiskunde I Deel IV Boek* te voldoen? (*) Door

JACOB DE GELDER.

59. Men heeft eene masfa geel koper, welker specifieke zwaarte met het zuivere gedistilleerd water, gebragt tot den grootsten graad van dichtheid, ten nauwkeurigste vergeleken zijnde, bevonden is te zijn 8,39652; uit deze masfa wil men op de draaibank eene cilindervormige kilogramme (dat is het gewigt van eenen liter zuiver gedistilleerd water tot het maximum van dichtheid gebragt) vervaardigen, welks hoogte tot de middellijn van de basis staat als *drie* tot *twee*; hoe groot moet men dan tot dat einde de afmetingen van dien cilinder nemen? Door

JACOB DE GELDER.

60.

(*) Het vijfde voorstel van het tweede boek van APPOLLONIUS PERGÆUS, het welk naar de uitgave van R. SIMPSON, aldus luidt: „*Si a quocun- que datis punctis inflectantur rectæ ad unum punctum, fuerintque species (hoc est figuræ specie datæ) ab omnibus descriptæ, simul æqualis spatium dato; tangat punctum circumferentiam positione datam,*” is een zeer bijzonder geval van het onze: indien men hetzelfde stelskundig behandelt, zal men wel spoedig vinden, dat de plaats van de gevraagde punten het oppervlak van een bol is, maar men zal langs dien weg bezwaarlijk het schone vinden, dat in dit werkstuk ligt opgesloten.

60. Wanneer men de termen van eene opklimmende rekenkundige reeks respectivelijk met de getallen 2, 3, 4, 5 en 6 vermenigvuldigt, is de som der producten 360; zoo nu het eerste product in het derde tienmaal begrepen is, vraagt men na de termen dezer reeks? Doot

JACOB DE GELDER.

61. 1°. Sommige Schrijvers bewijzen, dat, wanneer men de vier zijden eens vlakken onregelmatigen vierhoeks midden door deelt, en deze vier deelingspunten door rechte lijnen vereenigt, 'er een parallelogram ontstaat, welks inhoud de helft van dien onregelmatigen vierhoek is; maar deze vierhoek heeft ook nog de volgende eigenschappen:

2°. Wanneer men de hoekpuntslijnen (*Diagonalen*) dezes vierhoeks midden door deelt, en de daar uit ontstaande deelingspunten met die van de zijden des gegeven vierhoeks vereenigt, zullen hier door twee parallelogrammen, eene gemeenschappelijke hoekpuntslijn hebbende, ontstaan.

3°. Zullen de hoekpuntslijnen des eersten of grootsten parallelograms elkander, in het midden van de hoekpuntslijn der zoo even opgenoemde parallelogrammen, doorsnijden, en dit snijdingspunt zal het middelpunt der middelbare afstanden van de hoekpunten des vierhoeks zijn (*centre des moyennes distances*), van welke CARNOT, in zijne *Géométrie de position* Paris 1803, spreekt.

Men vraagt naar het bewijs dezer drie eigenschappen? Doot

U. HUGUENIN.

62. In de nevenstaande Figuur is de hoek $ABC = BCD = \text{regt}$, en de lijnen AB , BC , en CD zijn gegeven; men begeert; uit A en D , twee evenwijdige lijnen, AE en DF te trekken, zoodanig dat haren afstand gegeven zij? (*)
Door

E.

.C

.D

A.

.B

.F

U. HUGUENIN.

63. De ligging van drie punten A , B en C , welke zich niet in eene rechte lijn bevinden, is gegeven; men kan, uit eenig punt D , den hoek ADB en uit een ander punt E den hoek BEC waarnemen; ook kunnen de hoeken BDE en BED waargenomen worden; doch verdere metingen laat het terrein niet toe: zoo nu de punten D en E zich in hetzelfde vlak van A , B en C bevinden, wordt gevraagd:

1°. Eene algebraïsche formule, ter berekening van eene der onbekenden, waar door de punten D en E kunnen bepaald worden?

2°. Eene Geometrische constructie, door welke de vijf punten A , B , C , D en E , behoorlijk op de kaart kunnen gebragt worden? Door

U. HUGUENIN.

64.

(*) Dit Voorstel laat zich zeer gemakkelijk meetkundig construeren: door de Algebra, komt men op eene vierkants vergelijking, die men door eene kunstgreep ontwijken kan, niet tegenstaande men door dezelve de beide wortels kennen leert.

64. Een in figuur gegeven onregelmatig vierhoekig veld ABCD, door eene regte lijn EF, welke in stelling gegeven is, in twee ongelijke, doch bekende deelen verdeeld zijnde; (namelijk in het bouwland EFCD en het weiland ABFE) volgens eene regte lijn KM dusdanig te verdeelen, dat het stuk weiland AKLE het m^{te} gedeelte van het geheele weiland, het stuk bouwland FLMC het n^{de} gedeelte van het geheele bouwland, en eindelijk dat het stuk AKMD het p^{te} gedeelte van het geheele veld zij? Door

A. .K. .B

E. .L. .F

D. .M. .C

U. HUGUENIN.

65. Van eenen regthoekigen driehoek de hypotenuse en het verschil der regthoekszijden gegeven zijnde, den driehoek te beschrijven? Door

MOZES LEMANS.

66. Iemand naar zijnen ouderdom gevraagd zijnde, zegt: zoo gij uit twee getallen, wier verschil is $\equiv 676$, en het product van het verschil derzelve cubi met de som der getallen zelven $\equiv 6301\ 8294\ 8096$, de vijfhoekswortelen trekt, en die wortelen zamen addeert, dan hebt gij het begeerde. Nu wordt naar den ouderdom gevraagd? Door

MOZES LEMANS.

67. Iemand koopt een huis voor eenige zesthalven, hetzelfde betalende met goudene ducaten, met

met halve ducatonen, met goud-guldens, of met guldens, moet hij er telkens een zesthalf bij doen; vrage hoe veel dit huis kost naar de minste waarde? Door

JAN PAUW.

68. A en B mangelen, A heeft goed, dat hem gereed kost 10 stuiv., stelt het in mangeling op 12 stuiv., begeert $\frac{1}{2}$ in geld; nog heeft hij goed, dat hem gereed kost 18 stuiv., stelt het in mangeling op 20 stuiv., begeert $\frac{1}{2}$ in geld: B stelt zijn goed op 39 stuiv. na vooraf $\frac{1}{2}$ in geld genomen te hebben, vrage naar de waarde van B zijn goed? Door

JAN PAUW.

69. Een winkelier koopt van A, B, C en D eenige waren: namelijk van A zoo veel fl als hem het fl van B guldens kost, van B zoo veel fl als hem het fl van C guldens kost, van C zoo veel fl als hem het fl van D guldens kost; indien hij nu van D tweemaal zoo veel fl koopt als van A, en ieder fl van A zoo veel guldens kost als C meer ponden dan B verkoopt; vrage hoe veel hij van ieder kan gekocht hebben en tot wat prijs? zoo hij 800 guldens besteedt en in het geheel 60 fl gekocht heeft: als mede hoe veel antwoorden in heele getallen hier op komen kunnen? Door

JAN PAUW.

70. In een stad staan twee torens juist 500 voeten van elkander; tusfchen beide deze torens is met den grond gelijk eene groote vierkante steen gemetseld, welks middelpunt op 280 voeten af-

afstands van den hoogsten toren is. Op deze strek is te lezen, dat het middelpunt 75 voeten van den top des hoogsten torens verder afstaat dan van den top des anderen; ook dat het verschil der hoogten dezer torens 45 voeten bedraagt. Men vraagt naar de hoogte van iederen toren? Door

P. WOLFF.

71. In een gezelschap, bestaande uit 15 personen, zoo mannen als vrouwen, verteert iedere perzoon zoo veel guldens als er van zijn geslacht personen zijn; zoo de mannen meer verteerden dan de vrouwen, en 9 maal de gezamenlijke verteeuring gelijk is aan de som der cuben van het getal der mannen en der vrouwen, vraagt men hoe veel mannen en vrouwen er waren?

NB. Men verlangt de oplossing, zonder de leerwijze der vierkants vergelijkingen of van hoogere magten. Door

P. WOLFF.

72. In een zeker fabriek werken 16 personen van beiderlei geslacht, echter zijn er meer mannen dan vrouwen; ieder perzoon verdient in de week zoo veel guldens als er van zijn geslacht personen arbeiden. De eigenaar dezer fabriek kwam te overlijden, en had bij testament den werklieden een legaat gemaakt, bestaande in zoo veel guldens als de som der cuben van het getal der mannen en der vrouwen bedraagt. Zoo hun dit legaat met het geen zij in drie weken verdiend hadden wordt betaald met f 1624. vraagt men hoe veel mannen en vrouwen er in de fabriek arbeidden?

NB. De oplossing wordt verlangd onder dezelfde voorwaarde als die van het voorgaande Voorstel. Door

P. WOLFF.

73. Men begeert in een tuin 24 boomen te planten, zoodanig dat men 28 regels hebbe van 4 boomen ieder; de vraag is hoe de boomen geplaatst moeten worden? Door

O. S. BANGMA.

74. Wanneer van eene globe eenige schijven van gelijke dikte, door onderling parallele vlakken, zijn afgesneden, vraagt men de betrekking tusfchen de inhouden van deze schijven te bepalen? Door

J. R. SCHMIDT.

75. Wanneer van eenen bol op dezelfde wijze eenige schijven van gelijken inhoud zijn afgesneden, en de dikte der eerste schijf, benevens de middellijn van den bol gegeven zijn, vraagt men de dikten van de andere schijven te bepalen? Door

J. R. SCHMIDT.

76. Zoo van eene globe eenige schijven van gelijken inhoud zijn afgesneden, en de dikten der eerste en tweede schijf gegeven zijn, vraagt men de middellijn der globe te berekenen? Door

J. R. SCHMIDT.

77. Een bol is in n schijven van gelijke dikte gesneden, zoo nu gegeven is de inhoud van de p^{de} schijf $= a$, begeert men hier uit den inhoud van de q^{de} schijf, als mede den inhoud van den geheelen bol te bepalen? Door

J. R. SCHMIDT.

78. Iemands jaren van ouderdom zijn te gelijk een driehoekig en een vierkant getal, wiens laatste wortel twee minder dan de wortel van het eerste is; welk een ouderdom heeft hij dan bereikt? Door

JACOB DE GELDER.

79. Wanneer *Alexander de Groote* vijf jaren vroeger gestorven ware, zou hij gedurende een vierde van zijnen leeftijd geregeerd hebben; doch indien hij negen jaren langer geleefd had, zou hij gedurende de helft van zijnen leeftijd aan de regering geweest zijn: in welk jaar zijns ouderdoms en zijner regering is hij dan gestorven? Door

JACOB DE GELDER.

80. Er zijn thans (A°. 1812) sedert den dood van ISAAC NEWTON, juist zoo veel jaren verloop, als deze beroemde man oud geworden is, en toen hij geboren werd, zou onze landgenoot, CHRISTIAAN HUIGENS, (indien deze namelijk één jaar minder geleefd had,) één-vijfde van zijnen ouderdom bereikt hebben. Wanneer nu, tien en één-half jaar voor den dood van HUIGENS, NEWTON op de helft van zijne jaren was, en, twee jaren na den dood des laatsten, sedert de geboorte van HUIGENS eene geheele eeuw verloop is geweest, vraagt men: hoe oud deze wiskundigen geworden en wanneer zij geboren en overleden zijn? Door

JACOB DE GELDER.

81. Volgens de Wet moeten de vogtmaten en graanmaten eene cilindervormige gedaante hebben; in de vogtmaten moet de hoogte het dubbeld van de middellijn van de basis en in de graanmaten de hoogte gelijk aan de middellijn van de basis zijn: men begeert dan eene formule te vinden, om de afmetingen van den liter, benevens van alle maten, welke van denzelfven, zoo in het oorspronkelijke en alleen wettig stelsel, als in de nadere modificatie van hetzelfde, afhangen, in millimeters te bepalen? Door

JACOB DE GELDER.

82. Een kunstenaar moet eene liter-maat, in de gedaante van eenen afgeknotten kegel, maken, welks hoogte tot de middellijn van den bodem staat als *drie* tot *twee*, en de middellijn van den bodem tot de middellijn van het bovenvlak in dezelfde evenredigheid: men vraagt: hoe vele millimeters hij deze hoogte en middellijnen binnenwerks nemen moet, om tot zijn oogmerk te komen? (De liter is de inhoud van eenen cubieken decimeter) Door

JACOB DE GELDER.

83. De gevallen te vinden, waarin $\frac{x}{1+x^2}$ een maximum of minimum wordt? (a) Door

P. VAN EEGHEN, CHZ.

84.

(a) STRASSE, *Fluiderrechnung*, pag. 186. No. 63.

84. De gevallen te bepalen, waarin de functie $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ een maximum of minimum wordt? (b) Door

P. VAN EEGHEN CHZ.

85. Twee getallen staan tot elkander, als twee tot één; van het eerste een zeker getal afnemende, en dit zelfde getal bij het tweede voegende, zijn som en verschil niet alleen gelijk, maar ieder bijzonder is het vierkant van dit getal; vrage welke getallen bedoeld worden? Door

A. VAN DER SWAN.

86. Wanneer men van het vierkant van een zeker getal aftrekt 29, en tot hetzelfde vierkant één addeert, en dan, de som met het verschil vermenigvuldigende, 511000 tot product bekomt, is de vraag, welk getal bedoeld wordt? Door

A. VAN DER SWAN.

87. Eenige kooplieden leggen elk 125 maal zoo veel guldens in als zij kooplieden zijn, en winnen daar mede zoo veel ten honderd als zij kooplieden zijn. Wanneer men hun geheele kapitaal door hun aller winst deelt, komt er 25: hoe veel kooplieden zijn er dan geweest? (c) Door

A. VAN DER SWAN.

88.

(b) Idem, pag. 186. N°. 65.

(c) Zie O. S. BANGMA, *Inl. tot de Algebra*, pag. 46. N°. 32.

88. Vier getallen te vinden, zoodanig: dat altijd het verschil van twee derzelve, naar welgevallen genomen, een rationaal quadraat zij? (d) Door

L. VAN HEUSDEN.

89. Men begeert een getal te vinden van die eigenschap, dat, wanneer men hetzelfde eerst tot een driehoekig en daar na tot een derighoekig getal verheft, als dan het product van het laatste en twee-en-één-derde maal het eerste, opgeteld met 100534, gelijk zij aan de som van even zoo veel termen van de vierkanten der natuurlijke opklimmende zeshoekige getallen, als er éénheden in het gevraagde getal zijn? Door

M. J. ZUIDHOF.

90. De ligging van drie punten A, B en C, welke zich niet in eene rechte lijn bevinden, is gegeven; uit een onbekend punt D kan men den hoek ADB waarnemen, het punt C kan echter uit dit standpunt niet worden gezien; doch, wanneer men in de rigting van BD te rug gaat, tot in E, (in diervoege, dat BDE eene rechte lijn zij,) kan de hoek BEC waargenomen worden; en daar men bovendien de lengte DE meten kan; wordt gevraagd, in de veronderstelling dat de punten A, B, C, D en E in hetzelfde vlak gelegen zijn:

1°. Eene formule ter berekening van eene der onbekenden, waar door de ligging der punten ~~A~~, ~~B~~ en ~~C~~, kan bepaald worden?

2°.

(d) STRABBE, *Inl. tot de Math. Wetens.* pag. 252. No. 36.

80. Eene geometrische constructie, door welke de standpunten D en E, benevens hunne afstand DE, in behoorlijke verbinding met de punten A, B en C, op de kaart kunnen gebragt worden? Door

U. HUGUENIN.

91. In eenen gegeven cirkel een' driehoek ABC te beschrijven, zoodanig, dat, als men de zijden AB, BC en CA dezes driehoeks aan de eene zijde verlengt, deze verlengingen respectivelijk door de punten b , c en a gaan, welke, buiten den cirkel, in stand gegeven zijn? Door

U. HUGUENIN.

92. De Heer VEGA heeft, in zijne *Vorlesungen über die Mathematick*, tweede Editie, pag. 543. tot oefening zijner lezers (onder anderen meer) het volgende voorstel ter ontbinding opgegeven: de grootste en kleinste ordinaten gelijk mede de heer- of wendings-punten der kromme lijn te bepalen, tot welke de vergelijking

$$y = 864x - \frac{252x^2}{a} + \frac{28x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3}$$

behoort: daar hij geene oplossing van dit vraagstuk gegeven heeft, wordt dezelve gevraagd? Door

U. HUGUENIN.

93. Op de gegevene rechte lijn AB is de onbepaalde lijn AC perpendiculair, en in deze laatste is een punt D in afstand van A gegeven: uit D beweegt zich een punt gelijkmatig naar C; te gelijker tijd beweegt zich uit B met eene gelijkma-

matige beweging, welke grooter is dan die van het eerste bewegende punt, zoodanig echter, dat de beweging van dit tweede punt steeds gerigt zij naar het eerste punt, waar ook deze bewegende punten zich bevinden mogen: zoo nu $AB = a$, hoek $ABD = \alpha$ en de verhouding der snelheid van het punt B tot die van het punt D is als m tot n , wordt gevraagd de kromme lijn te bepalen, welke het uit B bewegend punt beschrijft, zoo als ook de plaats op de lijn AC aan te geven, waar zich deze beide punten te gelijk bevinden of ontmoeten zullen? Door:

U. HUGUENIN.

94. Er zijn drie arithmetische progressien, wanneer men dezelve onder elkander schrijft, en dan de overeenkomstige termen met elkander vermenigvuldigt, komt er eene nieuwe reeks van de volgende eigenschap: de som der 1ste en 9de min de 2de term is 30, de som der 2de en 4de min de 3de is 71, de som der 3de en 5de min de 4de is 150, en zoo voortgaande komt er 279, 470, enz.: men vraagt naar die arithmetische reeksen? Door

J. R. SCHMIDT.

95. Van eene reeks is gegeven de som der 1ste, 3de en 5de termen 50, de som der 2de, 4de en 6de termen 98; de som der 3de, 5de en 7de is 179, en zoo vervolgende komt 311, 510, enz.: men vraagt de algemeene term van deze reeks? Door

J. R. SCHMIDT.

96. In eenen cirkel van eene gegevene middellijn, a , den grootsten driehoek te plaatsen, zoodanig, dat één zijner drie hoeken het dubbeld van eenen der twee andere hoeken zij? Door

JACOB DE GELDER.

97. In eenen gegebenen cirkel, wiens middellijn $= a$ is, kan men eene oneindige menigte driehoeken beschrijven, welker ééne hoek het dubbeld van éénen der twee anderen is: men vraagt: of er, onder alle deze driehoeken, een driehoek bestaa, wiens omtrek een *maximum* of *minimum* zij, en zoo ja, dan begeert men de zijden van dien driehoek te bepalen? Door

JACOB DE GELDER.

98. In eenen gegebenen cirkel, eenen driehoek te beschrijven, wiens hoek A gelijk tweemaal den hoek B is, en in welken de grootste cirkel kan beschreven worden? Door

JACOB DE GELDER.

99. In eenen cirkel, wiens middellijn gelijk aan dertien decimeters is, is een punt, op den afstand van drie decimeters van het middelpunt, gegeven: nu begeert men te vinden: hoedanig, uit dit punt, twee lijnen tot aan den omtrek, onder eenen regten hoek, moeten getrokken worden, op dat het deel des cirkels, tusschen die twee lijnen begrepen, gelijk zij aan een vierde gedeelte van zijnen geheelen inhoud? Door

JACOB DE GELDER.

100. Gegeven zijnde

$$xx + yy - 5x + 9y = 968$$

$$8yy + xy - 30x + 54y = 5808$$

de waarden van x en y door eene vierkante vergelijking te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

101. Twee schepen A en B liggen Zuid en Noord van elkander; A, ten Noorden liggende, zeilt van daar O. Z. O. en B N. N. O. tot dat zij bij elkander komen in C; zoo nu B 6 mijlen meer gezeild heeft dan A, vraagt men: hoe veel mijlen ieder gezeild heeft? en hoe ver zij eerst van elkander lagen? Door

JAN PAUW.

102. Twee schepen liggen regt Oost en West van elkander; A, die ten Oosten ligt, zeilt van daar regt Zuiden en B Z. O. ten O. tot dat zij bij elkander komen in C; zoo nu B 8 mijlen meer gezeild heeft dan A, vraagt men: hoe ver zij eerst van elkander gelegen hebben? en hoe veel mijlen ieder gezeild heeft? Door

JAN PAUW.

103. Iemand was eene zekere som dukaten schuldig, waarop hij betaalde zevenmaal zoo veel dukatons als hij nog dukaten schuldig bleef, en daarenboven nog 5 dukatons; wederom, wat verzameld hebbende, betaalde hij driemaal zoo veel dukatons, als hij nu dukaten schuldig bleef; nu resten er ter betaling nog eenige dukaten schuldig, indien het heele dukaten zijn, die hij schuldig blijft,

E

blijft, is de vraag: hoe veel de minste som bedraagt, die hij in het eerst schuldig was? Door

JAN PAUW.

104. Een zilversmid heeft eene balans met ongelijke armen; in de schaal van den langsten arm eene gouden snuifdoos gewogen hebbende, bevond hij derzelve zwaarte 10 lood of 100 eng. trooisch gewigt; doch leide hij de doos in de schaal van den kortsten arm, zoo woog dezelve 65 grammes en $18\frac{1}{2}$ milli-gr.: men vraagt naar de zwaarte der doos, zoo in trooisch als in metrisch gewigt? Door

J. C. VAN SETTEN.

105. In eenen cirkel is een gelijkbeenige driehoek abc beschreven, men verlangt, om in dien zelfden cirkel nog eenen anderen gelijkbeenigen driehoek te beschrijven, welke, met den eerstgemelden, denzelfden ingeschreven cirkel gemeen heeft; zoo nu de zijden des gegebenen driehoeks $ab = bc = 13$ en de basis $ac = 10$ is, vraagt men naar de zijden des anderen. Door

J. C. VAN SETTEN.

106. Het bovenwiel A van eenen watermolen heeft 57 kammen; de schijfloop B, boven aan de spil, welke door het bovenwiel in beweging gebracht wordt, heeft 31 staven; het spoorwiel C, beneden aan den spit, 25 staven; en het wiel D, aan het waterrad, 81 kammen. Men vraagt: 1°. hoe veel maal zal het scheprad tegen de wicken omdraaijen; 2°. hoe veel maal elke wiel; 3°. na hoe veel omgangen van de wicken en in hoe veel tijds, (de wicken in een minuut vijftien maal omgaande,) zullen alle de deelen van het

100-

loopend werk wederom in den zelfden stand komen; als toen de molen begon te maken? Door

F. J. MÉAN.

107. Wanneer van eene rekenkundige reeks van vijf termen, de eerste term, met de éénheid vermeerderd zijnde, in den laatste term viermaal en de som der twee eerste termen min drie in de som der twee laatste termen min vijf driemaal verhouden is, vraagt men deze rekenkundige reeks te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

108. Wanneer men voor een zeker getal francs 40 guldens, en, voor dat zelfde onbekende getal guldens, 176 francs en 40 centimes kan inwisselen, welke eene evenredigheid bestaat er dan tusschen den franc en den gulden? Door

JACOB DE GELDER.

109. Hoe kan men *honderd* gulden met *honderd* stukken gelds, als *zesthalven* van $5\frac{1}{2}$ stuivers, *dertiendhalven* van $12\frac{1}{2}$ stuivers en *Zeeuw-sche Rijksdaalders* van 52 stuivers betalen? Door

JACOB DE GELDER.

110. Het getal 112 in twee deelen te verdeelen, zoodanig, dat het vierkant van het verschil der deelen, met één-negende van het eerste en één-zevende van het tweede deel, te zamen genomen, gelijk zij aan 210? Door

JACOB DE GELDER.

111. Wanneer men in de basis AB van eenen gelijkbeenigen driehoek ABC, een punt P naar welgevallen aanneemt, dan zal de som van de
E 2 af-

afstanden van dit punt P tot de gelijke basen, AC en BC, dezes gelijkbeenigen driehoeks, gelijk zijn aan den afstand van één der hoeken aan de basis tot het overstaande been; men vraagt naar het bewijs? Door

JACOB DE GABBA.

112. Gegeven zijnde, een ongelijkzijdige vierhoek, waarvan de basis AB doet 120, BC 66, CD 50 en DA 32; dezelve in eenen cirkel beschreven zijnde, zoo wordt uit den hoek C, naar beneden, de diameter des cirkels getrokken, en van het onderste einde des diameters, naar boven, eene teruglopende lijn, door den vierhoek, tot aan den omtrek des cirkels, welke lijn den vierhoek deelt in rede als 33 tot 46. Vraag naar de lengte dezer deellijn? (d) Door

M. J. ZUIDHOF.

113. In een^e driehoek zijn twee bekende hoeken, doende 45° en 60° , en hunne overstaande zijden verschillen $4\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$. Vraag naar de lengte der drie zijden? (f) Door

M. J. ZUIDHOF.

114. Iemand is schuldig om 1200 gl. over $7\frac{1}{2}$ maand te betalen; hij betaalt echter terstond eene aanzienlijke som; over 2 maanden 200 gl. meer, voorts over 2 maanden de helft van den vorigen post, waardoor hij de rest nog $17\frac{1}{2}$ maand boven den bepaalden tijd behouden kan; men vraagt: hoe veel ieder keer betaald is? Door

M. J. ZUIDHOF.

115.

(e) Het 98 Lid der Konst. van H. MEISZNER.

(f) H. MEISZNER, Konst. Aank. N^o. 327.

115. Teek de *tetrahedraal-wortel* uit $x^4 + 2x^3 + 168x^2 + 637x^3 + 1175x^2 + 1022x + 336$, gedeeld door 6^2 (g) (*). Door

M. J. ZUIDHOR.

116. Een Pragsch-Busgar schonk eens aan Keizer KARL de Vierde eene aanzienlijke som Goud-guldens, welke de beminnaars der Rekenkunst, op de volgende wijze, zullen kunnen ontdekken: de geheele som was het product van drie getallen, waarvan het tweede vijfmaal zoo groot als het eerste en zevens gelijk aan het vierde gedeelte van het derde was; zijnde het vierhoekig pygoidaal (†) van het eerste, het vierhoekig

(g) P. HALCKEN, *Zinn. Conferz*, N°. 171.

(*) Een *tetrahedraal*, vierzijdig of viervlakig getal, is eigenlijk niets anders dan een *driehoekig piramidaal* getal, het welk, indien x de wortel is, de som is van $1 + 3 + 6 + 10 + \text{enz.} + \frac{1}{2}x(x+1)$, en dus gelijk bekend is, gelijk aan $\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$. De *tetrahedraal-wortel* uit eene gekte uitdrukking te trekken, is eene uitdrukking te vinden, welke, indien zij, naar de voorrebrevene formule, in de *tetrahedraal* gebragt wordt, de gegevene uitdrukking weder voortbriengt. Noot van de provifionele Wetensch. Commissie.

(†) Zie wat figuurlijke getallen zijn, (DE GELBERG II *Cursus Bladz.* 330., Noot 84). *Piramidaal* getallen ontstaan uit de sommen der *Polygonaal* getallen (zie de aangeh. plaats.) — Een *Columnaar* of *Zuilgetal* is een *polygonaal* getal met zijnen wortel vermenigvuldigd. — Een *Pygoidaal* of *Terangetal* is de som van een *Piramidaal* en *Columnaar* getal, tot denzelfden wortel behorende. — Zij dus x de wortel, dan is x^2 zijn *tetragonaal* of *vierhoekig* getal; $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \text{enz.} + x^2 = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$ zijn *piramidaal-tetragonaal* of *vierhoekig piramidaal* getal; voorts, naar de gegevene bepalingen, $x^2 \times x$ of x^3 het *vierhoekig Columnaar* getal, en $x^2 + \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$ het *vierhoekig pygoidaal* getal. Noot van de provifionele Wetensch. Commissie.

hoekig columnaar van het tweede en het *vierhoekig piramidaal* van het derde dezer factores, bij elkander opgeteld, gelijk aan 2812985? (*h*) Door

1

M. J. ZUIDHOF.

117. In eenen regelmatigigen vijfhoek, een kwadraat te beschrijven, waarvan een der zijden parallel is aan een der zijden van den vijfhoek? (*) Door

J. R. SCHMIDT.

118. Wanneer uit een gegeven punt, lijnen naar eene gegevene lijn getrokken worden, en op deze lijnen gelijkvormige figuren beschreven worden, (te weten alle aan dezelfde zijde,) vraagt men de vergelijking van de lijn te bepalen, waar in de overeenkomstige punten van deze gelijkvormige figuren liggen? Door

J. R. SCHMIDT.

119. Wanneer men, in den omtrek van eenen cirkel, een punt A neemt, en, uit dit punt eenige koorden AB, AC, AD, enz. trekt, en op deze koorden gelijkvormige driehoeken ABE, ACF, ADG beschrijft, mits dat hunne toppen E, F en G, altijd aan denzelfden kant dezer koorden liggen; dan liggen de toppen dezer driehoeken altijd in eenen tweeden cirkel: men vraagt naar het bewijs? Door

JACOB DE GELDER.

120.

(*h*) P. HALCKEN, *Zinnen Confect.* N°. 172.

(*) Van dit Voorstel zijn reeds onderscheidene constructien gegeven, in onze *Wiskundige Oefeningen*, II D. *Voorst.* 175 en in het *Wisk. Mengelwerk*, II D. *Voorst.* 152; men vraagt hier echter eene eenvoudiger constructie. *Voorsteller.*

120. De basis van de Hyperbolische Logarithmen is 2,7182818284590452353602874 enz. (zie *Tab. de CALLET p. 14*), men begeert de tientallige breuk, die bij het getal 2 staat, in eene gedurige breuk herleid te hebben, om te zien, of er in de series van de op elkander volgende breuken dezer gedurige breuk ook eenige regelmaat te bespeuren zij, zoo ja, welke is dezelve? Door

O. S. BANGMA.

121. Wanneer men met het uiteinde A van den diameter eens cirkels, den omtrek rond wandelt, terwijl men dien diameter, al wandelende, door het punt B van den omtrek schuift, zal het ander uiteinde des diameters, rondom den cirkel, eene kromlijnige figuur beschrijven, waarvan de inhoud en de omtrek gevraagd wordt. Door

O. S. BANGMA.

122. 1°. Wordt gevraagd de Integraal der differentiaal uitdrukking $\frac{(3 + zz) dz}{(1 + zz) \sqrt[4]{(1 + 6z + z^4)}}$ te vinden? Door

U. HUGUENIN.

123. 2°. De differentiaal uitdrukkingen $\frac{(1 - zz)^2 dz}{(1 + zz) \sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)}}$ en $\frac{(1 + zz)^2 dz}{(1 - zz) \sqrt[4]{(1 - 6zz + z^4)}}$ te integreren. Door

U. HUGUENIN.

40 WISKUNDIGE VOORSTELLEN.

124. 3°. De Integraal der differentiaal-uitdrukking $\frac{dx}{(1+x)^4 \sqrt{2x^2-1}}$ te vinden?

Door

$$(1+x)^4 \sqrt{2x^2-1}$$

U. HUGUENIN.

125. 4°. De differentiaal-uitdrukking $\frac{dx}{(3-2x)^3 \sqrt{1+2x}}$ te integreren? Door

$$(3-2x)^3 \sqrt{1+2x}$$

U. HUGUENIN.

126. 5°. Wordt begeerd de differentiaal-uitdrukking $\frac{dx}{(3+x)^3 \sqrt{1+3x}}$ te integreren?

Door

$$(3+x)^3 \sqrt{1+3x}$$

U. HUGUENIN.

127. 6°. De Integraal van $\frac{dx}{(3-2x)^3 \sqrt{1-3x}}$ te vinden? (*) Door

$$(3-2x)^3 \sqrt{1-3x}$$

U. HUGUENIN.

128.

(*) Elke differentiaal-uitdrukking, in de vijf eerste nummers voorkomende, kan, door eene enkele substitutie, tot eenen integrabelen vorm gebragt worden, uitgezonderd de tweede uitdrukking in n°. 2, welke echter, uit de eerste uitdrukking van het zelfde numero, kan afgeleid worden. Voorsteller.

128. Wanneer, uit eenig punt A, lijnen AR getrokken worden, naar eene gegevene lijn PQ, en eene lijn DE parallel aan PQ getrokken wordt, snijdende de lijnen AR of derzelver verlengden in S, vraagt men de kromme lijn te bepalen, gevormd door de punten M, welke voortkomen, door, uit ieder punt S, eene perpendiculair SN op PQ te trekken, en in SN een punt M te nemen, zoodanig dat $NM = AR$ zij? Door

J. R. SCHMIDT.

129. Wanneer, uit eenig punt A, lijnen AM naar eene gegevene lijn PQ getrokken worden, en men op PQ, altoos naar denzelfden kant, overal MN even groot neemt, en dan uit N perpendiculair op PQ, welke AM of derzelver verlengde snijden in O, vraagt men naar de plaats van het punt O? Door

J. R. SCHMIDT.

130. Stellende dat een scheve hoek KLM, (bij voorbeeld uit hout gemaakt,) met deszelfs eene been LK, langs een liniaal RS bewogen worde, (blijvende dus het eene been LM, gedurende deze beweging, evenwijdig aan zich zelve,) en dat een draad, FPS, met deszelfs eene einde, aan het uiteinde van het been LM van dien hoek KLM, in S, zij vastgemaakt, en, met deszelfs andere uiteinde, in eenig punt F; welk eene kromme lijn zal dan het punt P beschrijven, wanneer de draad, (altijd onrekbaar ondersteld wordende,) gedurende de beweging van den hoek KLM, met deszelfs gedeelte PS tegen het been LM van dien hoek uitgestrekt blijve, en het andere deel PF met LM eenigen hoek make? Door

JACOB DE GELDER.

F

131.

42 WISKUNDIGE VOORSTELLEN.

131. Twee onbepaalde rechte lijnen AB en AC liggen op elkander; de lijn AB draait, in hetzelfde vlak, met eene gelijkmatige snelheid, om het punt A, en ten zelven tijde, dat deze lijn begint te draaijen, begint de lijn AC (die langs AB lag,) evenwijdig aan zich zelve, met eene gelijkmatige beweging, in hetzelfde vlak, waar in AB omwentelt, naar P. bewogen te worden: men vraagt, naar de vergelijking der kromme lijn, welke, door de snijding dezer bewegende lijnen ontstaat, en bovendien de hoedanigheden dezer kromme, tot welke de *Quadratrix* van DINOSTRATES behoort, en die onnoemelijke vele takken heeft, te ontwikkelen? Door

JACOB DE GELDER.

132. Wanneer men zich twee gelijkmiddelpuntige cirkels verbeeldt en den omtrek van eenen dezer twee cirkels, op eene, in eene standvastige stelling, gegevene rechte lijn, laat omdraaijen, zoodanig, dat deze twee cirkels ten opzichte van elkander in dezelfde onderlinge betrekkelijke stelling blijven, dan vraagt men: welk eene kromme lijn eenig punt van den omtrek des anderen cirkels, gedurende deze beweging, beschrijven zal, en voorts den loop en de hoedanigheden dezer kromme lijn, als hare subtangens, buigpunten, keerpunten, knopen (of *nod*), kromtestraal, inhoud, enz. te onderzoeken? Door

JACOB DE GELDER.

133. Men vraagt naar de afstanden, die de boomen, in figuur 62 (*Voorst.* 73,) op elken regel van elkander hebben, wanneer NO en PQ, door de breedte en lengte van den tuin, gegeven zijn;

zijn; niet door constructie; maar door berekening? Door

O. S. BANGMA.

134. Men vraagt naar de afstanden, die de boomen, in figuur 61, (*Voorst.* 73) op elken regel van elkander hebben, als mede de afstanden DN en AQ, of QB en PC, wanneer DO en AP, of NB en QC door de breedte en lengte van den tuin gegeven zijn? Door berekening, als voren. Door

O. S. BANGMA.

135. Men begeert in eenen bol van eene geëvene straal een kindervormig gat te boren (de as van den cilinder door het middelpunt gaande,) zoodanig, dat het overblijvend masfive deel van den bol gelijk aan zeven-achtste van denzelfden zij? Door

JACOB DE GELDER.

136. Wanneer, in eenen driehoek, een cirkel beschreven is, en voorts nog de cirkels, welke ééne der zijden uitwendig en de andere verlengde zijden inwendig aanraken; dan zullen de lijnen, welke, uit de hoekpunten dezes driehoeks, tot de aanrakingspunten van denzelfden cirkel getrokken worden, elkander in hetzelfde punt ontmoeten: men vraagt zulks te bewijzen? Door

JACOB DE GELDER.

137. Wanneer, men om eenen driehoek ABC eenen cirkel beschrijft, en eenen der bogen ADB, door ééne der zijden dezes driehoeks onderspannen

wordende, in D, in twee gelijke deelen verdeelt; dan zal, zoo wel het middelpunt des cirkels, welke in dezen driehoek beschreven is, als het middelpunt des cirkels, welke de zijde AB uitwendig en de zijden AC en BC inwendig aanraakt, gelegen zijn in den omtrek van eenen anderen cirkel, welke, uit het midden dezes boogs, (dat is uit D,) als middelpunt, met de koorde van dien halven boog AD beschreven wordt; men vraagt hier van het bewijs? Door

JACOB DE GELDER.

138. De kromme lijn, welker vergelijking $xy = [b \pm \sqrt{b^2 - y^2}] \times (a - y)$ is, door punten te construeren? Door

J. R. SCHMIDT.

139. Men begeert de kromme lijn, waarvan de vergelijking is $x = \pm (a - y) \sqrt{\frac{2b - y}{y}}$, door punten te beschrijven? Door

J. R. SCHMIDT.

140. Als de zijden van eenen driehoek, in eenen cirkel beschreven, gegeven zijn, wordt gevraagd naar de zijden van den gelijkvormigen driehoek, om dien cirkel beschreven zijnde? Door

MOSES LEMANS.

141. Men vraagt: de hoeveelfte der breuken $\frac{3}{5}, \frac{10}{11}, \frac{17}{19}$, enz. welker tellers met 7 en noemers met 2 opklimmen, een geheel getal zal zijn, en hoe vele dezer breuken die eigenschap zullen hebben? Door

JACOB DE GELDER.

142. Een gebroken te vinden, hetwelk, met deszelfs cubus verminderd zijnde, het verschil gelijk zij aan het vierkant van dit gebroken? Door

JACOB DE GELDER.

143. Zoek eene evenredigheid, welker twee eerste termen, elk met *een* vermeerderd zijnde, de sommen in reden staan, als *een* tot *twee*, zoodanig, dat de tweede term plus *een* tot den derden term min *een* staat, als *vier* tot *vijf*, en dat de som der uiterste termen zes meer zij dan de som der middelsten? Door

JACOB DE GELDER.

144. Een gebroken te vinden, hetwelk van deszelfs omgekeerde afgetrokken zijnde, er *n*.maal dit gebroken overblijve? Door

JACOB DE GELDER.

145. Gegeven zijnde $x = \sqrt{ay^3 - b}$, vraagt men *y* zoodanig te bepalen, dat *x* rationaal worde? (i) Door

A. FOCK.

146. Men begeert uit de vergelijkingen . . .
 $x^{x+y} = y^n$ en $y^{x+y} = x^m$ de waarden van *x* en *y* te vinden? (k) (*) Door

A. FOCK.

147.

(i) VENEMA, *Editie van 1783*. Voorst. tot besluit, N°. 16.

(k) Idem, N°. 7.

(*) Dit werkstuk komt voor in de *Wisk. Verlustiging* I Deel N°. 172. De oplossing is aldaar onvolledig en alleen toegepast op het geval, dat \sqrt{mn} rationaal is: men verlangt eene betere en vollediger oplossing. (*Wetensch. Commissie.*)

347. Anno 1786, in de herse; op eenen ma-
niddag; stak men; op een zekere plaats, drie stok-
ken perpendicular in de aarde; de lengte van den
stok A boven de oppervlakte der aarde was 9,
die van B 7 en die van C 4 voeten; de afstand
van B tot C 9½, en van
A tot C 10½, en bevond, dat de hui-
ter der drie stokken suc-
kepunt gingen en dat dit
toppen der drie stokken
is: hiernit den dag des
der plaats te bepalen,
meer de schaduw van el-

А. БОСК.

748. Indien twee in grootte gegevene hoeken CAD en CBD om de gegevene hoekpunten A en B beweegbaar aangenomen worden en de beenen AD en BD elkander, in eene in stelling gegevene lijn EF, gedurende deze beweging, bestendig doorsnijden, vraagt men: van welke natuur de kromme lijn zijn zal, welke door de snijding van de twee andere beenen AC en BC dezer hoeken geboren wordt? (*) Door

Author: A. Focks

149. Men begeert eenen kogel en eenen cilinder van gelijke basis, gelijken inhoud en gelijke oppervlakte; vrage naar de afmetingen van deze beide lichamen? Door

O. S. BANGMA.

150.

(1) P. HALCUM, Zimbab. Collect. N°. 573.

(*) Eene oplossing van dit voorstel komt voor bij den *Marquis de l'Hopital*, *Traité Analytique des Sections coniques*, Exemple XI, pag. 28. (Wol. Com-misic)

150. Van vijf getallen is tweemaal het eerste gelijk aan de som van al de anderen, zoo ook driemaal het tweede, viermaal het derde, en vijfmaal het vierde, elk gelijk aan de som der overige getallen; wanneer nu het product van alle die getallen gegeven is, vraagt men, hoe dazelve kunnen bepaald worden? Door

JACOB DE GELDER.

151. Eene grootheid a zoodanig in drie deelen te verdeelen, dat het eerste tot het tweede sta, als p tot q , en dat het product der deelen een *maximum* zij? Door

JACOB DE GELDER.

152. Iemand op zekere graden Z. Br. zijnde, terwijl de zon $4^{\circ} 13'$ Z. Decl. had, schoot de zon tweemalen voor den middag: vond de eerste maal, ten 11^u uren, hare ware hoogte te zijn $58^{\circ} 53'$, en de tweede maal ten 12^u $9'$ de ware hoogte $65^{\circ} 25'$, zoo begeert hij daardoor de Z. Br. te vinden? (m.) Door

M. J. ZUIDHOF.

153. De differentiaal-uitdrukking

$\frac{dx}{(a + bx^3)\sqrt{(a + 2bx^2)}}$ te integreren? Door

U. HUGUENIN.

154. De differentiaal-vergelijking $\delta y + ay\delta\phi = b \cos.\phi \delta\phi$ te integreren? Door

U. HUGUENIN.

155. De integraal der vergelijking $\delta y - x^2 \delta y + y \delta x - by^2 \delta x + by^2 x^2 \delta x = 0$ te vinden? Door

U. HUGUENIN.

156. De vergelijking $\frac{\delta y}{y^2} - \frac{\text{Sin. } \varphi^2 \delta y}{y^2} + \frac{a \delta \varphi}{y} - ab \delta \varphi + ab \text{Sin. } \varphi^2 \delta \varphi = 2b \text{Sin. } \varphi \text{Cos. } \varphi \delta \varphi - 2b \text{Cos. } \varphi \text{Sin. } \varphi^3 \delta \varphi$ te integreren? Door

U. HUGUENIN.

157. De differentiaal-vergelijking van de tweede orde, $\text{Cos. } m \varphi (\text{Sin. } m \varphi)^n \delta \delta \varphi + mn (\text{Cos. } m \varphi)^n \dots \times (\text{Sin. } m \varphi)^{n-1} \delta \varphi^2 - m (\text{Sin. } m \varphi)^{n+1} \delta \varphi^2 \dots + a \text{Cos. } m \varphi \times (\text{Sin. } m \varphi)^n \delta \varphi \delta x + \dots + b (\text{Cos. } m \varphi)^2 \times (\text{Sin. } m \varphi)^{2n} \delta \varphi^2 = 0$ te integreren, als δx standvastig is? Door

U. HUGUENIN.

158. De differentiaal-vergelijking van de tweede orde $\frac{\delta x}{1+x^3} = y \delta x + 2x \delta y + \frac{x^2 \delta \delta y}{2 \delta x}$ te integreren, als δx standvastig is? Door

U. HUGUENIN.

159. De differentiaal-vergelijking van de derde orde $\frac{\delta x}{1+x^2} = y \delta x + 3x \delta y + \frac{3x^2 \delta \delta y}{2 \delta x} + \frac{x^3 \delta^3 y}{6 \delta x^2}$ te integreren, als men δx als standvastig aanneemt? Door

U. HUGUENIN.

160. De integraal te vinden van de differentiaal-uitdrukking $\frac{\delta \varphi}{\text{Cos. } \varphi^3} \int \frac{\delta x}{\text{Cos. } \varphi^5}$? Door

U. HUGUENIN.

161. Iemand koopt twee stukken lijnwaad, waar van het een 6 ellen langer is dan het ander, elk tot zoo veel stuivers de el als elk ellen lang is; zoo men de stuivers, die beide te zamen in gelde bedragen, multipliceert met de stuivers die het een stuk meer kost dan het ander, komt er 226800; vrage hoe lang elk stuk geweest zij. (n) Door

R. LOBATTO.

162. Iemand mij gevraagd hebbende, wanneer ik geboren was? antwoordde ik hem: ik ben geboren op den $\ast \Delta$ dag van de $\Delta \ast$ maand des jaars $\Delta 401 \Delta$; bijaldien nu deze getallen in drie onderscheidene talstelsels zijn uitgedrukt, welker grondtallen, in de dagteekening van de maand één meer en in het jaartal één minder zijn dan in het getal, dat de hoeveelste maand uitdrukt; zoo ook nog bovendien, alle die getallen in ons gewoon tientallig stelsel uitgedrukt zijnde, het jaartal een vierkant getal is, welks wortel drie maal de som der maand en dagteekening met nog drie evenaart en tweemaal de maand met de som van jaartal en dagteekening te zamen 1777 bedragen, en eindelijk het cijfer, door Δ afgebeeld, één meer is dan het cijfer door \ast voorgesteld, zoo zeg mij dan wanneer ik geboren ben? Door

JAN PAUW.

163. De jaren van mijnen ouden vriend en zijne beminde, waar mede hij zich in het huwelijk staat te begeven, zijn zoodanig, dat indien men bij ieders jaren een zeker getal vergaart, en dit

(n) BANGMA, *Algebra*, p. 274. N°. 37.

dit zelfde getal van de som hunner beider jaren aftrekt, er drie vierkante getallen te voorschijn komen, zijnde de wortel van het laatste één meer dan die van het eerste, en gelijk aan het dubbeld van dien van het tweede: ook is het verschil tusfchen den eersten en tweeden wortel het dubbeld van het getal, dat men bij ieders jaren vergaard heeft. Vrage naar hun beider jaren? Door

JAN PAUW.

164. *Cajus* is zoo veel jaren ouder dan *Titus*, dat de vierkants-wortelen uit de getallen, welke de jaren hunner ouderdommen uitdrukken, de éénheid van elkander verschillen; wanneer nu de vierkants-wortel uit het getal der jaren, dat *Cajus* ouder dan *Titus* is, wederom één minder is dan de vierkants-wortel uit het getal der jaren van *Titus*, vraagt men hier uit de ouderdommen dezer twee personen te vinden? Door

JACOB DE GELDER.

165. Het getal 1040 in twee deelen te verdeelen, zoodanig dat, wanneer men het grootste deel door het kleinste en het kleinste deel door het grootste deelt, de som dezer twee quotienten gelijk 80 zij? Door

JACOB DE GELDER.

166. Verdeel het getal 144 in vier deelen, zoodanig, dat wanneer men, in rangorde van deze deelen aftrekt de getallen 2, 3, 4 en 5, de vierkantswortel uit de helft van het eerste, uit één-derde van het tweede, uit één-vierde van het derde en uit één-vijfde van het vierde verschil, in eene rekenkundige reeks en wel met één opklimmen? Door

JACOB DE GELDER.

167.

167. Vindt vier getallen in eene opklimmende rekenkundige reeks, bij welke, in rangorde de getallen 1, 5, 25 en 93 opgeteld zijnde, de sommen in eene meetkundige reeks opklimmen? Door

JACOB DE GELDER.

168. De zoon en dochter van eenen mijner vrienden zijn te zamen 21 jaren oud, en het verschil van de vierkanten hunner jaren is een drieletterig getal, welks achterste letter de jaren des zoons en de twee voorsten die der dochter aanduiden; vrage naar ieders ouderdom? Door.

A. VAN DER SWAN.

169. Iemand naar zijnen ouderdom, en dien zijner huisgenoten gevraagd zijnde, antwoordde: mijne vrouw is 2 jaren jonger dan ik, en mijn zoon is 3 jaren ouder dan mijne dochter; ook hebben deze met hun beiden juist de helft onzer jaren bereikt: zoo men nu de som hunner jaren, als mede die der onzen, ieder bijzonder in het vierkant brengt, dan zullen de twee achterste getalmerken van het verschil der vierkanten de som der jaren mijner kinderen, en de overige naar voren, de som der jaren van onzen ouderdom aanwijzen: vrage naar den ouderdom van elk bijzonder? Door

A. VAN DER SWAN.

170. Men begeert eenen voorgestelden driehoek, door lijnen uit de hoekpunten tot eenig punt binnen den driehoek getrokken, zoodanig te verdeelen, dat de deelen tot elkander staan als de vierkanten op de zijden dezes driehoeks. Door

O. S. BANGMA.

171. Op eene gegevene regte lijn als basis eenen gelijkbeenigen driehoek en eenen regthoek te beschrijven, van gelijken inhoud en van gelijken omtrek. Door

O. S. BANGMA.

172. Door vier gegevene stippen op een vlak vier lijnen te trekken, die door hunne onderlinge snijdingen een vierkant vormen. Door

O. S. BANGMA.

173. Op de zijde AB eens voorgestelden driehoeks ABC twee stippen F en G te vinden, zoo na bij elkander als mogelijk is, om uit dezelve twee regte lijnen te kunnen trekken, waar door de driehoek in vier gelijke deelen verdeeld worde, en dan op de zijden AC en BC de punten D en E te bepaaen, tot welke deze lijnen getrokken moeten worden. Door

O. S. BANGMA.

174. Er zijn vier arithmetische progresfen: zoo men dezelve onder elkander schrijft, en dan de overeenkomstige termen der eerste en tweede reeks optelt, en daar van die van de derde afrekt; vervolgens de overeenkomstige termen van de tweede en derde reeks optelt, en daar van die van de vierde reeks afrekt; op gelijke wijze van de som der derde en vierde die van de eerste, en eindelijk van de som der vierde en eerste die van de tweede afrekt; dan bekomt men vier andere reeksen, welke wederom onder elkander geschreven, en de overeenkomstige termen met elkander vermenigvuldigd zijnde, eene nieuwe reeks voortbrengen, waar van de achter elkander volgende termen, alle door 24 gedeeld, geven 9, 4, 25, 84, 210, 440 enz., men vraagt: hoe hier

hier door vier zulke arithmetische progressen gevonden kunnen worden? Door

J. R. SCHMIDT.

175. Nog drie arithmetische progressen te vinden, van de volgende eigenschap: wanneer men dezelve onder elkander schrijft, en dan de overeenkomstige termen van de eerste en tweede, van de tweede en derde, en van de derde en eerste te zamen vermenigvuldigt, komen er drie andere reeksen; deze wederom onder elkander schrijven, en de som der overeenkomstige termen van de eerste en tweede, van de tweede en derde, en van de derde en eerste dezer nieuwe reeksen nemende, komen er nog drie andere reeksen; en wanneer eindelijk deze onder elkander geschreven en de overeenkomstige termen te zamen vermenigvuldigd worden, dan verkrijgt men de reeks: 3240, — 480, 864, 0, — 3000, 0, 0, — 80256, enz. Door

J. R. SCHMIDT.

176. Van de reeks 2, 7, 11, 17, 28 enz. is de n^{de} term *plus* 20 gelijk aan de som van m termen van de reeks 3, 5, 6, 7, 9 enz.; en de som van n — 1 termen der eerste reeks is gelijk aan het product, dat men verkrijgt, door de $(n - 1)^{\text{de}}$ term van de tweede reeks *plus* 1, met 9 te vermenigvuldigen: men vraagt naar de getallen m en n ? (o) Door

J. R. SCHMIDT.

177.

(o) Men raadplege om tot de Oplossing dezer Voorstellen te komen, de Oplossingen van Voorstel 94 en 95.

177. Van twee plaatsen A en B, welke beide op de breedte van $52^{\circ}22'$ liggen, en wier verschil in lengte $212^{\circ}10'$ is, den afstand in duitse mijlen te vinden? Door

A. FOCK.

178. Aannemende dat de aarde eene bolronde gedaante hebbe, te bepalen, in welke punten de groote cirkel, welke door twee gegevene plaatsen van het oppervlak der aarde gaat, den evennagts cirkel en den zonsweg zullen doorsnijden? Door

JACOB DE GELDER.

179. Hetzelfde aannemende, vraagt men, in welke punten des Hemels, de gezigteinders van twee gegevene plaatsen der aarde elkander zullen doorsnijden? Door

JACOB DE GELDER.

180. Van eenen driehoek ABC, in eenen cirkel beschreven, is het verschil van de middellijn des cirkels en de loodlijn BD, uit den hoek B op de overstaande zijde neder gelaten, zoo groot als het verschil van de som der zijden AB en BC, en de middellijn des cirkels: zoo nu de lijnen BD, BA, en BC, in eene rekenkundige reeks zijn, waar van het verschil 2 is, wordt gevraagd naar de waarde dezer lijnen? Door

R. LOBATTO.

181. In een gegeven vierkant eenen gelijkzijdigen driehoek te beschrijven, waar van een der hoeken in een' hoek des driehoeks ligt? stekundig op te lossen. Door

R. LOBATTO.

182.

182. Twee torens AB en DC verschillen in hoogte van elkander 100 Meters: indien nu deze torens op eenen afstand van 1050 Meters van elkander staan, en een waarnemer zich zoodanig in een punt E tusfchen dezelve bevindt, dat hij de toppen dezer torens onder gelijke hoeken BEA en CED ziet (veronderstellende dat de grond, waar op deze torens staan, effen of horizontaal zij) en eindelijk zoo nu de beide gezichtslijnen BE en CE eenen hoek van $112^{\circ}37'11''95$ insluiten, wordt gevraagd naar de hoogte van iederen toren, en op welken afstand de waarnemer zich van ieder derzelve bevonden hebbe? Door

R. LOBATTO.

183. Aan een punt C, in den omtrek eens cirkels, (zie *Fig. 88.*) worden eene menigte driehoeken in dien cirkel geconstrueerd, in welke hoek A gelijk tweemaal hoek B is: men kan zich natuurlijk voorstellen, dat de middelpunten der cirkels, in deze driehoeken beschreven, eenen veranderlijken afstand zullen hebben van het middelpunt des cirkels, in welken alle die driehoeken beschreven zijn; men vraagt voor welken driehoek die afstand een *maximum* of *minimum* worden zal? (*p*) Door

JACOB DE GELDER.

184. Van alle driehoeken ABC (*Fig. 88.*) in eenen cirkel beschreven, waar van het verschil der hoeken A min B eene standvastige grootheid is, te vinden: *a*) of er een driehoek besta, wiens inhoud een *maximum* of *minimum* zij? *b*)
Of

(*p*) De jonge beoefenaar raadplege de Oplossingen van N^o. 96; 97 en 98 hier boven, en inzonderheid van 98. DE GELDER.

Of er een besta, wiens omtrek een *maximum* of *minimum* zij? *c*) Of er onder alle dezen een te vinden is, wiens ingeschreven cirkel een *maximum* zij? *d*) En eindelijk voor welken dezer driehoeken de afstand van het middelpunt des ingeschreven cirkels van het middelpunt des standvastigen cirkels, in welke zij alle beschreven zijn, het dichtst bij gelegen of het verst verwijderd zij? (*q*) Door

JACOB DE GELDER.

185. Welk een driehoek van een gegeven omtrek kan in eenen gegebenen cirkel beschreven worden, mits de cirkel, in dien driehoek beschreven, zoo groot valle als mogelijk zij? Door

JACOB DE GELDER.

186. Van eene ellips zijn gegeven twee toegevoegde middellijnen, en de hoek die een derzelven met de groote as maakt; de assen te vinden? Door

A. FOCK.

187. De groote en kleine assen van eene ellips gegeven zijnde, de twee zamengevoegde middellijnen te vinden, welke met elkander den grootsten of kleinsten hoek maken? Door

JACOB DE GELDER.

188. Wanneer men uit twee overstaande hoeken B en D van een parallelogram ABCD, door eenig punt E van den diagonaal AC lijnen trekt, als

(*q*) De jonge beoefenaars raadplegen, om dit Werkstuk op te lossen, de Oplossingen van N°. 96, 97 en 98 van dit Deel. DE GELDER.

als BEF en DEG, snijdende AD en AB in F en G, dan zal altijd driehoek DEF gelijk driehoek BEG en driehoek AEF gelijk driehoek AEG zijn: hoe bewijst men dit. Door

O. S. BANGMA.

189. Uit de hoeken A en B eens driehoeks zijn twee lijnen tot de overstaande zijden getogen, als AE en BD, elkander in F snijdende, waar door de vierhoek CDFE gevormd wordt; in dezen vierhoek zijn getrokken de diagonalen CF en DE; nu is gegeven; driehoek CDF = a , driehoek CEF = b en driehoek DCE = c ; men vraagt naar den inhoud des driehoeks ABC. Door

O. S. BANGMA.

190. De middellijn van eenen cirkel gegeven zijnde, eene rechte lijn te construeren gelijk aan den geheelen, halven of vierde omtrek, zoodanig dat deze constructie aan de evenredigheid van METIUS, als 133 tot 355 volkomen voldoe? Door

JACOB DE GELDER.

191. De vergelijkingen $xy = 125x + 300y$ en $y^2 - x^2 = a$ op te lossen. Door

JACOB DE GELDER.

192. De subtangenten, buigpunten, asymptoten enz. der kromme lijn te vinden, waar van

$$\frac{y}{a} = \frac{x^2 - (c + 2d)x + 2cd}{x^2 - ax + 6x}$$

de vergelijking is. (r) Door

JACOB DE GELDER.

193

(r) De eerstbeginnende raadplege en bestudere de
H op.

193. Den loop en verdere eigenschappen der kromme lijn, welker vergelijking is

$$y = a \sin . x \times \sin . 2 x \times \sin . 3 x$$

te onderzoeken. Door

JACOB DE GELDER.

194. Den loop en verdere eigenschappen der kromme lijn, welker vergelijking is

$$y = a (\sin . x + \sin . 2 x + \sin . 3 x)$$

te onderzoeken. Door

JACOB DE GELDER.

195. Wanneer men de hypothenuse van eenen regthoekigen driehoek met de uiteinden langs de regthoeks zijden laat glijden, zoo dat dezelve door alle mogelijke standen gaat, van den verticalen tot den horizontalen, dan kan men zich eene kromme lijn voorstellen, welke door deze hypothenuse in alle hare standen geraakt wordt; men vraagt naar de vergelijking van deze kromme, derzelve inhoud en rectificatie. Door

Ö. S. BANGMA.

196. In ieder der beenen van eenen reghlijnigen hoek zijn gegeven twee stippen, uit welke men lijnen getrokken heeft tot een zeker ander punt in het vlak van den hoek; nu is de som der vierkanten op deze vier lijnen gelijk aan viermaal het vierkant op de lijn, die dit punt met den top

oplossing van N^o 92 van dit Deel. Hij zal vinden dat voor bepaalde en eindige abscissen der kromme, zekere ordinaten oneindig groot en asymptoten der kromme lijn worden. DE GELDER.

top des hoeks vereenigt; men vraagt naar de ligging van dit punt? Door

O. S. BANGMA.

197. Op een vlak zijn gegeven drie punten A, B en C; men begeert op dit vlak de meetkundige plaats te vinden van het punt D, zoo dat men hebbe $AD^2 + BD^2 = 2 \times CD^2$. Door

O. S. BANGMA.

198. Men begeert twee kegels te maken van gelijke oppervlakte en gelijken inhoud, (de grondvlakken mede gerekend) zoo nu de radien der grondvlakken gegeven zijn, vraagt men naar de hoogte dezer kegels, derzelve inhoud en oppervlakte? Door

O. S. BANGMA.

199. Men begeert twee cilindrs van gelijken inhoud en gelijke oppervlakte, de grondvlakken mede gerekend; zoo nu de radien der grondvlakken gegeven zijn, vraagt men naar de hoogte van deze cilindrs, als mede derzelve inhoud en oppervlakte. Door

O. S. BANGMA.

200. Er is een cirkel wiens middelpunt A en middellijn BAD is, gegeven: men trekt verscheidene stralen AF en neemt op dezelve, van het middelpunt A af te rekenen, derzelve gedeelte AP gelijk aan de sinus van den dubbelden boog BF, begrepen tusfchen de stralen AB en

H 2

AF:

AF: hoedanig zal dan de loop en de hoedanigheid der kromme lijn zijn, welke door de vereeniging van de punten P geboren wordt, en welke is de inhoud en de lengte dezer kromme lijn? Door

JACOB DE GELDER.

*

ONTBINDINGEN

VAN DE

VOORGAANDE VOORSTELLEN.



N^o. 1. Door

JACOB DE GELDER, *L. van Heusden, F. J. Méan, N. Bondt, Christoffer Termars, P. Wolff, A. van der Swan, Mozes Lemans, P. van Eeghen Chz., C. J. van Brusfel, P. Guyde Coral, H. Klumper, L. C. Mazel, J. H. Heemskerk, P. Hage, Jan Pauw, A. L. Hector, en P. van Zuilen.*

Stel het grootste deel $= x$, dan is het kleinste $= 276 - x$, en het grootste min het kleinste $= 2x - 276$. Men heeft derhalve volgens de voorwaarde der vraag

$$2x - 276 = \frac{1}{6} \times 276 = 46$$

$$2x = 46 + 276 = 322$$

$$x = \frac{322}{2} = 161 \text{ het grootste}$$

en $276 - x = 115$ het kleinste.

A

N^o. 2.

2. ONTBINDINGEN VAN DE

Nº. 2. Door

JACOB DE GELDER, Jan Pauw, N. Bondt,
P. Guyde Coral, A. van der Swan, P. Wolff,
C. J. van Brusfel, P. van Eeghen Chz., Mo-
zes Lemans, H. Klumper, J. H. Heemskerk,
L. C. Mazel, P. Hage, F. J. Méan, A. L.
Hector, en P. van Zuilen.

Stel wederom het grootste deel $= x$; dan is
het kleinste $= 208 - x$, en het verschil der
deelen $= 2x - 208$, en dan is volgens de
voorwaarde der vraag

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}(208 - x) + 4 = 4(2x - 208)$$

Vermenigvuldig de leden der vergelijking met
12, het kleinste gemeene veelvoud van de noe-
mers der breuken, die in dezelve voorkomen,
dan heeft men

$$3x + 832 - 4x + 48 = 96x - 9984$$

Derhalve

$$(3 - 4 - 96)x = -9984 - 832 - 48$$

$$\text{of } -97x = -10864$$

derhalve $x = 112$ het grootste

en $208 - x = 208 - 112 = 96$ het kleinste.

Nº. 3.

4 ONTBINDINGEN VAN DE

deeler van het getal 2196, klaarblijkelijk $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x+3)$, $\frac{1}{4}(x+6)$, en $\frac{1}{5}(x+9)$; deze deelen moeten nu te zamen genomen het geheel uitmaken; men heeft daarom

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(x+3) + \frac{1}{4}(x+6) + \frac{1}{5}(x+9) = 2196$$

vermenigvuldigd met 60

$$30x + 20(x+3) + 15(x+6) + 12(x+9) = 131760$$

of na ontwikkeling der producten

$$30x + 20x + 60 + 15x + 90 + 12x + 108 = 131760$$

$$(30+20+15+12)x = 131760 - 60 - 90 - 108$$

$$\text{of } 77x = 131502$$

$$x = \frac{131502}{77} = 1707\frac{2}{11}$$

Hier uit volgt nu $\frac{1}{2}x = 853\frac{10}{11}$, $\frac{1}{3}(x+3) = 570\frac{3}{11}$, $\frac{1}{4}(x+6) = 428\frac{5}{11}$ en $\frac{1}{5}(x+9) = 343\frac{4}{11}$ de begeerde deelen.

Nº. 5. Door

JACOB DE GELDER, *L. van Heusden, Jan Pauw, P. Hage, F. J. Méan, H. Klumper, N. Bondt, P. Wolff, A. van der Swan, J. H. Heemskerk, C. J. van Brussel, L. C. Mazel, P. Guyde Coral, Mozes Lemans, P. van Eeghen Chx., A. L. Hector, en P. van Zwilen.*

Stel het gevraagde getal $= x$, dan moet

$$x+7 : x+9 = x+18 : x+23$$

$$(x+7) \times (x+23) = (x+9) \times (x+18)$$

of

of de producten ontwikkelende

$$x^2 + 30x + 161 = x^2 + 27x + 162$$

en aan beide zijden x^2 aftrekkende

$$30x + 161 = 27x + 162$$

$$30x - 27x = 162 - 161$$

$$3x = 1$$

en $x = \frac{1}{3}$ het begeerde getal.

Nº. 6. Door

P. Hage, en C. J. van Setten.

Laat (*Fig. 1.*) EQ de equator zijn, M het middelpunt der aarde, N een der polen, en BC de parallel van 50 gr. breedte, zijnde de weg, die door het schip gemaakt wordt; verleng MB tot in D, zoo dat $BD = 160$ voet zij, trek BH en DI loodregt op MN; dan is D de top van den mast als het schip in B is, BH de radius van de parallel BC en DI de radius van den cirkel, die door den top des masts beschreven wordt. Stel de omtrek van de parallel $= x$ en de omtrek van DI $= y$, dan heeft men, om dat alle cirkels gelijkvormig zijn

$$BH : DI = x : y$$

maar de gelijkvormige driehoeken MBH en MDI geven

A 3

BH

6 ONTBINDINGEN VAN DE

$$BH : DI = MB : MD$$

$$\text{dus } MB : MD = x : y$$

$$MB : MD - MB = x : y - x$$

$$MB : BD = x : y - x$$

$$\text{Dus } y - x = \frac{x \times BD}{MB} = \frac{160x}{MB}$$

Maar $\angle BMH = 40^\circ$ en $BH = MB \cdot \sin. \angle BMH$, dus

$$y - x = \frac{160x}{BH} \times \sin. 40^\circ.$$

Nu is de radius tot den omtrek ten naaste bij
bij als $113 : 2 \times 355$, dus $\frac{x}{BH} = \frac{710}{113}$ waar uit
volgt

$$y - x = \frac{160 \times 710}{113} \times \sin. 40^\circ.$$

$$= \frac{113600}{113} \times \sin. 40^\circ.$$

$= 646,2$ voet, die de top des
masts meer afleggen moet, dan het gedeelte van
het ichip, dat de oppervlakte van de zee raakt.

Voorts is uit het bovenstaande

$$BH = MB \times \sin. 40^\circ,$$

$$\text{maar } BH : x = MB : 360 \times 15$$

$$\text{dus } x = 360 \times 15 \times \sin. 40^\circ.$$

$$= 5400 \cdot \sin. 40^\circ.$$

$$\text{en } \frac{1}{40} x = 135 \cdot \sin. 40^\circ.$$

$$= 86,776 \text{ dagen voor de reis.}$$

Nº. 7.

N^o. 7. Door

W. VAN HAARST, P. van Eeghen Chz., Jan
Pauw, J. H. Heemskerk, C. J. van Brussel,
P. Wolff, en A. L. Hector.

Volgens de opgaaf is $\angle ACB = 33^{\circ}.45'$ (Fig. 2.)

$$\angle CBA = 78^{\circ}.45'$$

$$\angle CDB = 33^{\circ}.45'$$

$$\angle DCA = 33^{\circ}.45'$$

$$\text{dus } AD = AC$$

nu heeft men uit den $\triangle ABC$

$$\text{Sin. } C : AB = \text{Sin. } B : AC$$

$$\frac{33^{\circ}.45'}{9,74474} : \frac{600}{2,77815} = \frac{78^{\circ}.45'}{9,99157}$$

$$9,74474 \quad 2,77815 \quad 9,99157$$

$$9,99157$$

$$12,76972$$

$$9,74474$$

$$3,02498 = 1052 AC$$

8 ONTBINDINGEN VAN DE

Uit den $\triangle ACD$ heeft men

$$\text{Sin. } D : AC = \text{Sin. } A : DC$$

$$\begin{array}{r} 33^{\circ}.45' \\ \hline 9.74474 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1059 \\ \hline 3.02498 \end{array} \quad \begin{array}{r} 112^{\circ}.30' \\ \hline 9.96562 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9.74474 \\ 3.02498 \\ \hline 9.96562 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9.96562 \\ \hline 12.99060 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12.99060 \\ 9.74474 \\ \hline 3.24586 \end{array}$$

$$3.24586 = 1761 \text{ DC}$$

8 halve uren

gezeild, roeden 14088 in de wacht

12 voeten

169056 voeten

$$23707\frac{1}{2}$$

komt $7\frac{1}{8}$ mijl na genoeg in een wacht.

Uit den $\triangle ACF$ heeft men

$$\text{Rad} : AC = \text{Sin. } A : CF$$

$$\begin{array}{r} 1059 \\ \hline 3.02498 \end{array} \quad \begin{array}{r} 22^{\circ}.30' \\ \hline 9.58284 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.02498 \\ 9.58284 \\ \hline 2.60782 \end{array}$$

$$2.60782 = 405 \text{ R. of } \frac{1}{8} \text{ mijl nagenoeg}$$

van de kust bij de eerste waarneming.

Uit

VOORGAANDE VOORSTELLEN.

Uit den Δ ADC heeft men

$$Rad : AD = Sin. A : DE$$

1059	45°
<hr/>	<hr/>
3,02498	9,84949
<hr/>	<hr/>
9,84949	
<hr/>	

$2,87447 = 749$ R. of $\frac{3}{8}$ mijl nagenoeg
van de kust bij de tweede waarneming.

N°. 8. Door

C. J. van Brusfel, P. van Eeghen Chz., N. Bondt, P. Wolff, H. Klumper, Mozes Lemans, A. van der Swan, Jan Pauw, P. Hage, P. JONGLAS, en A. L. Hector.

Stel x lasten van de 1ste soort, y van de 2de, z van de 3de en v van de 4de, dan is

$$x + y + z + v = 20$$

$$200x + 210y + 220z + 230v = 20.215$$

$$10 \quad \underline{\hspace{10em}}$$

$$20x + 21y + 22z + 23v = 430$$

$$20x + 20y + 20z + 20v = 400$$

$$\underline{\hspace{10em}}$$

$$y + 2z + 3v = 30$$

$$y = 30 - 2z - 3v$$

$$\text{dus } x = z + 2v - 10$$

A 5

7 +

$y + 2z = 30 - 3v$ zijnde, zoo kan v niet groter zijn dan 9, neem dan

$$\left. \begin{array}{l} v=9 \text{ zoo is } y=3-2z \\ \text{en } x=9+z \end{array} \right\} z=1 \dots \text{ dus 1 antw.}$$

$$\left. \begin{array}{l} v=8 \text{ zoo is } y=6-2z \\ \text{en } x=6+z \end{array} \right\} z=1 \dots \text{ 2 dus 2 ---}$$

$$\left. \begin{array}{l} v=7 \text{ zoo is } y=9-2z \\ \text{en } x=4+z \end{array} \right\} z=1 \dots \text{ 4 dus 4 ---}$$

$$\left. \begin{array}{l} v=6 \text{ zoo is } y=12-2z \\ \text{en } x=2+z \end{array} \right\} z=1 \dots \text{ 5 dus 5 ---}$$

$$\left. \begin{array}{l} v=5 \text{ zoo is } y=15-2z \\ \text{en } x=z \end{array} \right\} z=1 \dots \text{ 7 dus 7 ---}$$

$$\left. \begin{array}{l} v=4 \text{ zoo is } y=18-2z \\ \text{en } x=z-2 \end{array} \right\} z=3 \dots \text{ 8 dus 6 ---}$$

$$\left. \begin{array}{l} v=3 \text{ zoo is } y=21-2z \\ \text{en } x=z-4 \end{array} \right\} z=5 \dots \text{ 10 dus 6 ---}$$

$$\left. \begin{array}{l} v=2 \text{ zoo is } y=24-2z \\ \text{en } x=z-6 \end{array} \right\} z=7 \dots \text{ 11 dus 5 ---}$$

$$\left. \begin{array}{l} v=1 \text{ zoo is } y=27-2z \\ \text{en } x=z-8 \end{array} \right\} z=9 \dots \text{ 13 dus 5 ---}$$

41 antw.

Nº. 9. Door

*H. Klumper, C. J. van Brusfel, P. JONGLAS,
P. Wolff, Jan Pauw, P. Guyde Coral, P.
Hage, A. van der Swan, P. van Eeghen Chz.,
N. Bondt, L. van Heusden, en A. L. Hector.*

Stel dat in de eene heerlijkheid x en in de andere y steden waren, dan is $x + y = 14$, voorts

x steden y

x y

— —

x^2 dorpen y^2

x^2 y^2

— —

x^4 boerew. . . . y^4

x y

— —

x^5 koeijen y^5

dus $x^5 + y^5 = 40544$

$x + y$ —————

$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 2896$

————— 4

$4x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2 - 4xy^3 + 4y^4 = 11584$

60 . . .

maar

12. ONTBINDINGEN VAN DE

$$\text{maar } (x + y)^4 = 14^4 =$$

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 38416$$

$$5x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4 = 50000$$

5

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 10000$$

✓

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$(x + y)^2 = 196$$

af

$$2xy = 96$$

$$\text{dus } x^2 - 2xy + y^2 = 4$$

✓

$$x - y = 2$$

$$x + y = 14$$

$$\text{dus } x = 8 \text{ en } y = 6$$

8

6

$$64 \text{ dorpen} \dots 36$$

$$64 \dots 36$$

$$4096 \text{ berew.} \dots 1296$$

8

6

$$32768 \text{ koeijen} \dots 7776$$

Nº. 10. Door

H. Klumper, M. J. Zuidhof, Jan Pauw, P. Hage, L. C. Mazel, P. Wolff, P. van Eeghen Chz., C. J. van Brusfel, en A. L. Hector.

Hij kocht 30 ell. breed $2\frac{1}{2}$ ell., maar het kromp in de lengte op 5 ell. $\frac{3}{8}$ ell. en dus op 30 ell. $2\frac{1}{4}$ ell., bleef dus na de krimp ing $27\frac{3}{4}$ ell.

De breedte verloor op $1\frac{1}{4}$ ell. $\frac{3}{16}$ dus op $2\frac{1}{2}$ ell. $\frac{3}{8}$, blijft nog $2\frac{1}{8}$ ell. breed; nu is $2\frac{1}{8} \times 27\frac{3}{4} = 58\frac{31}{32}$ vierkante ellen na de krimp ing.

Dit nu moet met voering bekleed worden, dat $1\frac{3}{4}$ ell. breed is, maar door het krimpen op de 18 ell. $1\frac{3}{4}$ ell. in lengte verliest, en dus $\frac{7}{2}$ op ieder el, blijft dus 1 el slechts $\frac{65}{72}$ el lang. De breedte verliest $\frac{1}{16}$, blijft dus nog $1\frac{11}{16}$ el. Dus is de vlakke inhoud van een el voering na de krimp ing $= \frac{65}{72} \times 1\frac{11}{16} = \frac{1775}{1152}$, dus

$$\frac{1775}{1152} : 1 \text{ el} = 58\frac{31}{32} : 38\frac{46}{87} \text{ el}$$

dus $38\frac{46}{87}$ el ongekrompen voering.

N^o. II. Door

M. J. ZUIDHOF, A. van der Swan, P. van
Eeghen Chz., en Jan Pauw.

12 maanden het jaar

4 maanden gebruik

8 maanden schade te rekenen

$12\ m : 5\ \text{verl.} = 8\ m : 3\frac{1}{2}\ \text{verl.}$

van 100 ink.

$96\frac{1}{2}\ \text{verk.}$

$96\frac{1}{2}\ \text{verk.} : 100\ \text{ink.} = 4040\frac{2}{3}\ \text{verk.}$

komt 4180 gl. de schuldbr. aan kapitaal
en een jaar intr. door den koopman te betalen.

$104\frac{1}{2} : 100 = 4180 : 4000\ \text{guld. kap. de}$
groote van de schuldbrief.

A N D E R S D O O R

C. J. van Brussel, P. Wolff, en O. S. Bangma.

Stel den inkoop $= x$, dan bedraagt de intrest,
à $4\frac{1}{2}\ \text{pCt.}$, in het jaar $\frac{9}{200}x$, dus $\frac{3}{200}x$ in vier
maanden, en $x + \frac{3}{200}x = \frac{203}{200}x$ de waarde van
de schuldbrief over vier maanden; nu maakt 5
ten 100 verlies in het jaar $\frac{1}{5}$ in 4 maanden, dus

100 :

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 13

$$100 : \frac{2}{3} = \frac{203}{288} x : \frac{203}{12888} x$$

$$\text{en } \frac{203}{288} x = \frac{203}{12888} x = 4040\frac{2}{3}$$

$$\frac{59.203}{12000} x = 4040\frac{2}{3}$$

$$29 \frac{59.7 x}{12000} = 1672000$$

$$59.7 x = 1672000$$

$$x = f 4048\frac{176}{113} \text{ inkoop}$$

$$= f 4048 - 8 - 8\frac{152}{113}$$

$\frac{2}{288} x = f 182 - 3 - 9\frac{132}{113}$ intrest van
het geheele jaar.

dus $f 4230 - 12 - 1\frac{291}{113}$ het geen de
koopman betalen moet.

N^o. 12. Door

*M. J. ZUIDHOF, Jan Pauw, P. van Eeghen Chz.,
J. H. Heemskerk, P. Wolff, N. Bondt, en
A. L. Hector.*

N. O. t. O. of de vijfde streek geeft met 27
mijl verh. 1 gr. veranderde br. ten N en $22\frac{1}{2}$
mijl afw. ten O.

Nu is ab (Fig. 3.) = 1 gr. gegiste en $ad =$
 $1^{\circ}20'$ vertr. verand. br. De Zeeman, die de
koers vertrouwt, stelt zijn bestek in A, regtlij-
nig voort, tot op de breedte van d ; maar de
zeeman B, die de verheid vertrouwt, zet een
voet des pasfers in a en maakt $aB = ac$: der-
hal-

halve komt zijn bestek in B. En volgens de gewone berekening komt het ware bestek, uit c , regt ten N, in e ; derhalve is B ten Westen en A ten Oosten van het ware; wier afstanden nu gezocht moeten worden.

Op de vijfde streek geeft $1^{\circ}20'$ verand. br. 30 mijl afw. $= dA$, en $22\frac{1}{2}$ mijl was de , alzoo was het bestek van A $7\frac{1}{2}$ mijl beoosten.

$ac = aB = 27$ mijl en $ad = 20$ mijl zijnde, zoo is $aB^2 - ad^2 = dB^2$, of $Bd = 18\frac{1}{4}$ mijl bijna; en $22\frac{1}{2}$ mijl het ware zijnde, zoo is B $4\frac{1}{4}$ mijl bewesten, dus B met zijn vertrouwde verheid het naaste bij de waarheid.

N^o. 13. Door

J. R. SCHMIDT, C. J. van Brussel, P. van Eeghen Chz., en N. Bondt.

Laat ABC (Fig. 4.) den driehoek zijn, PQ, PR en PS de perpendicularen; zoo dan AP, BP en CP getrokken worden, is (van SWINDEN 2 B. 7 P. 3 g.)

$$AQ^2 - BQ^2 = AP^2 - BP^2$$

$$BR^2 - CR^2 = BP^2 - CP^2$$

$$CS^2 - AS^2 = CP^2 - AP^2$$

$$\text{add.}$$

$$AQ^2 + BR^2 + CS^2 - BQ^2 - CR^2 - AS^2 = 0$$

$$AQ^2 + BR^2 + CS^2 = BQ^2 + CR^2 + AS^2$$

Dat is: wanneer in eenen driehoek, uit eenig punt binnen of buiten denzelfden, perpendicularen
op

op de zijden neder gelaten worden, is de som der quadraten van de segmenten, welke geen hoek met elkander gemeen hebben, gelijk de som der quadraten van de andere segmenten.

1ste Gevolg.

Wanneer R in C valt, zoo als in *Fig. 5*, is; om dat als dan $CR = 0$ is

$$AQ^2 + BC^2 + CS^2 = BQ^2 + AS^2$$

2de Gevolg.

Wanneer R in C en Q in A valt, zoo als in *Fig. 6*, is AQ en $CR = 0$, en wij hebben in dit geval

$$BC^2 + CS^2 = AB^2 + AS^2$$

3de Gevolg (Fig. 4.)

Men kan deze stelling ook omkeren en zeggen: dat wanneer de zijden zoodanig gedeeld zijn, dat $AQ^2 + BR^2 + CS^2 = BQ^2 + CR^2 + AS^2$ is, de perpendicularen, die uit Q, R, en S op de zijden worden gesteld, elkander in eenzelfde punt P moeten ontmoeten.

Want zoo de perpend. uit Q niet door het snijpunt P van de perpend. uit R en S ging, zou er een ander punt Q' in AB kunnen genomen worden, zoodanig dat de perp. uit dit door P ging, en dan zou door het bewezene

$$AQ'^2 + BR^2 + CS^2 = BQ'^2 + CR^2 + AS^2$$

maar

$$AQ^2 + BR^2 + CS^2 = BQ^2 + CR^2 + AS^2 \text{ onderst.}$$

B

duo

$$\text{dus } AQ'^2 - AQ^2 = BQ'^2 - BQ^2$$

$$AQ'^2 - BQ'^2 = AQ^2 - BQ^2$$

$$\text{door } AQ' + BQ = AQ + BQ \text{ gedeeld}$$

$$\text{komt } AQ' - BQ' = AQ - BQ$$

$$AQ' - AQ = BQ' - BQ$$

$$Q'Q = -Q'Q$$

$$Q'Q = 0$$

waar uit volgt dat geen andere dan de perp. uit Q door het snijpunt P van de perp. uit R en S kan gaan; en dit omgekeerde gaat ook door op de waarheden in het 1e en 2e gevolg vervat.

Nº. 14. Door

P. van Eeghen Chz., J. R. SCHMIDT, C. J. van Brussel, en A. L. Hector.

Kortheidshalve kan men de cirkels noemen naar derzelver middelpunten; laten dan a , b , en c de drie eerste cirkels zijn, dan moeten (*Fig. 7*), vooreerst, AB, CD en EF elkander in een punt snijden.

Vereenig de middelpunten a , b , en c door de lijnen ab , ac en bc ; dan is AB perp. op ab , en midden door gedeeld in d ; insgelijks CD perp. op bc , en midden door gedeeld in e ; en EF perp. op ac , en midden door gedeeld in f . Trek de lijnen aB , aF , bB , bC , cC en cF , dan heeft men:

$$aB^2$$

$$aB^2 - bB^2 = ad^2 - bd^2$$

$$bC^2 - cC^2 = be^2 - ce^2$$

$$cF^2 - aF^2 = cf^2 - af^2$$

maar $aB = aF$, $bB = bC$, en $cC = cF$, dus

$$ad^2 + be^2 + cf^2 = bd^2 + ce^2 + af^2$$

Dus ontmoeten de perp., die in d , e en f opgericht zijn, elkander in eenzelfde punt S (volgens het voorgaand voorstel.)

Beschrijf nu op AB , CD en EF als middellijnen cirkels, dan moeten, ten tweede, GH , IK en LM , elkander ook in dit punt S snijden; want:

De cirkels a , d en f beschouwende, zoo blijkt, volgens het geen boven bewezen is, dat AB , EF en IK , elkander in het punt S snijden; dus gaat ook GH door het punt S , als mede LM .

Trek nu de lijnen NO , PQ en RT , dan moeten, ten derde, deze lijnen ook door het punt S gaan. Want uit de beschouwing van de cirkels c , d en f , blijkt, dat PQ , IK en EF elkander in eenzelfde punt snijden; en daar het bewezen is dat de beide laatste lijnen elkander in S snijden, zoo moet ook de eerste door dat punt gaan. Gevolgelyk gaan RT en NO ook door het punt S .

Ten vierde: de regthoeken uit de deelen, waar in ieder dezer lijnen door het gemeene deelpunt gesneden wordt, zijn alle even groot.

Want AB , IK , LM en PQ zijn koorden in den zelfden cirkel d ; dus $AS \times BS = IS \times KS = LS \times MS = PS \times QS$.

Verder CD , GH , RT en LM zijn koorden
B 2
in

in den cirkel e , dus $CS \times DS = GS \times HS$
 $= RS \times TS = LS \times MS$.

Eindelijk EF , GH , IK en NO zijn koorden
in den cirkel f , dus $ES \times FS = GS \times HS =$
 $IS \times KS = NS = OS$.

En dus alle deze regthoeken aan elkander gelijk.

Nº. 15. Door

J. R. SCHMIDT.

Laat $ACBD$ (*Fig. 8.*) de vierhoek zijn, dan moeten wij bewijzen dat, IH en IF getrokken hebbende, GE en HF elkander op AB zullen ontmoeten; dat is: wij moeten bewijzen dat, trekkende GEK , de punten H , F en K , in eene regte lijn zullen zijn.

Om dat nu HI eene regte lijn is heeft men uit den ΔADC (DE GELDER *Meetk.* 14 B. I St.)

$$AH \times GC \times DI = AG \times DH \times CI$$

Zoo is ook in ΔDBC , om dat FI eene regte lijn is

$$BE \times CI \times DF = BF \times DI \times CE$$

en in ΔACB , om dat GK eene regte lijn is

$$CE \times AG \times BK = CG \times BE \times AK$$

Deze drie equationen vermenigvuldigd, en door de gelijke factoren gedeeld, geven

AH

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 32

$$AH \times DF \times BK = DH \times BF \times AK$$

en dus liggen H, F en K in eene regte lijn (DE
GELDER *Meetk.* 14 B, 2e St.)

GEVOLG.

Zoo FE \parallel DC is, en EG \parallel AB getrokken wordt, zal ook HG \parallel CD en dus FH \parallel EG zijn. Deze eigenschap vindt hare toepassing dikwijls in de perspectief of doorzigtkunde.

Nº. 16. Door

J. R. SCHMIDT.

ACBD (*Fig. 9.*) is een vierhoek waar van AB en CD de diagonalen zijn, nu ontmoeten GH en FE, volgens onderstelling, elkander in een punt I op de diagonaal CD; dus moeten volgens het 15de Voorstel GE en FH elkander op de andere diagonaal AB ontmoeten, en hun snijpunt K' bijgevolg in eene regte lijn met A en B liggen.

Aanmerking. Wanneer GC en HD parallel aan elkander zijn, volgt hier uit dat ook BK' parallel aan deze lijnen zal zijn, en het is klaar, dat deze eigenschap ook stand zal houden, wanneer IK, IL en IM parallel aan elkander zijn.

Nº. 17. Door

J. R. SCHMIDT en A. L. Hector.

Laten FR en PC (*Fig. 10.*) getrokken worden,
B 3 dan

22 ONTBINDINGEN VAN DE

dan is volgens de onderstelling en het gevolg van het voorgaand Voorstel het snijpunt K' met B in eene regte lijn, welke parallel met DC en FG is.

Maar uit het zelfde gevolg en de onderstelling is ook K' met A in eene regte lijn, welke parallel met PQ en RS is.

Daar nu PQ , RS , CD en FG onderling parallel zijn, is $K'A$ en $K'B$ parallel aan een dezer lijnen, en zij maken dus te zamen eene regte lijn uit, parallel met alle deze lijnen.

Aanmerking. Men had dit Voorstel nog algemeener kunnen maken, want zoo PQ , RS , CD en FG , onderling niet parallel waren, maar in een zelfde punt te zamen kwamen, zou ook AB door dit zelfde punt moeten gaan, wordende dit op gelijke wijze uit de voorgaande propositie bewezen.

N^o. 18. Door

L. van Heusden, S. VAN DER PAUW, C. J. van Brussel, P. van Eeghen Chz., en A. L. Hector.

Is geplaatst in het eerste deel van het Wiskundig Mengelwerk, zijnde aldaar N^o. 192.

N^o. 19.

Nº. 19. Door

L. van Heusden, S. VAN DER PAUW, en P. van Eeghen Chz.

Is geplaatst in het eerste deel van het Wiskundig Mengelwerk, zijnde aldaar Nº. 193.

Nº. 20. Door

L. van Heusden, S. VAN DER PAUW, C. J. van Brusfel, N. Bondt, P. van Eeghen Chz., F. J. Méan, en A. L. Hector.

Is geplaatst in het eerste deel van het Wiskundig Mengelwerk, zijnde aldaar Nº. 194.

Nº. 21. Door

P. van Eeghen Chz., S. VAN DER PAUW, en A. L. Hector.

Neem in AB (*Fig. 11.*) eene derde evenredige BF tot BA en BD; ~~deel AF midden doet~~ in G en trek GH perp. op AB tot dat dezelve de lijn DE in H ontmoet; maak $GI = BD$ en trek IK perp. op AB; trek uit H door A de rechte HL

B 4

en

24 ONTBINDINGEN VAN DE

en beschrijf uit K met AB als radius een cirkelboog, snijdende HL in L; trek nu KL en uit A parallel aan dezelve de lijn AC; dan BC getrokken hebbende, is het begeerde verrigt; want:

Trek CM perp. op AB, dan is

$$AC : KL = HC : HK = GM : GI$$

$$\text{Maar } KL = AB \text{ en } GI = BD \text{ Constr.}$$

$$\text{dus } AC : AB = GM : BD$$

$$\text{of } AC : GM = AB : BD$$

$$\text{Maar } AB : BD = BD : BF \text{ Constr.}$$

$$\text{dus } GM \times AB = AC \times BD$$

$$\text{en } BD^2 = AB \times BF$$

Nu is volgens de Constructie

$$AG = GF$$

$$MG = MG$$

$$\text{————— af}$$

$$\text{rest } AM = GF - MG$$

$$\text{van } FM = FM$$

$$\text{—————}$$

$$\text{blijft } FM - AM = 2MG$$

Hier bij wederzijds BF geaddeerd

$$\text{komt } BM - AM = 2MG + BF$$

$$\text{Maar } BM + AM = AB$$

$$\text{————— mult.}$$

$$BM^2 - AM^2 = 2MG \cdot AB + BF \cdot AB$$

maar

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 23

$$\text{maar } BM^2 - AM^2 = BC^2 - AC^2$$

$$\text{dus } BC^2 - AC^2 = 2 MG \cdot AB + BF \cdot AB \\ = 2 AC \cdot BD + BD^2$$

$$\text{of } BC^2 = AC^2 + 2 AC \cdot BD + BD^2$$

$$\text{dus } BC = AC + BD$$

N^o. 22. Door

*A. L. Hector, D. H. WATERMAN, F. J. Méan,
H. Klumper, C. J. van Brusfel, P. Guyde
Coral, L. C. Mazel, Mozes Lemans, P. van
Eeghen Chz., A. van der Swan, P. Wolff,
N. Bondt, P. Hage, Jan Pauw, en L. van
Heusden.*

Stel $7x$

en $6x$ voor de lengte der stukken

$$\begin{array}{r} x \\ 6x \\ \hline 6x^2 = 96 \end{array}$$

$$x^2 = 16 \text{ dus } x = 4$$

$$7x = 28 \text{ en } 6x = 24$$

$$6 - 5\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ verlies, } 5\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = 1 \text{ winst}$$

14 verlies

24 winst

14 verl.

10 winst

N^o. 23.

Nº. 23. Door

*H. Klumper, P. Hage, A. van der Swan,
D. H. WATERMAN, Mozes Lemans, P. van
Eeghen Chz., P. Guyde Corak, A. L. Hector,
Jan Pauw, en C. J. van Brusfel.*

Stel dat hij de el verkocht voor x ft.

x

16

$$16 : x - 16 = 100 : \frac{25x - 400}{4}$$

$$\frac{25x - 400}{4} + 5\frac{1}{2} = x$$

$$\frac{25x - 400 + 22}{4} = x$$

$$25x - 400 + 22 = 4x$$

$$21x = 378$$

$$21 \overline{) 378}$$

$$x = 18 \text{ fluk.}$$

$$378 : 21 = 18$$

$$18 \times 21 = 378$$

$$18 \times 21 = 378$$

$$18 \times 21 = 378$$

Nº. 24.

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 27

N^o. 24. Door

D. H. WATERMAN, A. L. Hector, L. C. Mazet, F. J. Meun, N. Bondt, H. Klumper, C. J. van Bruijsel, P. van Raghon Chz., Jan Pauw, P. Hage, P. Guyde Coral, A. van der Swan, P. Wolff, en Mozes Lemans.

Stel de deelen $7x$ en $11y$

$$\text{dan is } 7x + 11y = 100$$

$$x = 14 - y = \frac{4y - 2}{7}$$

$$\text{stel } = 14 - y = a$$

$$\text{dus } 4y - 2 = 7a$$

$$y = a + \frac{3a + 2}{4}$$

$$\text{stel } = a + b$$

$$\text{dus } 3a + 2 = 4b$$

$$a = b + \frac{b - 2}{3}$$

$$\text{stel } = b + c$$

$$\text{dus } b - 2 = 3c$$

$$b = 3c + 2$$

$$a = 4c + 2$$

$$y = 7c + 4$$

$$x = 8 - 11c$$

Neem $c = 0$, komt $x = 8$ en $y = 4$, dus 56 en 44 de begeerde deelen.

NB. „ Is opgelost, volgens Mozes Lemans, bij Euler II D. 2 Afd. §. 5.”

N^o. 25.

N^o. 25. Doot

D. H. WATERMAN, N. Bondt, L. van Heusden, F. J. Meän, A. L. Hector, P. Hage, P. Wolff, J. H. Heemskerk, C. J. van Brussel, Jan Patw, H. Klumper, L. C. Mazel, A. van der Swan, Moxes Lemans, P. van Eeghen Chz., en P. Guyde Coral.

Stel de deelen $50 + x$ en $50 - x$

$$\text{zoo is } (50 + x)(50 - x) = 2500 - x^2$$

$$\text{dus } 2500 - x^2 = 1811$$

$$x^2 = 689$$

$$x = \sqrt{689}$$

en de deelen

$$50 + \sqrt{689} \text{ en } 50 - \sqrt{689}.$$

Nº. 26. Door

J. WESTENDORP, L. van Heusden, Moxes
Lemans, C. J. van Brussel, P. J. Méan,
P. van Eeghen Chz., N. Bondt, en A. van
der Swan.

Om den inhoud van den ΔABC (Fig. 12.)
te vinden

$$AB = 34$$

$$AC = 20$$

$$BC = 42$$

$$\hline 96$$

$$2 \hline$$

$$48 = 3 \cdot 16$$

$$48 - 34 = 14 = 1 \cdot 14$$

$$48 - 20 = 28 = 2 \cdot 14$$

$$48 - 42 = 6 = 2 \cdot 3$$

$$\sqrt{\hline}$$

$$\Delta ABC = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 14 = 336$$

Om den inhoud van den ΔCBE te vinden

$$CE = 60$$

$$\frac{1}{2} BF = 15$$

$$\Delta CBE = 900$$

2 7

Om

Om den inhoud van den Δ CDF te vinden

$$CE = 60$$

$$\frac{1}{2} DG = 24$$

$$\Delta CDF = 1440$$

$$\Delta CBE = 900$$

$$\Delta ABC = 336$$

$$\text{Fig. } ABCDE = 2676$$

Nº. 27. Door

L. van Heusden, J. WESTENDORP, C. J. van Brussel, N. Bondt, F. J. Méan, Mozes Lemans, P. van Eeghen Chz., en A. van der Swan.

Trek uit de Tophoeken C en D (*Fig. 13.*) perpendicularen op AB en laat G het midden van AB zijn, dan is

$$AB : AC + BC = AC - BC : 2 FG$$

$$105 : 165 = 35 : 2 FG$$

$$FG = \frac{165 \cdot 35}{210} = 27\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} AB = \frac{52\frac{1}{2}}{25} = BF$$

Voorts

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 31

$$\text{Voorts } AB : BD + AD = BD - AD : 9 EG$$

$$105 : 135 = 35 : 2 EG$$

$$EG = \frac{135 \cdot 35}{210} = 22\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} AB = AG = 52\frac{1}{2}$$

$$30 = AE$$

$$DI = EF = EG + FG = 50$$

$$DE^2 = AD^2 - AE^2 = (AD + AE)(AD - AE)$$

$$= 80 \cdot 20 = 1600$$

$$\sqrt{\quad}$$

$$DE = 40$$

$$CF^2 = BC^2 - BF^2 = (BC + BF)(BC - BF)$$

$$= 90 \cdot 40 = 3600$$

$$\sqrt{\quad}$$

$$CF = 60$$

$$\text{dus } CI = CF - DE = 20$$

$$DC^2 = DI^2 + CI^2 = 2500 + 400 = 2900$$

$$DC = 10\sqrt{29} \text{ de begeerde afstand.}$$

N^o. 28. Door

*L. van Heusden, P. van Eeghen Chz., N.
Bondt, F. J. Meun, C. J. van Brussel, J.
WESTENDORP, en A. van der Swan.*

Trek BI (Fig. 14.) parallel CE en EG paral-
lel BD, dan is

$$AD : AE = AB : AG$$

$$\text{of } 15 : 5 = 8 : 2\frac{2}{3}$$

$$AD : AE = BD : GE$$

$$\text{of } 15 : 5 = 17 : 5\frac{1}{3}$$

$$AC = 12$$

$$AG = 2\frac{2}{3}$$

$$CG = 9\frac{1}{3} \div GE = BC : BF$$

$$\text{of } 9\frac{1}{3} : 5\frac{1}{3} = 4 : 2\frac{2}{3}$$

$$\text{dus } DF = BD = BF = 14\frac{2}{3}$$

$$\text{voorts } GC : EC = BC : CF$$

$$9\frac{1}{3} : 13 = 4 : 5\frac{1}{3}$$

$$\text{dus } EF = CE - CF = 7\frac{2}{3}$$

dat te vinden was.

N^o. 29. Door

L. van Heusden, P. van Eeghen Chz., J.
WESTENDORP, N. Bondt, en A. van
der Swan,

Trek uit de tophoeken C en D, (Fig. 15.)
op de basis AB, de perpendiculairen CK en DI,
als mede CF parallel BE, dan heeft men

$$AC = 70 \quad AD = 10$$

$$BC = 119 \quad BD = 91$$

$$AB = 147 \quad AB = 147$$

$$S = 336 \quad S = 378$$

$$\frac{1}{2} S = 168 = 8 \cdot 21 \quad \frac{1}{2} S = 189 = 9 \cdot 21$$

$$\frac{1}{2} S - AC = 98 = 49 \cdot 2 \quad 49 = 1 \cdot 49$$

$$\frac{1}{2} S - BC = 49 = 49 \cdot 1 \quad 98 = 2 \cdot 49$$

$$\frac{1}{2} S - AB = 21 = 21 \cdot 1 \quad 42 = 2 \cdot 21$$

$$\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{\quad}$$

$$\Delta ABC = 4 \cdot 49 \cdot 21 \quad \Delta ABD = 6 \cdot 49 \cdot 21$$

$$\text{verder } \Delta ABD : \Delta ABC = DI : CK$$

$$= DB : CF$$

$$\text{of } 6 : 4 = 91 : 60\frac{2}{3}$$

$$\text{maar } CK = \frac{2 \Delta ABC}{AB} = \frac{8 \cdot 49 \cdot 21}{147} = 56$$

C 2

AK 2

$$AK^2 = (AC + CK)(AC - CK)$$

$$= 126 \cdot 14 = 9 \cdot 14 \cdot 14$$

$$\text{dus } AK = 3 \cdot 14 = 42$$

op dezelfde wijze

$$KF^2 = (CF + CK)(CF - CK)$$

$$= 116\frac{2}{3} \cdot 4\frac{2}{3}$$

$$= \frac{350 \cdot 14}{9} = \frac{700 \cdot 7}{9}$$

$$\text{dus } KF = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$$

$$AF = AK + KF = 65\frac{1}{3}$$

eindelijk

$$AF : AB = AC : AE$$

$$= \Delta ABC : \Delta ABE$$

$$\text{of } 65\frac{1}{3} : 147 = 449.21 : \Delta ABE$$

$$\text{komt } \Delta ABE = 9261.$$

A N D E R S.

Door C. J. van Brusfel.

$$\text{Cos. ABE} = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 AB \cdot AD} = \frac{5}{13}$$

$$\text{Sin. ABE} = \sqrt{1 - \text{Cos. ABE}^2} = \frac{12}{13}$$

Cos.

$$\cos. BAE = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 AB \cdot AC} = \frac{3}{4}$$

$$\sin. BAE = \sqrt{1 - \cos. BAE^2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin. E &= \sin. (ABE + BAE) \\ &= \sin. ABE \cdot \cos. BAE + \cos. ABE \cdot \sin. ABE \\ &= \frac{56}{83} \end{aligned}$$

en dus heeft men (zie DE GELDER, *grondbeginselen der Meetk.* 8 Stelh. 9 Boek) den inhoud van den driehoek

$$ABE = \frac{AB^2 \times \sin. ABE \cdot \sin. BAE}{2 \sin. E} = 9261$$

Nº. 30. Door

J. WESTENDORP, P. van Eeghen Chz., C. J.
van Brusfel, en N. Bondt.

Verleng (*Fig. 16.*) alle de zijden tot dat zij in G en H te zamen komen, dan is AGDH het regthoekig paralallogram, dat door affnijding der overstaande hoeken tot eenen ongelijkzijdigen zeshoek gemaakt is.

Stel $GC = x$ en $GB = y$, zoo is $GD = 72 + x$ en $GA = 45 + y$,

$$\text{dus } x^2 + y^2 = 289$$

C 3

dus

$$\text{dus } 72 + x + 45 + y = 16000$$

$$\text{en } x^2 + y^2 = 289$$

$$\text{maar } (72 + x)^2 = 5184 + 144x + x^2$$

$$\text{en } (45 + y)^2 = 2025 + 90y + y^2$$

----- add.

$$\text{dus } 10000 = 7498 + 144x + 90y$$

$$2502 = 144x + 90y$$

$$18 \text{ -----}$$

$$139 = 8x + 5y$$

$$y = \frac{139 - 8x}{5}$$

----- ✓

$$y^2 = \frac{19321 - 2224x + 64x^2}{25}$$

$$x^2 = x^2 \text{ geaddeerd}$$

$$289 = \frac{19321 - 2224x + 89x^2}{25}$$

$$7225 = 19321 - 2224x + 89x^2$$

$$0 = 12096 - 2224x + 89x^2$$

$$89x^2 - 2224x = -12096$$

$$\text{----- } 89$$

$$89(89x^2 - 2224x) = -1076544$$

$$(89x - 1112)^2 = 1236544$$

$$(89x - 1112)^2 = 160000$$

$$\text{✓ -----}$$

89x

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 37

$$89x - 1112 = \pm 400$$

$$89x = 1112 \pm 400$$

$$= 1512 \text{ of } 712$$

$$\text{dus } x = 16\frac{88}{89} \text{ of } 8$$

$$8x = 135\frac{1}{89} \text{ of } 64$$

van 139 aftrekkende, komt

$$3\frac{8}{89} \text{ en } 75$$

door 5 deelende, komt

$$y = \frac{55}{89} \text{ of } 15$$

Door de eerste waarden van x en y verkrygt men

$$\text{regth. AGDH} = AG \cdot GD - BG \cdot GC$$

$$= (72 + x)(45 + y) - xy$$

$$= 3240 + 45x + 72y$$

$$= 3240 + 764\frac{44}{89} + 44\frac{44}{89}$$

$$= 4048\frac{88}{89}$$

Door de tweede waarden van x en y heeft men

$$\text{regth. AGDH} = 3240 + 360 + 1080$$

$$= 4680$$

Nº. 31. Door

*P. van Eeghen Chz., J. WESTENDORP,
N. Bondt, L. van Housden, C. J. van Brus-
sel, en A. van der Swan.*

Trek DE perp. op AB dan is $AE = 8$ en
 $DE = 8\sqrt{3}$,

$$\text{dus } \Delta ABD = 64\sqrt{3}$$

De perpendiculaire hoogte van ΔADC is
AE, dus

$$\Delta ACD = \frac{AC \times AE}{2} = 48$$

$$\text{dus Trap. ABDC} = 48 + 64\sqrt{3}.$$

Nº. 32. Door

*C. J. van Brussel, L. VAN HEUSDEN, en
P. van Eeghen Chz.*

Laat P (*Fig. 18.*) het begeerde punt zijn, en
D het midden van AB; stel $AD = DB = a$,
 $AD = x$ en de loodlijn $CP = y$, dan is $AC =$
 $a + x$ en $BC = a - x$, dus

AP^2

$$AP^2 = a^2 + x^2 + y^2$$

$$BP^2 = a^2 - x^2 + y^2$$

$$AP^2 - BP^2 = 4ax$$

$$\text{en } \Delta APB = ay$$

Laat nu de gegevene reden zijn als p tot q , zoo is

$$4ax : ay = p : q$$

$$\text{dus } y = \frac{4qx}{p}$$

Maak dan x of $DC = p$ en y of $CP = 4q$, en trek eene onbepaalde regte lijn door D en P , dan zullen alle punten van deze regte aan het begeerde voldoen.

Nº. 33. Door

C. J. van Brusfel, L. VAN HEUSDEN, P. van Eeghen Chz., en N. Bondt.

Laat RS (*Fig. 19.*) de gegevene cirkel zijn; trek in denzelven eene choorde $AB = M$; beschrijf uit G een cirkel Q , welke deze choorde raakt, en trek uit het punt O eene raaklijn aan den cirkel Q , deze zal den gegebenen cirkel in het begeerde punt P snijden (*zie STEENSTRA, 7 Pr. 3 B.*)

N^o. 34. Door

C. J. van Brusfel, en P. VAN EEGHEN CHZ.

Laat AB (*Fig. 20.*) een der zijden van den driehoek zijn dan zal de grootste driehoek, welke op AB als basis in den cirkel beschreven kan worden, die gene zijn die de langste perpendicular heeft; gevolgelyk de gelijkbeenige ACB; zoo nu niet AB gelijk BC was, zou men op AC als basis een' driehoek kunnen beschrijven, die grooter was dan ACB, namelijk de gelijkbeenige; dus moet $AC = BC$ en $AB = BC$ zijn; derhalve is de gelijkzijdige driehoek de grootste die er in eenen cirkel beschreven kan worden.

N^o. 35. Door

P. VAN EEGHEN CHZ., L. van Heusden, en C. J. van Brusfel.

Stel (*Fig. 21.*) $EB = BC = x$, $AE = AD = y$, $DF = CF = z$ en de radius $= a$, dan is

$$\Delta ABE = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

$$\text{en } \Delta ABE = a(x+y+z)$$

$$\text{dus } x+y+z = \text{minimum.}$$

$$\text{en } xyz = a^2(x+y+z)$$

dus

ter zinkt, dan is de middellijn van den cirkel op het water $= 2\sqrt{12x - x^2}$ duim en dus den inhoud deszelven $= \frac{11(24x - 2x^2)}{7}$. Nu is, volgens *de Gelder, Meetk. pag. 386*:

$$\begin{array}{r} \frac{11}{7} (24x - 2x^2) \frac{1}{2}x + \frac{11}{21} x^3 = \frac{7150}{21} \\ \hline 33 (12x^2 - x^3) + 11x^3 = 7150 \\ 11 \hline 3 (12x^2 - x^3) + x^3 = 650 \\ 36x^2 - 2x^3 = 650 \\ x^3 - 18x^2 + 325 = 0 \end{array}$$

Waar uit $x = 5$, dus zinkt de kogel 5 duim in het water.

Nº. 52. Door

C. J. van Brussel, P. HAGE, J. C. van Setten, P. van Eeghen Chz., en A. van der Swan.

Voor eerst heeft men 4 ft. : 1 roede $= 100\frac{1}{2}$ gl. : 504 roeden. Stel vervolgens de twee getallen, welke het getal der dagen (tot het werk noodig) uitdrukken, $2x$ en x , dan heeft men $(4x^2 + x^2 + 4x^2 + 3x) = 1806$; zoo men nu deze vergelijking oplost, vindt men $x = 14$ en dus het getal der dagen $= 42$. Laat nu ver-

verder A dagelijks $y + 1$ roeden omspitten, dan zal B dagelijks y en C dagelijks $y - 1$ roeden omspitten, en dan heeft men weder $3 \cdot 427 = 504$; dus $y = 4$, $y + 1 = 5$ en $y - 1 = 3$. Stel nu eindelijk dat A z , en B en C ieder v dagen gewerkt hebben, dan heeft A $5z$, B $4v$ en C $3v$ roeden omgespit, en dan is $5z = 3v$ en $4v = 504 - 6v$. Zoo men deze vergelijkingen oplost, vindt men $z = 30\frac{6}{13}$ en $v = 50\frac{2}{13}$, zoo dat A $151\frac{1}{2}$, B $201\frac{3}{2}$ en C $151\frac{1}{2}$ heeft omgespit; dus ontvangen A en C ieder $f\ 30 - 4\frac{1}{2}$ en B $f\ 40 - 6\frac{2}{13}$.

Nº. 53. Door

M. J. ZUIDHOF, Jan Pauw, en P. van Eeghen Chz.

In (*Fig. 28.*) is $AE = 1900$ roeden, $\angle C = \angle A = 60^\circ$, dus $\angle E = 30^\circ$. de zons hoogte. Derhalve

$$Rad. : AE = Sin. E : AB$$

$$AE = 1900 \text{ Log. } . . . 3,27875$$

$$\angle E = 30^\circ. \text{ Log. Sin. } 9,69897$$

$$2,97772 \text{ Log. } 950 = AB,$$

de hoogte des bergs.

Om den tijd te vinden zoo zij (*Fig. 29.*)

$$PT =$$

$$PT = 90^\circ. — PN = 53^\circ. 40' C. Log. S. 0.09389$$

$$PS = 90^\circ. — BS = 66^\circ. 37' C. Log. S. 0.03722$$

$$PT = 90^\circ. — AS = 60. 0$$

$$\text{Som } 180.17$$

$$2 \text{ —————}$$

$$90.8\frac{1}{2} \text{ Log. Sin. } 9.99999$$

$$TS = 60.$$

$$30.8\frac{1}{2} \text{ Log. Sin. } 9.70082$$

$$19.83192$$

$$2 \text{ —————}$$

$$9.91596$$

$$\text{Log. Cos. } 34^\circ. 30'$$

$$\text{————— } 2$$

$$69^\circ. 0' = \angle \text{ SPT}$$

$$15 \text{ —————}$$

$$4^u. 36' \text{ voormiddag}$$

$$12. 0$$

$$7^u. 24' \text{ 'smorgens}$$

$$\text{Voorts Sin. ST : Sin. } \angle P = \text{Sin. SP : Sin. } \angle T$$

$$60^\circ. 0' \quad 69^\circ. 0' \quad 66^\circ. 37'$$

$$9.97015$$

$$9.96278$$

$$19.93293$$

$$9.93753$$

$$9.99540 \text{ Log. Sin. } 81^\circ. 41'$$

$$90^\circ$$

$$\text{de zon ben. het O } 8^\circ 19'$$

en

en $22^{\circ}.30'$ bezuiden het Oost gepeild zijnde, zoo is de som $30^{\circ}.49'$ de Noordwestering van het compas.

N^o. 54 Door

O. S. BANGMA, J. R. Schmidt, U. Huguenin,
P. van Eeghen Chz., C. J. van Brussel,
N. Bondt, en F. J. Méan.

Constructie.

1^o. Maak $\angle A$, AB en AD (*Fig. 30.*) zoo groot als gegeven is.

2^o. Beschrijf op BD als koorde eenen cirkelboog BCD, die eenen hoek bevatten kan gelijk den $\angle C$.

3^o. Beschrijf uit A, met AC als radius, eenen cirkelboog, snijdende den voorgemelden boog in C, dan is ABCD de begeerde vierhoek, zoo als uit de constructie van zelf blijkt.

Aanmerking. Vermits de cirkelbogen elkander ook in G snijden, zoo voldoet de vierhoek ABGD ook aan het begeerde

Stelkundige Oplossing.

Door O. S. BANGMA.

Stel AB (*Fig. 30.*) = a , AD = b , AC = c .
Laat

Laat E het middelpunt zijn van eenen cirkel, die door de punten B, C en D gaat. Stel $\angle BAE = x$, $\angle DAE = y$, $\angle CAE = z$, $\angle ABE = p$, $\angle ADE = q$, $AE = n$, $BE = CE = DE = r$, dan is uit de beschouwing van den driehoek ABD

$$b + a : b - a = \text{Cot. } \frac{1}{2}A : \text{Tang. } \frac{B-D}{2}$$

$$\text{maar } B = ABE + EBF = p + EBF$$

$$\text{en } D = ADE + EDF = q + EBF$$

$$\text{dus } B - D = p - q$$

$$\text{derh. } \text{Tang. } \frac{p - q}{2} = \frac{b - a}{b + a} \cdot \text{Cot. } \frac{1}{2}A$$

verder, uit $\triangle AEB$ en $\triangle AED$

$$\text{Sin. } x : r = \text{Sin. } p : n$$

$$\text{Sin. } y : r = \text{Sin. } q : n$$

$$\text{dus } \text{Sin. } x : \text{Sin. } y = \text{Sin. } p : \text{Sin. } q$$

$$\text{en } \frac{\text{Sin. } x - \text{Sin. } y}{\text{Sin. } x + \text{Sin. } y} = \frac{\text{Sin. } p - \text{Sin. } q}{\text{Sin. } p + \text{Sin. } q}$$

$$\text{of } \frac{\text{Tang. } \left(\frac{x-y}{2} \right)}{\text{Tang. } \left(\frac{x+y}{2} \right)} = \frac{\text{Tang. } \left(\frac{p-q}{2} \right)}{\text{Tang. } \left(\frac{p+q}{2} \right)}$$

dus

$$\text{dus } \text{Tang.} \left(\frac{x-y}{2} \right) = \text{Tang.} \left(\frac{x+y}{2} \right) \frac{\text{Tang.} \left(\frac{p-q}{2} \right)}{\text{Tang.} \left(\frac{p+q}{2} \right)}$$

maar $x + y = A$, en voor $\text{Tang.} \left(\frac{p-q}{2} \right)$ de boven gevondene waarde stellende, komt

$$\text{Tang.} \left(\frac{x-y}{2} \right) = \frac{b-a}{b+a} \cdot \text{Cot.} \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

maar den vierhoek ABED beschouwende, heeft men

$$\angle BED = A + p + q$$

$$\text{of } \angle BEC + \angle CED = A + p + q$$

$$\text{nu is } \angle BEC = 2 \angle BDC$$

$$\text{en } \angle CED = 2 \angle DBC$$

$$\text{dus } 2 (\angle BDC + \angle DBC) = A + p + q$$

$$\angle BDC + \angle DBC = \frac{1}{2} A + \frac{p+q}{2}$$

$$\text{of } 180 - \angle BCD = \frac{1}{2} A + \frac{p+q}{2}$$

$$\text{dus } \frac{p+q}{2} = 180 - \frac{1}{2} A - \angle BCD$$

$$\text{en } \text{Cot.} \left(\frac{p+q}{2} \right) = - \text{Cot.} \left(\frac{1}{2} A + \angle BCD \right)$$

$$\text{dus } \text{Tang.} \left(\frac{x-y}{2} \right) = - \frac{b-a}{b+a} \cdot \text{Cot.} \left(\frac{1}{2} A + \angle BCD \right)$$

en

en daar $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}A$ is, zoo heeft men hier
dóór x en y bekend. Voorts

$$\text{uit } \triangle BEA : r^2 = n^2 + a^2 - 2na \cos. x$$

$$\text{uit } \triangle CEA : r^2 = n^2 + c^2 - 2nc \cos. x$$

$$\text{uit } \triangle DEA : r^2 = n^2 + b^2 - 2nb \cos. y$$

uit deze drie vergelijkingen r en n wegmakende
zal men vinden

$$\cos. z = \frac{b(c^2 - a^2) \cos. y - a(c^2 - b^2) \cos. x}{c(b^2 - a^2)}$$

verder

$$\angle BAC = x - z \text{ en } \angle DAC = y + z$$

$$BC = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos. (x - z)}$$

$$DC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos. (y + z)}$$

waar dóór het voorstel opgelost is.

Aanmerking. Uit de meetkundige Constructie
van de figuur blijkt, dat z zoo wel negatief als
positief genomen kan worden, en hier uit ont-
staan dan twee verschillende waarden voor BC
en DC .

A N D E R S.

Door J. R. SCHMIDT.

Door berekening kan men de gevraagde lijnen
op

op de volgende wijze uit de gegevene afleiden
(zie figuur 31.)

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 AB \cdot AD \cdot \cos. A}$$

$$BD : AB = \sin. A : \sin. BDA = \frac{AB}{BD} \cdot \sin. A$$

$$BD : AD = \sin. A : \sin. DBA = \frac{AD}{BD} \cdot \sin. A$$

$$DF = \frac{1}{2} BD, DEF = DCB, EDF = 90^\circ. - DEF, DE = DF \times \sec. EDF, EDA = EDF + BDA,$$

$$AE = \sqrt{DE^2 + AD^2 - 2 DE \cdot AD \cdot \cos. EDA}$$

$$AE : DE = \sin. EDA + \sin. DAE$$

$$EAB = DAB - DAE, CE = DE,$$

$$\cos. EAC = \frac{AC^2 + AE^2 - EC^2}{2 AC \cdot AE}$$

Deze hoek moet positief en negatief genomen worden, omdat AC en AG met AE gelijke hoeken maken.

$$DAC = DAE + EAC, CAB = EAB - EAC$$

$$DC = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2 AD \cdot AC \cos. DAC}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 AB \cdot AC \cos. CAB}$$

het geen, uit hoofde van EAC positief en negatief, twee verschillende antwoorden zal geven.

A N D E R S.

Door U. Huguenin.

Uit de meetkundige constructie blijkt, dat dit voorstel niet meer dan twee antwoorden toelaat. Wanneer men echter, bij de algebraïsche ontbinding, niet met omzigtigheid te werk gaat, vervalt men op ~~eene~~ vergelijking van den vierden graad: deze heeft ~~alzo~~ twee wortelen meer dan het aantal der mögelijke antwoorden van het voorstel zijn kan; waar uit men alzo vooraf kan besluiten: dat deze meerdere wortelen, of imaginair, of ten minste nutteloos tot de beantwoording van dit voorstel zijn moeten.

Om de vierde magts vergelijking te vermijden merke men op, dat in den driehoek BDC (*Fig. 31*) is, $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 BC \cdot CD \times$

$$\cos. BCD; \text{ of } BC \cdot CD = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cos. BCD}.$$

Voorts heeft men $\triangle BCD + \triangle ABD = \text{vierh. } ABCD$, en $\triangle ACB + \triangle ACD = \text{vierh. } ABCD$; derhalve is $\triangle BCD + \triangle ABD = \triangle ACB + \triangle ACD$, of $\triangle BCD = \triangle ACB + \triangle ACD - \triangle ABD$; dat is: $\frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin. BCD = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin. BAC + \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin. CAD - \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin. BAD$; of $BC \cdot CD$

$$= AB \cdot AC \cdot \frac{\sin. BAC}{\sin. BCD} + AC \cdot AD \cdot \frac{\sin. CAD}{\sin. BCD} - AB \cdot AD \cdot \frac{\sin. BAD}{\sin. BCD}, \text{ en hier uit volgt: dat, in}$$

$$\begin{aligned} & \text{een' onregelmatigen vierhoek, } AB \cdot AC \cdot \frac{\sin. BAC}{\sin. BCD} \\ & + AC \cdot AD \cdot \frac{\sin. CAD}{\sin. BCD} - AB \cdot AD \cdot \frac{\sin. BAD}{\sin. BCD} \\ & = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cos. BCD} \text{ is.} \end{aligned}$$

Stelt

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 81

Stelt men nu $AB = a$, $AD = b$, $AC = d$,
 $\angle BAD = \alpha$, en $\angle BCD = \beta$ bekend, en
den onbekenden hoek $BAC = \varphi$, zoo is \angle
 $CAD = \alpha - \varphi$ en men heeft:

$$\text{in } \triangle BAC, BC^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos. \varphi$$

$$\text{in } \triangle CAD, DC^2 = b^2 + d^2 - 2bd \cos. (\alpha - \varphi)$$

$$\text{in } \triangle BAD, BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. \alpha$$

zoo men nu deze waarden in de voorgaande ver-
gelijking stelt en de grootheden, die elkander
vernietigen, in het tweede lid weglaat, heeft
men:

$$ad \cdot \frac{\sin. \varphi}{\sin. \beta} + bd \cdot \frac{\sin. (\alpha - \varphi)}{\sin. \beta} - ab \cdot \frac{\sin. \alpha}{\sin. \beta} =$$

$$\frac{d^2}{\cos. \beta} + ab \cdot \frac{\cos. \alpha}{\cos. \beta} - ad \cdot \frac{\cos. \varphi}{\cos. \beta} - bd \times$$

$$\frac{\cos. (\alpha - \varphi)}{\cos. \beta}; \text{ en hier uit volgt dan:}$$

$$ad \cdot \left(\frac{\sin. \varphi}{\sin. \beta} + \frac{\cos. \varphi}{\cos. \beta} \right) + bd \cdot \left(\frac{\sin. (\alpha - \varphi)}{\sin. \beta} + \frac{\cos. (\alpha - \varphi)}{\cos. \beta} \right)$$

$$= \frac{d^2}{\cos. \beta} + ab \cdot \left(\frac{\sin. \alpha}{\sin. \beta} + \frac{\cos. \alpha}{\cos. \beta} \right) = \frac{d^2}{\cos. \beta}$$

$$+ ab \frac{\sin. (\alpha + \beta)}{\sin. \beta \cdot \cos. \beta}.$$

Wanneer men deze vergelijking met $\sin. \beta \times$
 $\cos. \beta$ vermenigvuldigt, en voorts $\sin. (\alpha - \varphi)$
en $\cos. (\alpha - \varphi)$ in hare bekende uitdrukkingen
ontwikkelt, laat zij zich onder den volgende
vorm brengen:

$$\begin{aligned}
 & [ad \cos. \beta - bd (\cos. \alpha \cos. \beta - \sin. \alpha \sin. \beta)] \sin. \varphi \\
 & + [ad \sin. \beta + bd (\sin. \alpha \cos. \beta + \cos. \alpha \sin. \beta)] \cos. \varphi \\
 & = d^2 \sin. \beta + ab \sin. (\alpha + \beta); \text{ of}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [ad \cos. \beta - bd \cos. (\alpha + \beta)] \sin. \varphi \\
 & + [ad \sin. \beta + bd \sin. (\alpha + \beta)] \cos. \varphi \\
 & = d^2 \sin. \beta + ab \sin. (\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

of eindelijk :

$$\begin{aligned}
 & \sin. \varphi + \frac{a \sin. \beta + b \sin. (\alpha + \beta)}{a \cos. \beta - b \cos. (\alpha + \beta)} \cdot \cos. \varphi \\
 & = \frac{d^2 \sin. \beta + ab \sin. (\alpha + \beta)}{ad \cos. \beta - bd \cos. (\alpha + \beta)}.
 \end{aligned}$$

daar voorts de tangenten der bogen alle mogelijke waardijen hebben kunnen, zoo stelle men de bekende grootheid

$$\frac{a \sin. \beta + b \sin. (\alpha + \beta)}{a \cos. \beta - b \cos. (\alpha + \beta)} = \text{Tang. } \delta$$

als dan zal, na alles met $\cos. \delta$ vermenigvuldigd te hebben :

$$\begin{aligned}
 & \sin. \varphi \cos. \delta + \cos. \varphi \sin. \delta = \sin. (\varphi + \delta) \\
 & = \frac{d^2 \sin. \beta + ab \sin. (\alpha + \beta)}{ad \cos. \beta - bd \cos. (\alpha + \beta)} \cdot \cos. \delta
 \end{aligned}$$

zijn, in welke uitdrukking de grootheid φ alleen on-

be-

bekend is, en, met behulp der sinus-tafels, uit deze eindvergelijking, kan worden gevonden. (*)

Door-

(*) Dit is eene der fraalste analytische zetten, ik heb dezelve nergens anders gezien. Eene vergelijking van den vorm $a \sin \phi + b \cos \phi + m = 0$ werd al tijd bij alle schrijvers opgelost, zoo als in mijne *Meetk. Anal. Bladz. 52. §. 141.* geleerd is, en loopt, op de gewone wijze aangevat zijnde, tot eene tweede magts vergelijking. Wij nemen deze gelegenheid waar, om, bij voorraad, deze plaats met de belangrijke aanmerking, welke de Heer HUGUENIN ons al vroeger mededeelde, te verrijken, en om, door de bijvoeging van deze noot, deze fraaije herleiding beter in het oog te doen loopen, daar wij, ten aanzien van verdere bijzonderheden, op welke ons de mededeeling van den Heer HUGUENIN heeft opmerkzaam gemaakt, den lezer heenwijzen naar de *Bijvoegselen, op het I Boek onzer Meetkundige Analyse*.

Men deele de vergelijking door a , dan heeft men:
 $\sin \phi + \frac{b}{a} \cos \phi = -\frac{m}{a}$; nu kan $\frac{b}{a}$ altijd aan de tangens van eenen boog α gelijk gesteld worden en dan is $\sin \phi + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \phi = -\frac{m}{a}$; of, alles met $\cos \alpha$ vermenigvuldigende: $\sin \phi \cos \alpha + \sin \alpha \cos \phi = -\frac{m}{a} \cos \alpha$

Is in deze vergelijking b negatief, dan wordt ook α negatief, en omdat $\sin (\phi + \alpha)$ ook gelijk $\sin (180^\circ - \phi - \alpha)$ is, zoo vindt men twee waarden voor ϕ , die met de twee wortels der tweede magts vergelijking, in de gewone oplossing, overeenkomen en in getallen ook veel gemakkelijker berekend kunnen worden

Doordien de hoeken $(\varphi + \delta)$ en $(180^\circ - \varphi - \delta)$ dezelfde sinus hebben, is het tweede antwoord van ons voorstel $\text{Sin. } (180^\circ - \varphi - \delta)$

$$= \frac{d^2 \text{Sin. } \beta + ab \cdot \text{Sin. } (\alpha + \beta)}{ad \text{Cos. } \beta - bd \text{Cos. } (\alpha + \beta)} \cdot \text{Cos. } \delta$$

en deze beide antwoorden zijn mogelijk, wanneer het tweede lid

$$\frac{d^2 \text{Sin. } \beta + ab \cdot \text{Sin. } (\alpha + \beta)}{ad \text{Cos. } \beta - bd \text{Cos. } (\alpha + \beta)} \cdot \text{Cos. } \delta < 1 \text{ is;}$$

Is deze uitdrukking echter $= 1$, zoo is $\text{Sin. } (\varphi + \delta) = 1 = \text{Sin. } 90^\circ$, of $\varphi + \delta = 90^\circ$; waar door dan ook $180^\circ - \varphi - \delta = 90^\circ$ is, en te kennen geeft: dat, in dit geval, de beide wortels gelijk worden, zoo dat het voorstel slechts ééne oplossing toelaat; is daar en tegen

$$\frac{d^2 \text{Sin. } \beta + ab \text{Sin. } (\alpha + \beta)}{ad \text{Cos. } \beta - bd \text{Cos. } (\alpha + \beta)} \cdot \text{Cos. } \delta > 1,$$

200

Men kan ook de gegevene vergelijking door b deelen, en, in het quotient

$$\frac{a}{b} \text{Sin. } \varphi + \text{Cos. } \varphi = -\frac{m}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \text{Cos. } \epsilon = \frac{\text{Cos. } \epsilon}{\text{Sin. } \epsilon} \text{ stellen, als wanneer men vinden zal: } \text{Sin. } \varphi \cdot \text{Cos. } \epsilon + \text{Cos. } \varphi \cdot \text{Sin. } \epsilon = \text{Sin. } (\varphi + \epsilon) = -\frac{m}{b} \text{Sin. } \epsilon.$$

Ja, men kan ook nog, op andere wijzen, de gegevene vergelijking tot de eerste magt herleiden.

JACOB DE GELDER.

zoo zijn de beide wortels onmogelijk; wijl geen sinus grooter dan de eenheid, of de sinus-totus wezen kan, het welk volmaakt met onze geometrische constructie overeenstemt. Wanneer men eenmaal de waardij van ϕ voor beide antwoorden bepaald heeft, kunnen de beide zijden, uit de voorheen gevondene uitdrukkingen voor BC^2 en CD^2 gemakkelijk berekend worden.

Nº. 55. Door

O. S. BANGMA, P. van Eeghen, Chz., en
N. Bondt.

Stel (Fig. 30) $\angle BAC = a$, $\angle BCA = b$,
 $\angle DAC = c$, $\angle ACD = d$, $\angle ABD = x$
en $\angle CBD = y$, dan heeft men:

$$\text{in } \triangle ABD; \sin. A : BD = \sin. x : AD$$

$$\text{in } \triangle CBD, BD : \sin. C = DC : \sin. y$$

$$\text{in } \triangle ADC, \sin. d : \sin. c = AD : DC$$

$$\text{dus } \sin. d . \sin. A : \sin. c . \sin. C = \sin. x : \sin. y$$

$$\text{en } \frac{\sin. x - \sin. y}{\sin. x + \sin. y} = \frac{\text{Tang. } \frac{x-y}{2}}{\text{Tang. } \frac{x+y}{2}} =$$

$$\frac{\sin. d . \sin. A - \sin. c . \sin. C}{\sin. d . \sin. A + \sin. c . \sin. C} = N$$

maar $x + y = 180^\circ - a - b$, dus

$$\text{Tang. } \frac{x-y}{2} = \text{Cot. } \frac{a+b}{2} \times N$$

$x - y$ gevonden hebbende en $x + y$ bekend zijnde, zoo heeft men ook x en y , waar door

$$BDC = 180^\circ - C - y \text{ en } BDA = 180^\circ - A - x$$

A N D E R S.

Door *J. R. Schmidt*.

De hoeken en zijden zoo noemende, als in figuur 32 is aangewezen, hebben wij $x = w - a$, $y = 180^\circ - (b + w)$, $z = 180^\circ - (c + w)$, $v = w - d$, verder is

$$A : B = \text{Sin. } v : \text{Sin. } y$$

$$B : C = \text{Sin. } c : \text{Sin. } d$$

$$C : D = \text{Sin. } x : \text{Sin. } z$$

$$D : A = \text{Sin. } b : \text{Sin. } a$$

deze vier equationen multiplicerende, komt er $1 : 1 = \text{Sin. } v \cdot \text{Sin. } c \cdot \text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } b : \text{Sin. } y \cdot \text{Sin. } d \cdot \text{Sin. } z \cdot \text{Sin. } a$ en bijgevolg $\text{Sin. } v \cdot \text{Sin. } c \cdot \text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } b = \text{Sin. } y \cdot \text{Sin. } d \cdot \text{Sin. } z \cdot \text{Sin. } a$; stellende nu voor x , y , z en v hare waarden, verkrijgt men $\text{Sin. } (w - d) \cdot \text{Sin. } (w - a) \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c = \text{Sin. } (w + b) \cdot \text{Sin. } (w + c) \cdot \text{Sin. } a \cdot \text{Sin. } d$. Deze equatie ontwikkeld en alles door $\text{Cos. } w^2 \times \text{Cos. } a \cdot \text{Cos. } b \cdot \text{Cos. } c \cdot \text{Cos. } d$ gedeeld, geeft

(*Tang.*

$(\text{Tang. } w - \text{Tang. } d) \times (\text{Tang. } w - \text{Tang. } a) \times$
 $\text{Tang. } b \cdot \text{Tang. } c = (\text{Tang. } w + \text{Tang. } b) \times$
 $(\text{Tang. } w + \text{Tang. } c) \cdot \text{Tang. } a \cdot \text{Tang. } d$; en,
 wanneer wij de aangewezen multiplicatiën ver-
 richten,

$$\begin{aligned} & \text{Tang. } w^2 \cdot \text{Tang. } b \cdot \text{Tang. } c - \text{Tang. } w (\text{Tang. } a + \text{Tang. } d) \times \\ & \text{Tang. } b \cdot \text{Tang. } c + \text{Tang. } a \cdot \text{Tang. } b \cdot \text{Tang. } c \cdot \text{Tang. } d = \\ & \text{Tang. } w^2 \text{Tang. } a \cdot \text{Tang. } d + \text{Tang. } w (\text{Tang. } b + \text{Tang. } c) \times \\ & \text{Tang. } a \cdot \text{Tang. } d + \text{Tang. } a \cdot \text{Tang. } b \cdot \text{Tang. } c \cdot \text{Tang. } d. \end{aligned}$$

dat is :

$$\begin{aligned} & \text{Tang. } w^2 (\text{Tang. } b \cdot \text{Tang. } c - \text{Tang. } a \cdot \text{Tang. } d) = \\ & \text{Tang. } w (\text{Tang. } a + \text{Tang. } d) \text{Tang. } b \cdot \text{Tang. } c + \\ & \text{Tang. } w (\text{Tang. } b + \text{Tang. } c) \text{Tang. } a \cdot \text{Tang. } d \end{aligned}$$

en deelende alles door $\text{Tang. } w$ en door

$$\begin{aligned} & \text{Tang. } b \cdot \text{Tang. } c - \text{Tang. } a \cdot \text{Tang. } d, \\ & \text{Tang. } w = \frac{(T.a + T.d) T.b \cdot T.c + (T.b + T.c) T.a \cdot T.d}{\text{Tang. } b \cdot \text{Tang. } c - \text{Tang. } a \cdot \text{Tang. } d} \end{aligned}$$

waar door w en dus ook x , y , z en v bepaald
 zijn.

A N D E R S.

Door *F. J. Méan.*

Maak de diagonaal AC (*Fig. 30.*) naar wel-
 gevallen, verder de hoeken CAB, CAD, ACB
 F 5 en

en ACD gelijk aan de gegevene deelen, door het voorstel bekend gegeven; dan zal de vierhoek ABCD gelijkvormig zijn aan den voorgestelden, en de diagonaal BD trekkende, dan zullen CDB, ADB, CBD en ABD de begeerde deelen zijn.

Nº. 56. Door

Door O. S. BANGMA.

Stel AB (Fig. 30.) = a , BC = b , CD = c , AD = d , en inhoud = I , $\angle ABD = x$, $\angle CBD = y$, AC = p en BD = q , dan is

$$\Delta ABD = \frac{1}{2} a q \cdot \sin. x$$

$$\Delta BCD = \frac{1}{2} b q \cdot \sin. y$$

$$\text{dus } (a \sin. x + b \sin. y) q = 2 I \dots\dots (1)$$

Voorts uit de driehoeken ABD en BCD

$$d^2 = a^2 + q^2 - 2 a q \cos. x \dots\dots (2)$$

$$c^2 = b^2 + q^2 - 2 b q \cos. y \dots\dots (3)$$

Als men nu uit deze drie vergelijkingen x en y wegmaakt, verkrijgt men eene vergelijking in q ; nu heeft men door de eerste vergelijking:

$$(a^2 \sin. x^2 + b^2 \sin. y^2 + 2 ab \sin. x \cdot \sin. y) q^2 = 4 I^2$$

$$2 ab \sin. x \sin. y \cdot q^2 = 4 I^2 - (a^2 \sin. x^2 + b^2 \sin. y^2) q^2$$

$$\begin{aligned}
 4 a^2 b^2 \sin x^2 \sin y^2 q^4 &= 16 I^4 - 8 I^2 \times \\
 (a^2 \sin x^2 + b^2 \sin y^2) q^2 &+ (a^2 \sin x^2 + b^2 \sin y^2)^2 q^4 \\
 0 &= 16 I^4 - 8 I^2 (a^2 \sin x^2 \pm b^2 \sin y^2) q^2 \\
 &+ (a^2 \sin x^2 - b^2 \sin y^2)^2 q^4 \dots \dots (4)
 \end{aligned}$$

Door de tweede vergelijking heeft men

$$\begin{aligned}
 2 a q \cos x &= a^2 - d^2 + q^2 \\
 4 a^2 q^2 \cos x^2 &= (a^2 - d^2)^2 + 2(a^2 - d^2) q^2 + q^4 \\
 4 a^2 q^2 \sin x^2 &= 4 a^2 q^2 \sin x^2 \\
 \hline
 4 a^2 q^2 &= 4 a^2 q^2 \sin x^2 + (a^2 - d^2)^2 \\
 &+ 2(a^2 - d^2) q^2 + q^4 \\
 2(a^2 + d^2) q^2 &= 4 a^2 q^2 \sin x^2 + (a^2 - d^2)^2 + q^4 \dots (5)
 \end{aligned}$$

Op gelijke wijze door de derde vergelijking:

$$2(b^2 + c^2) q^2 = 4 b^2 q^2 \sin y^2 + (b^2 - c^2)^2 + q^4 \dots (6)$$

Het verschil hier van is:

$$\begin{aligned}
 2(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) q^2 &= 4(a^2 \sin x^2 - b^2 \sin y^2) q^2 \\
 &+ (a^2 - d^2)^2 - (b^2 - c^2)^2
 \end{aligned}$$

Stel om te verkorten

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = r$$

$$a^2 - d^2 + b^2 - c^2 = n$$

$$a^2 - d^2 - b^2 + c^2 = m$$

komt:

$$2 r q^2 = 4(a^2 \sin x^2 - b^2 \sin y^2) q^2 + m n \dots (7)$$

Door

Door (5) en (6) te adderen, heeft men:

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)q^2 = 4(a^2 \sin. x^2 + b^2 \sin. y^2)q^2 \\ + (a^2 - d^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2q^4$$

Stel $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f$, en daar

$$(a^2 - d^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 = \frac{m^2 + n^2}{2} \text{ is, zoo}$$

heeft men:

$$2f q^2 = 4(a^2 \sin. x^2 + b^2 \sin. y^2)q^2 \\ + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}n^2 + 2q^4 \dots (8)$$

$$\text{Uit (7) volgt: } (a^2 \sin. x^2 - b^2 \sin. y^2)^2 q^4 \\ = \frac{1}{4}r^2 q^4 - \frac{1}{4}mnr q^2 + \frac{1}{16}m^2 n^2$$

$$\text{Uit (8) volgt: } 8(a^2 \sin. x^2 + b^2 \sin. y^2)q^2 \\ = 4f q^2 - 4q^4 - m^2 - n^2$$

deze waarden in (4) gesteld, komt

$$0 = 16I^4 - 4f I^2 q^2 + 4I^2 q^4 + m^2 I^2 \\ + n^2 I^2 + \frac{1}{4}r^2 q^4 - \frac{1}{4}mnr q^2 + \frac{1}{16}m^2 n^2, \text{ of:} \\ (4I^2 + \frac{1}{4}r^2)q^4 = (4f I^2 + \frac{1}{4}mnr)q^2 - \\ (4I^2 + \frac{1}{4}m^2)(4I^2 + \frac{1}{4}n^2)$$

$$\text{Stel } 4I^2 + \frac{1}{4}r^2 = R, \quad 4f I^2 + \frac{1}{4}mnr = S$$

$$(4I^2 + \frac{1}{4}m^2) = M \text{ en } (4I^2 + \frac{1}{4}n^2) = N$$

komt

komt $Rq^4 = Sq^2 - MN$

$$q^2 = \frac{\frac{1}{2} S \pm \sqrt{(\frac{1}{4} S^2 - MNR)}}{R}$$

Om $AC = p$ te vinden, zoo trekke men de vergelijking (2) van (3), komt

$$c^2 - d^2 = b^2 - a^2 + 2(a \cos. x - b \cos. y) q$$

$$\text{of } a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2(a \cos. x - b \cos. y) q$$

$$\text{of } \frac{1}{2} m = (a \cos. x - b \cos. y) q$$

$$\frac{1}{4} m^2 = (a^2 \cos. x^2 + b^2 \cos. y^2 - 2ab \cos. x \cos. y) q^2$$

maar door (1) heeft men

$$4 l^2 = (a^2 \sin. x^2 + b^2 \sin. y^2 + 2ab \sin. x \sin. y) q^2$$

deze twee vergelijkingen adderende, komt

$$M = [a^2 + b^2 - 2ab \cos. (x + y)] q^2$$

$$M = (a^2 + b^2 - 2ab \cos. B) q^2$$

Maar uit den driehoek ABC heeft men

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. B$$

$$\text{dus } p^2 q^2 = M$$

$$p^2 = \frac{M}{q^2} = \frac{MR}{\frac{1}{2} S \pm \sqrt{(\frac{1}{4} S^2 - MNR)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} S \mp \sqrt{(\frac{1}{4} S^2 - MNR)}}{N}$$

AN-

A N D E R S.

Door *J. R. Schmidt*, en *P. van Eeghen*, Chz.

Alles stellende, zoo als in figuur 33 is aange-
wezen en den inhoud i noemende, hebben wij:

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} AC \cdot BF = \frac{1}{2} AC \cdot BE \cdot \sin. \varphi$$

$$\Delta ACD = \frac{1}{2} AC \cdot DG = \frac{1}{2} AC \cdot DE \cdot \sin. \varphi$$

waar van de fom is:

$$\text{vierh. } ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin. \varphi$$

$$\text{datis} \quad i = \frac{1}{2} xy \sin. \varphi \quad . . . (1)$$

verder is:

$$a^2 = AE^2 + BE^2 - 2 AE \cdot BE \cos. \varphi$$

$$a^2 = CE^2 + BE^2 + 2 CE \cdot BE \cos. \varphi$$

waar van het verschil is:

$$a^2 - a^2 = CE^2 - AE^2 + 2 AC \cdot BE \cos. \varphi$$

Op gelijke wijze is

$$c^2 - b^2 = AE^2 - CE^2 + 2 AC \cdot DE \cos. \varphi$$

adderende nu deze twee equationen, komt

$$a^2 - b^2 + c^2 - a^2 = 2 xy \cos. \varphi \quad . . . (2)$$

en deelende 4 maal de equatie (1) door (2),
komt

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{4i}{a^2 - b^2 + c^2 - a^2} \quad . . . (3)$$

waar

waardoor de hoek der diagonalen bekend is in de zijden en den inhoud.

De equation (1) en (2), gequadrateerd, geven:

$$4 x^2 y^2 \sin. \phi^2 = 16 s^2, \text{ en}$$

$$4 x^2 y^2 \cos. \phi^2 = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$$

deze equation geaddeerd en de som door 4 gedeeld, geeft

$$x^2 y^2 = \frac{1}{4} (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 4 s^2 \dots (4)$$

waardoor het product der diagonalen bekend is in de zijden en den inhoud.

Nu is (zie de *Meetk. Analyse*, pag. 112.)

$$\begin{aligned} & x^2 y^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (x^2 + y^2) x^2 y^2 \\ & + x^2 (a^2 c^2 + b^2 d^2 - a^2 d^2 - b^2 c^2) \\ & + y^2 (a^2 c^2 + b^2 d^2 - c^2 d^2 - a^2 b^2) = \\ & a^4 c^2 + a^2 c^4 + b^4 d^2 + b^2 d^4 - a^2 b^2 c^2 \\ & - b^2 c^2 d^2 - c^2 d^2 a^2 - d^2 a^2 b^2 \end{aligned}$$

Hierin de gevondenne waarde van $x^2 y^2$ (4) gebragt, komt, na behoorlijke herleiding:

$$\begin{aligned} & x^2 ((a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 + 16 s^2) + \\ & y^2 ((a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16 s^2) = \\ & (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \\ & + 16(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)s^2 \end{aligned}$$

Zoo

Zoo wij nu korthedshalve stellen:

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 16i^2 = m^2$$

$$(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 + 16i^2 = p^2$$

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16i^2 = q^2$$

$$\text{en } (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \\ + 16(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)i^2 = r$$

$$\text{hebben wij } p^2 x^2 + q^2 y^2 = r$$

$$\text{en } 2xy = m$$

$$\text{dus } apqxy = pqm$$

$$(px + qy)^2 = r + pqm$$

$$(px - qy)^2 = r - pqm$$

$$px + qy = \sqrt{r + pqm}$$

$$px - qy = \sqrt{r - pqm}$$

$$\text{dus } x = \frac{\sqrt{r + pqm} + \sqrt{r - pqm}}{2p}$$

$$\text{en } y = \frac{\sqrt{r + pqm} - \sqrt{r - pqm}}{2q}$$

N^o. 57. Door

*U. Huguenin, P. van Eeghen, Chz., N. Bondt,
en F. J. Méan.*

Zij P (*Fig. 34.*) het middelpunt des grootsten halven cirkel AHD; dan is (BD getrokken hebbende) $DC = BC = PD = BP$, en PBCD is een pa-

parallelogram van vier gelijke zijden, of *rhombus*, van hetwelke de inhoud gelijk aan die der *mixtilinische* figuur is.

Men beteekene de inhouden der halve cirkels AHD, AGF en FED respectivelijk door A, B en C: daar nu $AU = UF = FD = \frac{1}{3} AD$, alzoo $AF = \frac{2}{3} AD$ is, en de inhouden der cirkels, mitsdien ook hunne helften, zich verhouden als de quadraten hunner middellijnen, zoo heeft men:

$$A : B = AD^2 : \frac{4}{9} AD^2, \text{ of } B = \frac{4}{9} A$$

$$A : C = AD^2 : \frac{1}{9} AD^2, \text{ of } C = \frac{1}{9} A$$

Dierhalve is de inhoud der kromlijnige figuur AHIDEFGA $= A - B + C = A - \frac{4}{9} A + \frac{1}{9} A = \frac{2}{9} A$; maar doordien de sectors BPC en CPD ieder gelijk $\frac{1}{3}$ van den halven cirkel A zijn, zoo volgt: dat sector BCDP $= \frac{2}{9} A$ is, en dat hij dus ook gelijk aan den inhoud der kromlijnige figuur AHIDEFGA wezen zal.

Subtraheert men van dezen sector, gelijk mede van de kromlijnige figuur, segment BCH + segment CID, zoo rest parallelogram PBCD = *mixtilinische* figuur ABCDEFGA.

Nº. 58. Door

JACOB DE GELDER.

Wij nemen tot grondslag van de oplossing van dit Vraagstuk aan de XXI Stelling van het III Boek van onze *Beginfelen der Meetkunst*, dewelke zegt: *Wanneer men de basis van eenen driehoek ABC, in een punt D, zoodanig verdeelt, dat de deelen AD en BD tot elkander staan in reden, als een getal q tot een getal p; dan zal, de lijn CD getrokken hebbende,*

$$p \times AC^2 + q \times BC^2 = p \times AD^2 + q \times BD^2 + (p+q) \times CD^2$$

G zijn.

zijn. (Men zie het betoog dezer stelling op de aangehaalde plaats.) Men kan deze vergelijking onder eene eenigzins eenvoudiger gedaante voorstellen. Volgens de onderstelling, is $AD : BD = q : p$, derhalve heeft men ook:

$$AD \mp DB, \text{ of } AB : AD = p + q : q$$

$$AD + BD, \text{ of } AB : BD = p + q : p$$

en dan volgt hieruit:

$$AD = \frac{q}{p+q} \times AB; \text{ en derh. } AD^2 = \frac{q^2}{(p+q)^2} \times AB^2$$

$$BD = \frac{p}{p+q} \times AB \dots BD^2 = \frac{p^2}{(p+q)^2} \times AB^2$$

$$p \times AD^2 = \frac{pq^2}{(p+q)^2} \times AB^2 \text{ en } q \times BD^2 = \frac{p^2q}{(p+q)^2} \times AB^2$$

en de vergelijking van het XXI *Voorstel* wordt dan, door de substitutie dezer waarden,

$$p \times AC^2 + q \times BC^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) \times CD^2 \dots (Q)$$

en het is, onder deze gedaante, dat wij dezelve in de oplossing van ons Vraagstuk gebruiken zullen. Dit beginsel dan te baat nemende, kan men, van geval tot geval voortgaande, de oplossing van het voorgestelde Werkstuk tot eenen algemeenen regel en van daar tot eene algemeene constructie brengen.

I. GAVALL. Laten (*Fig. 35.*) gegeven zijn twee punten A en B, en stel, dat P zulk een punt zij, dat, getrokken hebbende de lijnen AP en BP, de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2$ een gegeven vlak R zij. Bij aldien men dan de punten A en B verëenigt en de lijn AB in M zoodanig verdeelt, dat $AM : BM = q : p$ zij:

zij; dan zal, volgens het geene wij zoo even bewezen hebben:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) \times PM^2 = R$$

zija. Nu zijn de punten A en B in stelling gegeven; bij gevolg is de lijn AB in grootte gegeven; daar nu de coëfficiënten p en q , benevens het vlak R , gegeven zijn, is ook PM , welke door de vergelijking

$$PM^2 = \frac{(p+q) \times R - pq \times AB^2}{(p+q)^2}$$

geven is, insgelijks in grootte gegeven en kan door eene constructie gevonden worden. Wanneer men nu, in het vlak, in hetwelk de punten A, B en P liggen, uit M, als middelpunt, met MP als straal, eenen cirkel beschrijft; dan zal de omtrek van dien cirkel de plaats van alle de punten zijn, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 = R$ maakt; want, voor elk ander punt P' is, aangezien al de stralen van eenen cirkel gelijk zijn:

$$p \times AP'^2 + q \times BP'^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) \times MP'^2 = R.$$

en bij gevolg is de omtrek des cirkels, welke met

$$PM = \frac{\sqrt{(p+q) \times R - pq \times AB^2}}{p+q}$$

als straal, beschreven wordt, de plaats der punten, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2$ gelijk aan een gegeven vlak, of aan eene standvastige grootte, maakt. Dan, deze meetkundige plaats strekt zich verder, dan tot den omtrek van dien cirkel, uit. Immers, wanneer men zich een bol verbeeldt, wiens middelpunt in M is, en welke de lijn MP tot straal heeft, dan zullen, aangezien alle stralen van eenen bol aan elkander gelijk zijn, alle de punten P' , P'' , enz.

van het oppervlak van dien bol, de eigenschap hebben, dat, wanneer de lijnen AP'' , BP'' ; AP'' en BP'' getrokken worden, er een driehoek ABP'' , ABP'' , *enz.* in de ruimte ontstaan zal, die dezelfde eigenschap, als de driehoek ABP , zal hebben, en bij gevolg zal, voor alle de punten P' , P'' , *enz.* de som der vlakken $p \times AP'^2 + q \times BP'^2$ of $p \times AP''^2 + q \times BP''^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) \times MP^2 = R$ zijn, en men mag dan hieruit besluiten: *dat, bij aldien er twee punten gegeven zijn, de plaats der gevraagde punten, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2$ standvastig maakt, een bol zal zijn, wiens middelpunt in stelling en wiens straal in grootte gegeven is.*

II GEVAL. Zijn gegeven (*Fig. 36.*) drie punten A, B en C en laat een punt P zoodanig gevonden zijn, dat $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 = R$ zij. Men deele, na de punten A en B vereëenigd te hebben, AB in D zoodanig, dat $AD : BD = q : p$ zij; dan zal, zie vergelijking (Q),

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + (p+q) PD^2 \dots (\mu)$$

zijn. Men talle hier bij $r \times CP^2 = r \times CP^2$; dan is:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 +$$

$$\dots (p+q) \times PD^2 + r \times CP^2.$$

Men vereëenige nu het punt C met het punt D, en deele de lijn CD in M zoodanig, dat $DM : CM = r : p+q$ zij: dan zal, na dat men de lijn PM getrokken heeft, $(p+q) \times$

$$DP^2 + r \times CP^2 = \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times DC^2 + (p+q+r) \times PM^2$$

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 99

PM^2 zijn. Stelt men deze waarde in de vergelijking (μ) hier boven; dan verkrijgt men:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 +$$

$$\dots \frac{(p+q) \times r}{p+q+r} \times CD^2 + (p+q+r) \times PM^2 = R$$

en dan volgt hieruit:

$$PM^2 = \frac{R - \frac{pq}{p+q} \times AB^2 - \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CD^2}{p+q+r}$$

Nu zijn R , AB en CD gegeven, benevens de getallen, of coëfficiënten p , q en r ; derhalve is ook PM gegeven en kan door constructie gevonden worden. Daar dan PM eene gegevene en standvastige grootheid is, zal de cirkel of de bol, welke M tot middelpunt en PM tot straal heeft, de plaats der punten zijn, welke, wanneer uit dezelve de lijnen AP , BP en CP tot de gegeven punten A , B en C getrokken worden, de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2$ eene gegevene of standvastige grootheid R zal maken.

III GEVAL. Laten er (Fig. 37.) vier punten A , B , C en D gegeven zijn. Stel, dat het punt P gevonden zij, zoodanig, dat $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 =$ het gegeven vlak R zij: men deele dan vooreerst, na de punten A en B vereënid te hebben, AB in E zoodanig dat $AE : BE = q : p$ zij; men vereenige voorts de punten C en E , deele CE in F zoodanig, dat $EF : CF = r : p+q$ zij; dan is, indien men de lijn PF trekt, volgens het II Geval,

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CE^2$$

$$+ (p+q+r) \times PF^2$$

Men

G 8

Men telte aan beide zijden dezer vergelijking $s \times PD^2$, dan is:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2$$

$$+ \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CE^2 + (p+q+r) PF^2 + s \times PD^2 = R(\mu')$$

Men verëenige nu de punten D en F en deele de lijn DF in M zoodanig, dat $MF : DM = s : p + q + r$ zij; dan is, zie vergelijking (Q)

$$(p + q + r) \times PF^2 + s \times DP^2 = \frac{(p+q+r) \times s}{p + q + r + s}$$

$$\dots \times DF^2 + (p + q + r + s) \times PM^2$$

en stelt men nu deze waarde in vergelijking (μ'); dan heeft men:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 +$$

$$\frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CE^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DF^2 + (p+q+r+s)$$

$$\dots \times PM^2 = R$$

en hier uit volgt, $PM^2 =$

$$\frac{R - \frac{pq}{p+q} \times AB^2 - \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CE^2 - \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DF^2}{p+q+r+s}$$

en daar nu R , AB , CE en DF , benevens de grootheden, of getallen, p , q , r en s , gegeven zijn, of door constructie gevonden kunnen worden, heeft PM eene bepaalde waarde, welke van die gegevens afhangt. *indien men dan een cirkel of bol construeert, welks middelpunt in M is, en welke PM tot straal heeft; dan zal de onttrek van dien cirkel of het oppervlak van dien bol, wederom de plaats der punten P zijn, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2$*

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 101

$CP^2 + s \times DP^2$ gelijk aan 'eene standvastige en gegevene groothed: K maken zal.

Wij hebben, in de beschouwing van dit geval, stilzwijgend ondersteld: dat de punten A, B, C en D , alle in hetzelfde lagen; dan, wanneer men eenige oogenblikken bij de wijze, op welke het punt M en de straat PM , naar de gegevene voorwaarde van het Vraagstuk, gevonden worden stil staat; zal men zien, dat de wijze van redneren en oplossen dezelfde zal blijven, wanneer de punten A, B, C en D , niet alle in hetzelfde vlak liggen: men zal toch, in dit algemeene geval, even, als wanneer alle de gegevene punten in hetzelfde vlak liggen, A met B kunnen verbinden en $AE : BE = q : p$ stellen; C en E verëenigen en $EF : CF = r : p + q$ stellen en eindelijk D en F kunnen verëenigen en $MF : DM = s : p + q + r$ stellen, zonder dat de in de ruimte verspreide ligging der punten daarin eenige hinderpaal in den weg stelt: en de uitkomst der oplossing van het IV Geval wordt bijgevolg in geen en deels gewijzigd, wanneer de punten A, B, C en D niet in hetzelfde vlak liggen.

IV GEVAL.

A, B, C, D
in de ruimte v
wordt, dat het
ke de som der
 $s \times CP^2 + s \times$
dan zal, na, als
deeld te hebben
voorts, na genoi

$p + q$; $GH : HM = s : p + q + r$, volgens het derde geval,

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 = \frac{PH^2}{p+q+r} \times AB^2$$

$$+ \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CF^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DG^2 + \frac{(p+q+r+s)}{p+q+r+s} \times PH^2$$

$\times PH^2$ zijn: en telt men aan beide zijden dezer vergelijking bij $t \times EP^2$; en stelt men dan voor $t \times PH^2 + (p + q + r + s) \times PE^2$ derzelyer waarde $\frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t} \times EH^2 + (p+q+r+s+t) \times PM^2$, dan zal men verkrijgen:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 + t \times EP^2 =$$

$$\frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CF^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DG^2 \dots$$

$$+ \frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t} \times EH^2 + (p+q+r+s+t) \times PM^2 = R.$$

en dan volgt hier uit, dat

$$(p+q+r+s+t) \times PM^2 = R - \frac{pq}{p+q} \times AB^2 -$$

$$- \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CF^2 - \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DG^2 \dots$$

$$- \frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t} \times EH^2$$

en dat PM^2 bijgevolg bekend en gegeven zal zijn.

Men ziet hieruit: dat, het zij al de punten A, B, C, D en E in het zelfde vlak liggen, het zij dezelve, naar welgevallen, in de ruimte verspreid zijn, de punten F, G, H en M door constructie bepaald worden en van de coëfficiënten p, q, r, s en t afhangen, en dat, eindelijk, alle punten P, welke op denzelfden afstand van M verwijderd zijn en door de laatste vergelijking bepaald worden, in den omtrek van eenen cirkel, of in het oppervlak van eenen bol, zullen liggen, welks middelpunt P in heting en welks straat PM in grootte gegeven is.

Het is niet noodig de gevallen, voor zes, zeven en meer punten, elk afzonderlijk, voor te dra-

dragen: men ziet, uit de naauwkeurige vergelijking der vier eerste: dat, voor de volgende gevallen, alles, op dezelfde regelmatigte wijze, zal afloopen en dat, door dien regelmatigten voortgang, de algemeene oplossing van het werkstuk, voor zoo vele punten, als men maar stellen wil, gevonden zal worden.

Laten dan, *Fig. 39*, zoo vele punten A, B, C, D, E, F, G, H , enz., als men goedvindt, het zij in hetzelfde vlak, het zij in de ruimte verspreid. liggende, gegeven zijn: dan zal men, om de plaats der punten P te bepalen, welke de eigenschap hebben, dat $p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 + t \times EP^2 + u \times FP^2 + v \times GP^2 + w \times HP^2 + \text{enz.} = R$ zij, te werk gaan als volgt:

1°. Verëenig de punten A en B en deel AB in Q , zoodanig dat $AQ : BQ = q : p$ zij.

2°. Verëenig de punten C en Q en deel CQ in R , zoodanig dat $QR : RC = r : p + q$ zij.

3°. Verëenig de punten D en R en deel DR in S zoodanig, dat $RS : SD = s : p + q + r$ zij.

4°. Verëenig de punten E en S en deel ES in T zoodanig, dat $ST : TE = t : p + q + r + s$ zij.

5°. Verëenig de punten F en T en deel FT in U zoodanig, dat $TU : FU = u : p + q + r + s + t$ zij.

6°. Verëenig de punten G en U en deel GU in V zoodanig, dat $UV : VG = v : p + q + r + s + t + u$ zij.

7°. Verëenig de punten V en H en deel VH in W zoodanig, dat $VW : WH = w : p + q + r + s + t + u + v$ zij.

8°. Ga op deze wijze voort, tot dat het laatste punt, dat men naar deze handelwijze, vinden zal, het punt M zij.

Indien dan P één der gegeven punten is, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 + \text{enz.}$ gelijk aan eene gegeven, en standvastige grootheid R maakt, dan zal voorcerst:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 + t \times EP^2 + u \times FP^2 + v \times GP^2 + w \times HP^2 + \text{enz.} = \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \dots$$

$$\frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CQ^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DR^2 + \frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t} \times ES^2$$

$$+ \frac{(p+q+r+s+t)u}{p+q+r+s+t+u} \times FT^2 + \frac{(p+q+r+s+t+u)v}{p+q+r+s+t+u+v} \times GU^2$$

$$+ \frac{(p+q+r+s+t+u+v)w}{p+q+r+s+t+u+v+w} \times HV^2 + \text{enz.} \dots \dots \dots$$

$$+ (p+q+r+s+t+u+v+w+\text{enz.}) \times PM^2 = R. (M)$$

zijn; en, daar alle de coëfficiënten p, q, r , enz. in waarde, en de punten A, B, C , enz. in stelling, gegeven zijn, zullen de lijnen $AB, CQ, DR, ES, FT, GU, HV$, enz. in grootte bekend worden, en de lijn MP zal door de vergelijking

$$\dots (p+q+r+t+s+u+v+w+\text{enz.}) \times PM^2 =$$

$$R - \frac{pq}{p+q} \times AB^2 - \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CQ^2 - \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DR^2$$

$$- \frac{(p+q+r+s)t}{p+q+r+s+t} \times ES^2 - \text{enz.} \dots \dots \dots (N)$$

bepaald zijn. Het oppervlak van den bol nu, welke M tot middelpunt en MP tot straal heeft, zal dan de plaats der punten zijn, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 + \text{enz.}$ gelijk aan een gegeven vlak R maken zal.

vergelijking
bediend
zoek de
betreft
 p en q
Stelling
 p en q
wijzen,
wan-

wanneer men, in het algemeen, in plaats van deze getallen, twee lijnen p en q aanneemt, als wanneer de stelling en de vergelijking (Q), zoo veel voor het onmeetbare, als het meetbare geval, zal kunnen betoogd worden: en is dit zoo, dan gelden ook de algemeene vergelijkingen (M) en (N) voor alle meetbare en onmeetbare waarden van $p, q, r, s, t, \text{enz.}$

II AANMERKING. Het blijkt, uit de vergelijking (N), dat het vraagstuk aan eene zekere grenspaal of limiet van mogelijkheid onderworpen is. Immers, zoo lang het gegeven vlak R, grooter dan $\frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CQ^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DR^2 + \text{enz.}$ is, zal $(p+q+r+\text{enz.}) \times PM^2$ positief zijn, en PM zal eene bestaanbare waarde hebben: in dit geval, bestaat er derhalve altijd een bol, wiens oppervlak de plaats der punten is, welke de som $p \times AP^2 + q \times BP^2 + \text{enz.} = R$ maakt; doch is $R = \frac{pq}{p+q} \times$

$AB^2 + \text{enz.}$; dan bestaat er slechts een enkel punt M, hetwelk die voorwaarde kan vervullen; en is eindelijk $R < \frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \text{enz.}$, dan is

het vraagstuk, daar de gegevens onderling onbestaanbaar zijn, onmogelijk. En, uit dit alles volgt dan: dat het punt M, zoo als het door de boven opgegeven constructie gevonden wordt, de eigenschap heeft, dat de som van de vierkantjes der lijnen AM, BM, GM, DM enz. zijwelken uit de gegevene punten, tot dit punt getrokken worden, elk respectievelijk met de coëfficiënten $p, q, r, s, \text{enz.}$ vermenigvuldigd, een minimum of een kleinste is.

III AANMERKING. Het voorstel komt bij

AP.

APOLONIUS als een *Theorema*; maar bij ons als een *Problema* voor. APPOLONIUS neemt aan, dat op de lijnen AP, BP, CP, DP enz. vlakke figuren beschreven zijn (bij voorbeeld op AP een driehoek, op BD een vierhoek, op CP een vijfhoek,) en dat, voor een ander punt P', de figuren, op AP', BP', CP', enz. beschreven, gelijkvormig zijn aan de figuren, welke voor het punt P, op de lijnen AP, BP en CP, beschreven zijn: nu heeft eenige figuur, welke op eene lijn beschreven is, tot het vierkant van die lijn eene bepaalde betrekking; want men kan elke veelhoekige figuur in eenen regthoek veranderen, welke die lijn tot breedte heeft, en dan staat de inhoud van dien veelhoek tot het vierkant, als de lengte van dien regthoek tot de zijde van dit vierkant. Stellen wij de veelhoeken, op AP, BP, CP, DP, enz. beschreven, A, B, C, D, enz. en de gelijkvormige veelhoeken op AP', BP', CP', DP' enz. beschreven A', B', C', D', enz.; dan is volgens de beginselen:

$$(A, B, C, D, \text{enz.}) :: (AP^2, BP^2, CP^2, DP^2, \text{enz.})$$

en, om dezelfde reden:

$$(A', B', C', D, \text{enz.}) :: (AP'^2, BP'^2, CP'^2, DP'^2, \text{enz.})$$

stellen wij nu, het geen altijd zijn mag, dat

$$A : AP^2 = p : 1; B : BP^2 = q : 1; C : CP^2 = r : 1;$$

$$D : DP^2 = s : 1, \text{ enz. zij; dan zal}$$

$$A = p \times AP^2, B = q \times BP^2, C = r \times CP^2, D = s \times DP^2, \text{ enz.}$$

zijn: maar nu is $A : A' = AP^2 : AP'^2$; derhalve is ook $A : A' = p \times AP^2 : p \times AP'^2$; dan, daar $A = p \times AP^2$ is, zal ook $A' = p \times AP'^2$ zijn, en, om dezelfde reden, $B' = q \times BP'^2$, $C' = r \times CP'^2$, enz.: waar uit dan blijkt: dat het voorstel van APPOLONIUS slechts, in de wijze van uitdrukken, van het onze

ver-

verschilt: ()* alleenlijk; daar hij alle punten aanneemt, als in het zelfde vlak gelegen te zijn, is ons voorstel algemeener.

IV AANMERKING. Wij hebben, bij de behandeling van elk geval, de constructie van hetzelfde voorbedachtelijk achterwege gelaten, met oogmerk, om, uit de nadere beschouwing der figuur, eene meer algemeene afteleiden.

Laat, *Fig. 40.* gegeven zijn twee punten A en B, met eene onbepaalde rechte lijn A'B', met deze punten in hetzelfde vlak liggende; bij aldien nu AB in Q zoodanig verdeeld wordt, dat $AQ : BQ = q : p$ staat (en dat bijgevolg $p \times AQ = q \times BQ$ is,) dan zal, indien men, uit de punten A, B en Q, de loodlijnen AA', QQ' en BB' op de lijn A'B' laat vallen;

$$(p + q) \times QQ' = p \times AA' + q \times BB' \dots\dots (V)$$

zijn. Laat, om dit te bewijzen, AD en QC evenwijdig aan A'B' getrokken worden; dan is $AA' = EQ' = DB'$ en $QE = CD$. Nu is, in de gelijkvormige driehoeken AQE en QBC, $AQ : QB = QE : BC = q : p$; derhalve is ook $p \times QE = q \times BC$. Tel nu de vergelijkingen,

$$p \times AA' = p \times QQ' - p \times QE$$

$$q \times BB' = q \times QQ' + q \times BC$$

bij

(*) Het vijfde voorstel van APOLLONIUS, zoo als het door SIMPSON is voorgedragen, en ook overeenlijk van de woorden van PAPPUS niet verschilt, is in deze bewoordingen voorgesteld: „Indien, uit zoo vele punten, als men goedvindt, tot één punt, rechte lijnen getrokken worden, en op alle deze lijnen figuren, die in soort gegeven zijn, beschreven worden, te zamen gelijk zijnde aan een gegeven vlak, dan zal dit punt in den omtrek van eenen in stelling gegevenen cirkel liggen.

bij elkander; dan zal men, (daar $p \times QE = q \times BC$ is,) verkrijgen:

$$p \times AA' + q \times BB' = (p + q) \times QQ'$$

dat bewezen moest worden.

Laten nu, na dit vooraf bewezen te hebben, Fig. 41, A, B, C, D, E, F, enz. dezelfde punten zijn, als in Fig. 39, met dit onderscheid, dat zij hier, als in hetzelfde vlak liggende, worden genomen, in het vlak dezer XY en XZ en men late, uit A, B, C, D, E, F, enz., loodlijnen op deze twee vlakken: AA', BB', enz. op XY en XZ.

Wanneer men dan, even gelijk in Fig. 39, geschied is, de punten A en B vereenigt en het punt Q zoodanig neemt, dat $AQ : QB = q : p$ zij; dan is volgens vergel. (V)

$$\left. \begin{aligned} (p+q) \times QQ' &= p \times AA' + q \times BB' \\ (p+q) \times QQ' &= p \times AA' + q \times BB' \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

Men vereenige de punten C en Q en deele de lijn CQ in R zoodanig, dat $QR : RC = r : p + q$ zij; dan zal, ingevolge vergelijking (V)

$$(p+q+r) \times RR' = (p+q) \times QQ' + r \times CC'$$

$$(p+q+r) \times RR' = (p+q) \times QQ' + r \times CC'$$

zijn: stelt men nu in deze voor $(p+q) \times QQ'$ en $(p+q) \times QQ'$ derzelver waarde, uit vergelijking (1); dan verkrijgt men:

$$\left. \begin{aligned} (p+q+r) \times RR' &= p \times AA' + q \times BB' + r \times CC' \\ (p+q+r) \times RR' &= p \times AA' + q \times BB' + r \times CC' \end{aligned} \right\} (2)$$

Men vereenige al verder de punten D en R en deele DR in S zoodanig, dat $RS : SD = s : p + q + r$ zij; dan is, SS' en SS' getrokken hebbende, volgens vergelijking (V),

$$(p +$$

$$(p+q+r+s) \times SS' = (p+q+r) \times RR' + s \times DD'$$

$(p+q+r+s) \times SS' = (p+q+r) \times RR' + s \times DD'$
 en wanneer men nu wederom in deze de waarden
 van $(p+q+r) \times RR'$ en $(p+q+r) \times RR'$,
 uit vergelijking (2), overbrengt; dan zal men
 hebben:

$$\left\{ \begin{array}{l} (p+q+r+s) \times SS' = p \times AA' + q \times BB' \\ \quad + r \times CC' + s \times DD' \end{array} \right. \quad (3)$$

Wanneer men, op deze wijze voortgaat, met
 de punten E, en S te vereenigen en ES in T
 zoodanig te verdeelen, dat $ET : TS = t : p+q+r+s$ is; voorts E en T te vereenigen en
 ET in U zoodanig te verdeelen, dat $TU : UF = u : p+q+r+s+t$ is enz. dan zal
 men eindelijk tot het laatste punt M komen, dat
 het middelpunt van den cirkel of van den bol is,
 welks omtrek of oppervlak de plaats der ge-
 vraagde punten is, en men zal dan hebben:

$$\left\{ \begin{array}{l} (p+q+r+s+t) \times TP' = p \times AA' + q \times BB' \\ \quad + r \times CC' + s \times DD' + t \times EE' \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (p+q+r+s+t+u) \times UU' = p \times AA' + q \times BB' \\ \quad + r \times CC' + s \times DD' + t \times EE' + u \times FF' \end{array} \right. \quad (5)$$

en, in het algemeen, zal de wet dezer vergelij-
 kingen, tot in het laatste punt M blijven voort-
 gaan, te weten, voor dat punt, zal

$$(p+q+r+enz.) \times MM' = p \times AA' + q \times BB' + r \times CC' + enz. (w)$$

$$(p+q+r+enz.) \times MM' = p \times AA' + q \times BB' + r \times CC' + enz. (u)$$

Nu is, wanneer men de figuur (Fig. 41.) oplettend beschouwt,

$$AA' = XA''; BB' = XB''; CC' = XC''; DD' = XD'', \\ EE' = XE''; QQ' = XQ'', RR' = XR''; SS' = XS'', \\ TT' = XF'', UU' = XU''; \text{enz. en } MM' = XM''.$$

$$AA' = XA'; BB' = XB'; CC' = XC'; DD' = XD'; \\ EE' = XE'; QQ' = XQ'; RR' = XR'; SS' = XS'; \\ TT' = XF'; UU' = XU'; \text{enz. en } MM' = XM'.$$

brengt men dan deze waarden in de vergelijkingen (1) (2) (3) (4), enz. (ω) over, zal men, dezelve oplofende, de waarden van XQ' en XQ'' van XR' en XR'' , van XS en XS'' enz. en in het algemeen, van XM' en XM'' vinden, te weten:

$$XM' = \frac{p \times XA' + q \times XB' + r \times XC' + s \times XD' + \text{enz.}}{p + q + r + s + \text{enz.}} \quad (\lambda)$$

$$XM'' = \frac{p \times XA'' + q \times XB'' + r \times XC'' + s \times XD'' + \text{enz.}}{p + q + r + s + \text{enz.}} \quad (\lambda')$$

en daar deze vergelijkingen altijd waarheid zullen blijven, hoedanig, waar en in welke rigting de onbepaalde lijnen XY en XZ worden aangenomen, volgt hier uit, om het middelpunt van den bol te vinden, deze constructie:

Men neme, (indien namelijk de gegevene punten $A, B, C, D, E, \text{enz.}$ in hetzelfde vlak gelegen zijn.) in dit vlak twee onbepaalde loodlijnen XY en XZ aan; men late, uit de gegevene punten $A, B, C, \text{enz.}$, de loodlijnen $AA', BB', CC', \text{enz.}$ AA'', BB'' en CC'' op dezelve vallen en bepale de punten M' en M'' , volgens de formules (λ) en (λ') . Wanneer men dan, door M' en M'' , evenwijdig aan XZ en XY , de lijnen $M'M$ en $M''M$ trekt, dan is het punt M , alwaar deze lijnen elkander snijden, het middelpunt van den cirkel of bol.

Het is, waar, de algemeene vergelijkingen (λ) en (λ') gelden voor het geval, dat de punten $A, B,$

B, C, D, *enz.* in hetzelfde vlak liggen: doch, wanneer de punten A, B, C, *enz.* in de ruimte verspreid liggen, dan zal men evenwel nog soortgelijke vergelijkingen, ter bepaling van het punt M, vinden. Laten, *Fig. 41.* XY, XZ en XW drie lijnen zijn, loodregt op elkander staande: men verbeelde drie vlakken, door deze lijnen gaande, te weten, de vlakken XYZ, XYW en XWZ. Laten de punten A, B, C, D, *enz.* alle boven het vlak XYZ gelegen zijn: indien men dan, uit deze punten, loodlijnen op dit vlak XYZ laat vallen, dan zullen deze loodlijnen dit vlak in even zoo vele punten ontmoeten, die de projectien der gegevene punten zullen zijn. Laten die projectien door de punten A, B, C, *enz.*, worden afgebeeld; dan zal men de projectie van het punt M, door middel van de formules (λ) en (λ'), kunnen vinden. Indien men dan verder de gegevene punten A, B, C, D, *enz.* op één der twee andere vlakken, bij voorb. het vlak XYW projecteert en deze projectien op dezelfde wijze als de eerste behandelt, dan zal men, op de lijn XW, de punten A'', B'', C'', D'', *enz.* Q'', R'', S'', *enz.* M'' (onnoodig in de figuur aan te wijzen,) verkrijgen en men zal, om het punt M'' te bepalen, nog hebben de derde vergelijking

$$XM'' = \frac{p \times XA'' + q \times XB'' + r \times XC'' + s \times XD'' + \text{enz.}}{p + q + r + s + \text{enz.}} (\lambda'')$$

Bij aldien men dan drie asen, XY, XZ en XW, aanneemt, en door deze asen drie vlakken XYZ, XWZ, XWY laat gaan en de afstanden der punten A, B, C, D, *enz.* tot die vlakken neemt, dan zullen de afstanden dezer punten tot het vlak XZW zijn;

$$XA', XB', XC', XD', \text{enz.}$$

de afstanden van die punten tot het vlak XWY,

$$XA'', XB'', XC'', XD'', \text{enz.}$$

H

ea

en de afstanden van deze punten tot het vlak XYZ, de lijnen

$$XA'', XB'', XC'', XD'', \text{ enz.}$$

deze afstanden dan bekend hebbende, zullen de punten M' , M'' en M''' , door de vergelijkingen (λ) , (λ') en (λ'') , het zij door dadelijke constructie, het zij door berekening gevonden worden. Men late dan, door de punten M' , M'' en M''' , drie vlakken, evenwijdig aan WXZ, XWY en XYZ gaan; waar nu deze vlakken elkander snijden, daar ligt het punt M; of, nog beter: men trekke in het vlak XYZ, door M' en M'' twee lijnen, evenwijdig aan XZ en XY. Uit het punt, alwaar deze lijnen elkander snijden, (en dat in de figuur door M is aangewezen,) rigte men eene loodlijn op het vlak XYZ op; en dan zal het uiteinde dezer loodlijn, gelijk gemaakt zijnde aan XM''' , het begeerde punt M, dat is, het middelpunt van den begeerden bol zijn.

V AANMERKING. Wat aubelangt de constructie of bepaling van de waarde van PM, deze kan op eene eenvoudiger wijze, dan door de vergelijking (N), gevonden worden. Indien $PM = 0$ gesteld wordt, dan verandert de vergelijking (M) in

$$p \times AM^2 + q \times BM^2 + r \times CM^2 + s \times DM^2 + \dots + z \times EM^2 + \text{enz} =$$

$$\frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \frac{(p+q)r}{p+q+r} \times CQ^2 + \frac{(p+q+r)s}{p+q+r+s} \times DR^2 + \text{enz.}$$

Indien men dan, voor $\frac{pq}{p+q} \times AB^2 + \text{enz.}$ deze waarde in de vergelijking (M) overbrengt, dan heeft men deze waarlijk fraaije vergelijking:

$$p \times AP^2 + q \times BP^2 + r \times CP^2 + s \times DP^2 + \text{enz.} =$$

$$p \times AM^2 + q \times BM^2 + r \times CM^2 + s \times DM^2 + \text{enz.}$$

$$+ (p + q + r + s + \text{enz.}) \times PM^2 = R$$

Uit

Uit welke dan volgt:

$$PM^2 = \frac{R - (p \times AM^2 + q \times BM^2 + r \times CM^2 + s \times DM^2 + \text{enz.})}{p + q + r + s + \text{enz.}}$$

welke gemakkelijker dan de vergelijking (N) kan geconstrueerd worden.

VI AANMERKING. Het is opmerkelijk, dat de vergelijkingen (λ) , (λ') en (λ'') , waardoor het middelpunt van den cirkel of bol bepaald wordt, dezelfde zijn, als door welke men, in de *Statica*, of *Evenwichtsl eer*, het middelpunt van zwaarte bepaalt van lichamen, welke in de ge-
gevene punten A, B, C, D, enz. geplaatst zijn, en welker gewigten respectievelijk gelijk of evenredig zijn aan de coëfficiënten $p, q, r, s, t, \text{enz.}$, waarmede, in ons werkstuk, de vierkanten $AP^2, BP^2, CP^2, DP^2, \text{enz.}$ vermenigvuldigd worden. Het middelpunt van den bol, wiens oppervlak de plaats der punten is, welke de som der vlakken $p \times AP^2 + q \times BP^2 + \text{enz.} = R =$ eene standvastige grootheid maakt, is dus het zwaartepunt van lichamen, in de punten A, B, C, D, enz. geplaatst en respectievelijk in gewigt aan de coëfficiënten $p, q, r, s, \text{enz.}$ evenredig zijnde.

VII AANMERKING. Wanneer men de coëfficiënten $p = q = r = s = t = \text{enz.}$ alle $= 1$ stelt; dan worden ook alle vergelijkingen, welke de algemeene oplossing van het werkstuk ons heeft leeren kennen, eenvoudiger. De vergelijking (M) wordt als dan:

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 + EP^2 + \text{enz.} = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} CQ^2 + \frac{1}{2} DR^2 + \frac{1}{2} ES^2 + \text{enz.} + n PM^2 = R$$

(zijnde hier n het aantal der geveene punten.)

De vergelijkingen (λ) , (λ') en (λ'') , waardoor het middelpunt van den bol gevonden wordt, worden nu deze meer eenvoudiger,

$$XM' = \frac{1}{n} (XA' + XB' + XC' + XD' + \text{enz.})$$

$$XM' = \frac{1}{n} (XA' + XB' + XC' + XD' + \text{enz.})$$

$$XM'' = \frac{1}{n} (XA'' + XB'' + XC'' + XD'' + \text{enz.})$$

en eindelijk wordt

$$PM^2 = \frac{1}{n} [R - (AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 + \text{enz.})]$$

VIII AANMERKING. Wanneer alle de coëfficiënten gelijk zijn; dan wordt M het zwaartepunt van gelijke gewigten, welke in de punten A, B, C, D, E, *enz.* geplaatst zijn, of wel dat punt, hetwelk CARNOT het *middelpunt van middelbare afstanden* noemt. (Men raadplege over dit punt onze *Meetkundige Analyse*, XLVII *Vraagstuk*, §. 220 *en verv.*) en nu wordt de duisterheid van het IV *Voorstel*, in de noot van *Bladz. 356* van MONTUCLA's *Historie der Wiskunde* I *Deel*, IV *Boek*, door den Heer STRABBE vertaald, (en welke de vertaler, na alle aangewende moeite, niet had kunnen ophelderen, waarom hij deskundigen tot het mededeelen van deze opheldering uitnoodigt,) geheel uit den weg geruimd. Na dat men, in de 28 *Figuur*, *Plaat III* van de *Historie der Wiskunde*, eene loodlijn PQ op NO getrokken heeft, moet dit vierde *Voorstel* van MONTUCLA aldus gelezen worden: „ In „ dien, uit zoo vele punten, als men begeert, tot „ een punt R (*Fig. 28.* van de *Historie der Wiskunde*,) even zoo vele lijnen getrokken worden „ en dat de som van de vierkanten van die lijnen onveranderlijk zij, dan zijn het punt R en „ alle overëenkomstige punten gelegen in eenen cirkel, waarvan men het middelpunt op deze „ wijze bepalen kan. Laat A, B, C, D, E en „ F

„ F de gegevene punten zijn; wij zullen er zes
 „ onderstellen. Hebbende de lijn NO getrokken,
 „ die alle deze punten aan eene zijde laat, zoo
 „ laat de perpendicularen AG, BH, enz. ge-
 „ trokken worden, en GT gelijk aan het zesde-
 „ deel der lijnen GH, GI, GK, GL en GM
 „ genomen worden, voorts trekke men de lood-
 „ lijn PQ” (*hier maak ik duideljksholve deze*
verandering,) „ zoodanig, dat NP gelijk zij aan
 „ een-zesde van de som der lijnen AG, BH,
 „ CL, DK, EL en FM; dan zal Q het mid-
 „ delpunt des cirkels zijn, en zijn straal QR
 „ zoodanig” (*hier maak ik nog deze verande-*
ring,) „ dat $QR^2 + AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 +$
 „ $DQ^2 + EQ^2 + FQ^2 = AR^2 + BR^2 + CR^2 +$
 „ $DR^2 + ER^2 + FR^2$ zij.” — Men raadplege
 verder het XLVII *Vraagstuk* onzer *Meetkundige*
Analys.

Nº. 59. Door

JACOB DE GELDER, en P. van Eeghen, Chz.

Eene der fraaiste en nuttigste eigenschappen van het metrieke stelsel van Maten en Gewigten bestaat daarin, dat, wanneer men de naauwkeurige lengte van den stoffelijken meter bezit, men alle vlakte- en inhoudsmaten, als mede de gewigten door dezelve bepalen kan; een voordeel, hetwelk geen ander der oude stelsels, welke de onregelmatigheid en willekeur ten grondslage schijnen gehad te hebben, bezitten.

In het metrieke stelsel, is de Gramme het gewigt van zuiver gedistilleerd water, bevat in eenen cubieken centimeter, dat is, in eenen cubus, wiens zijde het honderste gedeelte van den meter uitmaakt, en wel, onder de voorwaarde, dat dit zuiver gedistilleerd water gebragt zij tot deszelfs maximum van digtheid, hetwelk het

water dan bezit, wanneer het de temperatuur van $39\frac{1}{4}$ graad van den thermometer van FAHRENHEIT verkregen heeft. Nu heeft de cubieke decimeter, (dat is de cubus, welke een-tiende van eenen meter tot zijde heeft,) den inhoud van *duizend* cubieke centimeters; indien dan zulk een cubieke decimeter met zuiver gedistilleerd water, gebragt tot het maximum van digtheid, gevuld is, dan weegt dit water *duizend grammes*, dat is, (naar de aangenomene wijze van de namen der maten en gewigten zamen te stellen,) *een kilogramme*.

Men bemerkt hieruit ligtelijk, dat men zelf het gewigt, dat men kilogramme noemt, maken kan; want, wanneer men eenen zuiver bewerkten cubieken bak gemaakt heeft, wiens zijde binnenwerks eenen decimeter houdt, en men vult dien bak met zuiver gedistilleerd water, tot de temperatuur van $39\frac{1}{4}$ graden gebragt, dan zal men een gewigt, het zij uit lood, ijzer, koper of eene andere zelfstandigheid aan het gewigt van dit water kunnen gelijk maken, (*) en men zal alzoo een model van het gewigt, dat men kilogramme noemt, kunnen daarstellen; ja, nog meer! wanneer men tafels van de specifieke gewigten der onderscheidene natuurkundige zelfstandigheden heeft, hoedanige bij BRISSON, PRONY en anderen voorkomen, dan zal men kunnen berekenen, hoe de afmetingen van een ligchaam van eene gegevene figuur moeten genomen worden, op dat dit ligchaam, uit zulk of zulk eene stof vervaardigd, een gewigt van eene gegevene en bepaalde grootte hebbe.

Het

(*) Zulks vereischt nogtans veel omzigtigheid, en het in acht nemen van vele natuurkundige omstandigheden, welke wij, daar ons oogmerk alleen is, om een denkbeeld te geven, hoe men zelf zijne gewigten maken kan, met stilzwijgen voorbijgaan.

Het *specifieke* of *soortonderscheidelijk* gewigt, (*pondus specificum*) ten onrechte *soortonderscheidelijke zwaarte* (*gravitas specifica*) genoemd, is de evenredigheid der gewigten van twee lichamen, welke dezelfde uitgebreidheid of hetzelfde *volumen* hebben: wanneer dus twee cubieken duimen van twee onderscheidene stoffen, de eene 3 oncen en de andere 5 oncen weegt, dan is het specifieke gewigt van de tweede ten opzichte van de eerste $\frac{5}{3}$ of $1\frac{2}{3}$. De Natuurkundigen vergelijken nu de specifieke gewigten, van alle zelfstandigheden, met het zuiver gedistilleerd water, en stellen, hij voorbeeld, (omdat men in dezen niet met het volstrekte gewigt te doen heeft,) het gewigt van eenen cubieken duim, cubieken decimeter waters (wij nemen hier den laatsten,) gelijk aan de éénheid, en drukken de gewigten van den cubieken decimeter, van zekere zelfstandigheid in getal van die éénheden uit, welke getallen de Natuurkundigen door proeven bepalen. Wanneer men dan zegt: *het specifieke gewigt van het geel koper is 8,39652*, wil zulks zeggen: *een cubieke duim, decimeter, enz. van geel koper, weegt 8,39652 maal zwaarder dan een cubieke duim, decimeter, enz. zuiver gedistilleerd water*, en wanneer men den inhoud van zulk een ligchaam door het getal, hetwelk deszelfs specifieke gewigt uitdrukt, vermenigvuldigt; dan verkrijgt men altijd het gewigt van dit ligchaam, uitgedrukt in het gewigt van het zuiver gedistilleerd water, bevat in de cubieke éénheid, in welke de inhoud van dit ligchaam is uitgedrukt. Bij voorbeeld eene massa geel koper hebbe de inhoud van 3,73 cubieke decimeters; dan weegt die massa aan zuiver water, (omdat een cubieke decimeter een kilogramme weegt,) 3,73 kilogrammes, vermenigvuldigt men nu dit gewigt met 8,39652; dan verkrijgt men, voor het gewigt van die massa geel koper, 31,319 kilogrammes, enz.

Door deze voorloopige verklaring, wordt de oplossing van het Vraagstuk gemakkelijk: stel de middellijn van den gevraagden cilinder $= ax$ decimeters, deszelfs hoogte $= bx$ decimeters; (nemende namelijk voor 2 $= a$, en voor 3 $= b$,) stel de proportie van den omtrek eens cirkels tot zijne middellijn $= \pi$; dan is de omtrek van de basis des cilinders $= \pi ax$ en de inhoud van de basis $\frac{1}{4} \pi a^2 x^2$. Vermenigvuldigt men dien inhoud met de hoogte bx , dan verkrijgt men, voor den inhoud van den cilinder $\frac{1}{4} \pi a^2 bx^3$; die inhoud moet met het specifieke gewigt van het geel koper, dat is met $g = 8,39652$, vermenigvuldigd worden, en dan heeft men, omdat de inhoud des cilinders in cubieke decimeters bepaald is, het gewigt in kilogrammes; daar nu, volgens de vraag, het gewigt van dien cilinder *één* kilogramme zijn moet, en bijgevolg gegeven is, zoo zullen wij, dit gewigt algemeen $= n$ kilogrammes stellende, hebben de vergelijking:

$$\frac{1}{4} \pi g a^2 b x^3 = n$$

divideert men deze vergelijking door $\frac{1}{4} \pi g a^2 b$, dan is:

$$x^3 = \frac{4n}{\pi g a^2 b} = \frac{8n}{2\pi g a^2 b}$$

waaruit dan eindelijk volgt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{8n}{2\pi g a^2 b}}, ax = 2a \sqrt[3]{\frac{n}{2\pi g a^2 b}}, \text{ en } bx = 2b \sqrt[3]{\frac{n}{2\pi g a^2 b}}.$$

Wanneer nu n in kilogrammes, dat is in cubieke decimeters waters gegeven is, zoo is natuurlijk de *éénheid*, in welke, bij de berekening in getallen, x , ax en bx zal gevonden worden, een decimeter en deelen van denzelfden; doch indien men verkoos n in grammes of in milligrammes uit te drukken; dan zou men de afmetingen des cilinders in decimeters of millimeters vinden.

In

In ons voorbeeld, is $g = 8,39652$, $a = 2$,
 $b = 3$, $\pi = 3,14159265$ en $n = 1$; derhal-
 ve $2a^2b = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ en $x =$

$\frac{2}{\sqrt[3]{24\pi g}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi g}}$, welke waarde nu door de Loga-
 rithmen het gemakkelijkt aldus berekend wordt.

$$\text{Log. } 3 = 0,4771212$$

$$\text{Log. } \pi = 0,4971499$$

$$\text{Log. } g = 0,9240993$$

$$1,8983704$$

$$3) \text{-----}$$

$$\text{Log. } \sqrt[3]{3\pi g} = 0,6327901$$

$$\text{of Log. } \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi g}} = 9,3672099 = \text{Log. } x$$

$$x = 0,2329216 \text{ decimeters.}$$

$$\text{of } x = 23,29216 \text{ millimeters.}$$

$$2x = 46,58432 \text{ mill.}$$

$$3x = 69,87648 \text{ mill.}$$

Nº. 60. Door

*A. van der Swan, C. J. van Setten, C. J. van
 Brusfel, en P. van Eeghen, Chx.*

Stel de eerste term x , en het gemeen verschil y ,
 dan is

$$2 \ x = 2 \ x$$

$$3 \ (x + y) = 3 \ x + 3 \ y$$

$$4 \ (x + 2y) = 4 \ x + 8 \ y$$

$$5 \ (x + 3y) = 5 \ x + 15 \ y$$

$$6 \ (x + 4y) = 6 \ x + 24 \ y$$

$$\text{dus } 20 \ x + 50 \ y = 360$$

$$\text{of } 2 \ x + 5 \ y = 36$$

$$\text{H } 5$$

voorts

$$\text{voorts } \frac{4x + 8y}{2x} = 2 + 4 \frac{y}{x} = 10$$

$$\text{of } 4 \frac{y}{x} = 8 \text{ en } y = 2x$$

$$\text{dus } 2x + 5y = 12x = 36$$

$$\text{dus } x = 3 \text{ en } y = 6$$

en de reeks 3, 9, 15, 21, 27

Nº. 61. Door

U. HUGUENIN, J. R. Schmidt, C. J. van
Brusfel, en P. van Eeghen, Chx.

1º. Laten de vier middelpunten der zijden, E, F, G en H, des onregelmatigen vierhoeks ABCD (*Fig. 42.*) door rechte lijnen verëenigd en de hoekpuntslijnen AC en BD getrokken zijn. Daar dan $AE = BE$ en $BF = FC$ is, (veronderstelling) zoo is, in den driehoek ABC, $AE : BE = CF : BF$, en EF is evenwijdig met AC; (*Beginfelen der Meetkunst*, door J. DE GELDER, §. 239.) mitsdien zijn de driehoeken EFB en ACB gelijkvormig en $EF : AC = EB : AB$; maar $EB = \frac{1}{2} AB$ (veronderstelling) daarom $EF = \frac{1}{2} AC$.

Daar men, op gelijke wijze, kan aantoonen: dat GH evenwijdig met AC en $= \frac{1}{2} AC$ is, zoo volgt: dat EF en HG evenwijdig en elk gelijk aan de helft der hoekpuntslijn AC zijn.

Even zoo kan men bewijzen: dat FG en EH evenwijdig met de hoekpuntslijn BD zijn en de helft van hare lengte hebben: waaruit volgt: dat EFGH een parallelogram is.

Voorts is (*Beginfelen der Meetkunst*, enz. §. 268.) $\triangle EBF : \triangle ABC = BE^2 : AB^2$ (of $4 BE^2$) $= 1 : 4$; alzoo $\triangle EBF = \frac{1}{4} \triangle ABC$, en, op gelijke wijze, $\triangle GDH = \frac{1}{4} \triangle ADC$; dierhalve $\triangle EBF + \triangle GDH = \frac{1}{4}$ vierhoek ABCD. Op

ge

gelijke wijze, vindt men: $\triangle FCG + \triangle EAH = \frac{1}{2}$ vierhoek ABCD; waaruit volgt: dat $\triangle EBF + \triangle GDH + \triangle FCG + \triangle EAH = \frac{1}{2}$ vierhoek ABCD is; welke beide leden dezer vergelijking van den geheelen vierhoek afgetrokken zijnde, geven zal: $\text{parallelogram } EFGH = \frac{1}{2}$ vierhoek ABCD.

2°. Men stelde, dat I en K de middelpunten der hoekpuntslijnen AC en BD zijn, uit welke men de lijnen IE, IF, IG, IK en KE, KF, KG en KH getrokken hebbe: alsdan is, in den driehoek AEC, (wegens $AI = IC$ en $BK = KD$) $AE : EC = AI : IC$; daarom is EI evenwijdig met AC; en, in den driehoek BCD, is $DC : CB = DB : BK$, dus ook GK evenwijdig met BC; waaruit volgt: dat, (zoo als in n°. 1.) EI en KG evenwijdig en $= \frac{1}{2} AC$ zijn.

In $\triangle ACD$, is $CG : GD = CI : AI$; gevolglijk zijn IG en AD evenwijdig, en, in $\triangle ABD$, is $BE : AE = BK : KD$, daarom is ook EK evenwijdig met AD: waaruit volgt, even zoo als in n°. 1, dat IG en EK evenwijdig en $= \frac{1}{2} AD$ zijn. Mitsdien is EIGK een parallelogram, hetwelk IK tot hoekpuntslijn heeft.

Doordien men, op gelijke wijze, aantoot, dat IF en KH evenwijdig met AB en $= \frac{1}{2} AB$ zijn, gelijk mede, dat IH, zoo als ook FK, evenwijdig met CD en $= \frac{1}{2} CD$ is, zoo is ook IFKH een parallelogram, hetwelk den afstand, IK, van de middelpunten der hoekpuntslijnen AC en BD, tot hoekpuntslijn heeft: dierhalven hebben de parallelogrammen EIGK en IFKH de gemeenschappelijke hoekpuntslijn IK.

3°. Daar de hoekpuntslijnen eens parallelograms elkander midden door deelen, (*Beginf. der Meetkunst*, §. 170.) zoo zullen; in het parallelogram EIGK, de hoekpuntslijnen EG en IK zich in één punt snijden, zoodanig, dat $IL = LK$ is; maar hetzelfde heeft ook plaats met de hoekpuntslijnen
 FH

FH en IK in het parallellogram IFKH: dierhalve snijden de hoekpuntslijnen EG en FH, der parallellogrammen ELGH en IFKH (welke tevens hoekpuntslijnen des eersten parallellograms EFGH zijn) de gemeenschappelijke hoekpuntslijn IK in derzelve middelpunt L.

Om eindelijk nog aan te toonen, dat het punt L het middelpunt der middelbare afstanden van de hoekpunten des vierhoeks ABCD is, moet bewezen worden: dat, als men, uit de hoekpunten A, B, C, D des vierhoeks en uit het punt L, de loodlijnen Aa, Bb, Cc, Dd en Ll op eene willekeurige getrokken rechte lijn MN vallen laat, de loodlijn $Ll = \frac{1}{4} (Aa + Bb + Cc + Dd)$ wezen zal.

Men trekke Ee en Gg loodrecht op MN, zoo is $Ee = \frac{1}{2} (Aa + Bb)$: want zoo men Ab' evenwijdig trekt met MN, snijdt deze lijn Ee in e'; en doordien Ee en Bb evenwijdig zijn, zijn de driehoeken EAe' en BAb' gelijkvormig; maar $AE = \frac{1}{2} AB$, alzoo ook $Ee' = \frac{1}{2} Bb'$. Addeert men hier bij $e'e = \frac{1}{2} (Aa + b'b)$, wijl $Aa = e'e = b'b$ is, zoo heeft men $Ee' + e'e = \frac{1}{2} (Aa + b'b + Bb')$, dat is: $Ee = \frac{1}{2} (Aa + Bb)$.

Op gelijke wijze betoogt men: dat $Gg = \frac{1}{2} (Cc + Dd)$ is; maar, volgens het voorgaande, $EL = LG$ zijnde, zoo is, op gelijke gronden, $Ll = \frac{1}{2} (Ee + Gg)$; of, hier in de waardijen van Ee en Gg stellende, heeft men $Ll = \frac{1}{4} (Aa + Bb + Cc + Dd)$; het welke men moest bewijzen.

I. AANMERKING. Het middelpunt der middelbare afstanden, heeft ook de eigenschap, dat, indien men door hetzelfde eene willekeurige lijn M'N' trekt, en daarop de loodlijnen Aa'', Bb'', Cc'' en Dd'' vallen laat, dan de som der loodlijnen, aan de ééne zijde, gelijk de som der loodlijnen aan de andere zijde der lijn M'N' wezen zal; namelijk $Aa'' + Dd'' = Bb'' + Cc''$.

Dit

Dit volgt onmiddellijk uit $Ll = \frac{1}{4} (Aa + Bb + Cc + Dd)$; want stelt men $M'N'$ evenwijdig met MN , (hetwelk geschieden kan, doordien de rigting van MN naar believen aangenomen is,) en subtraheert men deze uitdrukking van $Ll = \frac{1}{4} (aa' + bb' + cc' + dd')$, zoo heeft men $0 = \frac{1}{4} (Aa' - Bb' - Cc' + Dd')$; en hier uit volgt: $Aa' + Dd' = Bb' + Cc'$.

II. AANMERKING. Als men onze figuur met eenige opmerkzaamheid beschouwt, zal men in dezelve nog verscheide andere parallelogrammen ontdekken; als, bij voorbeeld, het middelste parallelogram $PIQK$, waarvan IK al mede een diagonaal is, en de parallelogrammen $BEIF$, $AEKH$, $FKGC$, $GIHD$, enz. welke op de helften van de zijden des vierhoeks staan. Voorts is het ook gemakkelijk te bewijzen: dat de som der vier parallelogrammen $BEIF + AEKH + FKGC + GIHD =$ vierhoek $ABCD$ is: want, daar men ligtelijk kan aantoonen: dat $\triangle QKG = \triangle PIE$ en $\triangle IQF = \triangle KPH$ is, zoo addere men bij $BEIF + EPHA + FQGC + HKGD + IPKQ = BEIF + EPHA + FQGC + HKGD + IPKQ$, de vergelijking $\triangle IEP + \triangle PHK + \triangle KQG + \triangle IQF = \triangle PHK + \triangle KQG + \triangle KQG + \triangle PHK$, waardoor men dan verkrijgt: vierhoek $ABCD = BEIF + EKHA + FKGC + GIHD$.

Bovendien kan men ligtelijk bewijzen: dat de onregelmatige vierhoeken $AEIH$ en $IFCG$ aan elkanderen gelijk en gelijkvormig met den vierhoek $ABCD$ zijn; en daar voorts de zijden van deze kleine vierhoeken de helft van de lengte des grooten vierhoeks hebben, zoo is de inhoud van elk derzelve $= \frac{1}{4}$ inhoud des grooten vierhoeks; en alzoo is $AEIH + IFCG = \frac{1}{2} ABCD$, hetwelk afgetrokken zijnde van $ABCD = ABCD$ eindelijk geven zal: $BEIF + HIGD = \frac{1}{2} ABCD$; maar, daar het insgelijks zoo gemakkelijk te bewijzen is, dat de

de vierhoeken BEKF en KHDG aan elkanderen gelijk en gelijkvormig met den vierhoek ABCD zijn, en $\frac{1}{2}$ van zijn inhoud hebben, zoo is ook $BEKF + KHDG = \frac{1}{2} ABCD$; en hier uit volgt: dat ook de som der beide parallelogrammen $EAHK + FKGC = \frac{1}{2} ABCD$ wezen zal; namelijk gelijk aan de helft van den vierhoek.

Nº. 62. Door

U. HUGUENIN, *P. van Eeghen, Chz., en C. J. van Brussel.*

Daar (*Fig. 43.*) de hoek $ABC = BCD = 90^\circ$ is, en AB, BC en CD gegeven zijn, zoo is AD dadelijk bekend: want AB verlengd, en DG loodrecht daarop getrokken hebbende, is $DG = BC$, $AG = AB + CD$ en $AD = \sqrt{BC^2 + AG^2}$ eene bekende grootheid. Men stelde dezelve $= a$ en neme voorts aan, dat AE en DF de gezogte evenwijdige lijnen zijn, dan moet de uit A op DF getrokken loodlijn AF eene gegevene lengte $= b$ hebben. Stelt men nu de onbekende hoek $ADF = \phi$ en de $\text{Sin. } 90^\circ = 1$, zoo is $AF = a \text{ Sin. } \phi = b$; dierhalven is $\text{Sin. } \phi = \frac{b}{a}$ bekend; en daar ϕ en $180^\circ - \phi$ dezelfde sinus hebben, zoo is het tweede antwoord der vraag $\text{Sin. } (180^\circ - \phi) = \frac{b}{a}$.

Dit ongemeen eenvoudig Voorstel, hetwelk eigenlijk niets anders is, dan, uit twee in stand gegevene punten A en D, twee evenwijdige lijnen AE en DF te trekken, welke eenen gegevenen afstand hebben, heb ik van de Heer HAHN ontleend, (zie zijne *vollständige Anleitung zur niedern und höhern Mathematick, Zweiter Band, §. 705.*) met oogmerk, om aan te toonen, hoe noodzakelijk het

het zij, alle de omstandigheden eens Voorstels behoorlijk te overwegen, eer men tot de oplossing van hetzelfde overgaat, als men niet op wijdloopige eindvergelijkingen vervallen wil, zoo als het geval is bij die, welke de Heer HAHN van dit Voorstel gegeven heeft.

Hij neemt namelijk bij zijne ontbinding $AH = x$ als onbekende aan; zoo men nu $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ en de op AE getrokken loodregte $HI = d$ stelt, verkrijgt men, door middel van de gelijkvormigheid der driehoeken AHI en HDG, de ingewikkelde eindvergelijking:

$$x = \frac{(a+c)d^2}{b^2 - d^2} \pm \sqrt{\left(\frac{(b^2 + (a+c)^2)d^2}{b^2 - d^2} + \frac{(a+c)^2 d^4}{(b^2 - d^2)^2}\right)};$$

welke even zoo min voor de berekening, als voor de constructie, gunstig uitgevallen is: ook zegt de schrijver zelf, in eene noot, dat de constructie zijner eindvergelijking niet te vergelijken zoude zijn; met de eenvoudige meetkundige ontbinding, welke hij van dit Voorstel er bij gevoegd heeft. Dat éene diergelijke omstandigheid bij vele algebraïsche oplossingen plaats heeft, is bekend; dan, dit sluit geenzins in zich, dat men, door de Algebra, niet even zulke sierlijke en eenvoudige ontbindingen zoude kunnen vinden, als door de Meetkunst; wanneer men slechts vooraf den weg konde bepalen, welke men, bij de ontbinding eens Voorstels, tot dit einde behoorde in te slaan.

De hier gegeven oplossing, moge ter bekrachtiging van dit gevoelen verstrekken: terwijl de

gevondene eindvergelijking, $\sin. \phi = \frac{b}{a}$, de door

den Heer HAHN gegevene meetkundige ontbinding zelve in zich besluit: want, daar deze vergelijking uit de proportie $a : b = 1 : \sin. \phi$ ontstaan is, welke tot eenen regthoekigen driehoek behoort, van welke $AD = a$ de hypothenusa is, heeft men slechts op AD, als middellijn, eenen

cir-

cirkel te beschrijven; van A in den omtrek den gegebenen afstand $AF = b$ uit te zetten en de lijn FD te trekken, zoo is de hoek AFD regt: trekt men voorts AE evenwijdig met FD, zoo zullen deze beide lijnen het Voorstel beantwoorden.

Om het tweede antwoord te verkrijgen, make men de hoek $ADf = 180^\circ - \varphi$; verleng fD tot den omtrek in F' en trekke AE' evenwijdig met DF' ; zoo zullen deze de evenwijdige lijnen voor het tweede antwoord zijn: want zoo men AD naar d verlengt, is hoek $ADF' = dDf = 180^\circ - ADf = \varphi = ADF$, en doordien AFD regt is, zijn de driehoeken $AF'D$ en AFD gelijk en gelijkvormig, en dus is $AF' = AF = b$ de begeerde afstand der evenwijdige lijnen DF en AE' .

AANMERKING. Bij de voorgaande ontbinding is aangenomen, dat AD vooraf moet berekend worden: dit is echter niet volstrekt noodzakelijk; want, stelt men $AG = a$, $BC = DG = b$ en

$AF = d$, zoo is $Tang. DAG = \frac{b}{a}$ bekend, en alzoo ook hoek DAG, die ik $= \alpha$ stel: diensvol-

gens is $AD = \frac{DG}{\sin. \alpha} = \frac{b}{\sin. \alpha}$, en als men, zoo als boven, de onbekende hoek $ADF = \varphi$ aanneemt, is $AD = \frac{AF}{\sin. \varphi} = \frac{d}{\sin. \varphi} = \frac{b}{\sin. \varphi}$;

waaruit men $\sin. \varphi = \frac{d \sin. \alpha}{b}$ vindt: eene vergelijking, die gemakkelijk te berekenen is; doch waarvan de constructie niet zoo in 't oog valt, als bij de voorgaande ontbinding; ten zij men in

dezelve AD voor $\frac{b}{\sin. \alpha}$ substitueere; waardoor

men $\sin. \varphi = \frac{d}{AD} = \frac{AF}{AD}$ verkrijgt, zoo als hier boven gevonden is. De eerste dezer vergelijkingen dient

dient alzoo, om ϕ zonder AD (welke men, door een kwadraat-worteltrekking, vindt,) te berekenen, en de tweede geeft de hier boven opgegevene meetkundige constructie.

Men kan ook dadelijk DF, door eene eenvoudige kwadraat-worteltrekking, vinden; omdat $DF = \sqrt{(AD^2 - AF^2)} = \sqrt{(BC^2 + AG^2 - AF^2)}$ alleen uit bekende grootheden bestaat: heeft men dus AD getrokken, zoo kan men, met de gegevene AF en de berekende DF, den regthoekigen driehoek AFD construeren en daarna AE met DF parallel trekken.

Neemt men eene andere grootheid voor onbekende aan, zoo schijnt het onvermijdelijk, dat men op eene meer ingewikkelde vergelijking vervallen moet: wij zullen, tot een voorbeeld, den onbekenden hoek $DHG = \phi$ stellen, en voorts de bekende grootheden, in de aanmerking gebruikt, behouden; dan is, in den regthoekigen driehoek DHG, $HG = DG \times \text{Cot. } \phi = b \text{ Cot. } \phi$; alzoo $AH = a - b \text{ Cot. } \phi$, en in den regthoekigen

driehoek HIA, $AH = \frac{HI}{\text{Sin. } \phi} = \frac{AF}{\text{Sin. } \phi} = \frac{d}{\text{Sin. } \phi}$;

dierhalve moet $a - b \text{ Cot. } \phi = \frac{d}{\text{Sin. } \phi}$, of $\text{Sin. } \phi -$

$\frac{b}{a} \text{Cos. } \phi = \frac{d}{a}$ zijn. Wanneer men nu $\text{Sin. } \phi$ of $\text{Cos. } \phi$ zoeken wil, klimt deze vergelijking tot eene volkomene tweede-magts-vergelijking op; dan, wanneer men in dezelve (zie noot op *Bladz.*

83 hier boven,) voor het gebroken $\frac{b}{a}$ aanneemt

$\text{Tang. } \alpha = \frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \alpha}$; dan verkrijgt men: $\text{Sin. } \phi \times$

$\text{Cos. } \alpha - \text{Sin. } \alpha \times \text{Cos. } \phi = \frac{d \text{Cos. } \alpha}{a} = \frac{d \text{Sin. } \alpha}{b}$;

(wijl $a = \frac{b}{\text{Tang. } \alpha} = \frac{b \text{Cos. } \alpha}{\text{Sin. } \alpha}$ is,) namelijk Sin.

$$\sin. (\varphi - \alpha) = \frac{d \sin. \alpha}{b} \text{ voor den eenen, en}$$

$$\sin. (180^\circ - (\varphi - \alpha)) = \frac{d \sin. \alpha}{b} \text{ voor den}$$

anderen wortel. Daar nu hoek $ADH = DHG - DAH = \varphi - \alpha$ is, zoo is $\sin. ADH = \frac{d \sin. \alpha}{b} = \frac{AF}{AD}$ de eene; $\sin. ADf = \frac{d \sin. \alpha}{b}$

de andere wortel; welke vergelijkingen met de eerst gevonden overëenkomen.

Offchoon men langs dezen weg tot het zelfde besluit gekomen is, zoo is zulks echter op eene omslachtiger wijze geschied, en de beginners kunnen hier uit afleiden, dat, hoe zeer men ook door eene der onbekende functien eenes voorstels, tot de ontbinding van hetzelfde komen kan, het echter geenzins onverschillig is, welke der onbekenden men het eerste zoekt: daar meendeels de eene onbekende, op eene veel eenvoudiger wijze, dan de andere, van de bekende grootheden afhangt: eene waarheid, die men niet te veel den beginnenden kan aanraden, van in het oog te houden; ook heb ik alleenlijk, om deze reden, dit eenvoudig voorstel opgegeven.

N^o. 63. Door

U. HUGUENIN.

Men stelle, *Fig. 44.* de bekende, of waartenemen hoeken, $ADB = \alpha$, $BDE = \beta$, $BED = \gamma$ en $BEC = \delta$, en daar de ligging der drie punten A, B en C bekend is, zoo is ook $AB = a$, $BC = b$ en de hoek $ABC = B$ bekend. Was nu, buiten den reeds bekenden hoek DBE , nog een van de overige hoeken der figuur bekend, zoo zou men de figuur, zonder hulplijnen te trekken, kunnen construeren.

Wij

Wij zullen, tot dit einde, den hoek DAB zoeken en denzelven $= \phi$ stellen. Onze figuur een vijfhoek zijnde, zoo is de som zijner hoeken $DAB + ABC + BCE + CED + EDA = (2 \times 5 - 4) 90^\circ = 6 \times 90^\circ$ of 6 rechte hoeken; namelijk $\phi + B + BCE + \gamma + \delta + \theta + \alpha = 6 \times 90^\circ$, en dus is $BCE = 6 \times 90^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + B + \phi)$; of, indien men het bekende gedeelte van dezen hoek $6 \times 90^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + B) = \epsilon$ stelt, zoo is $BCE = \epsilon - \phi$.

In den driehoek DAB, heeft men: $\text{Sin. } \alpha : \text{Sin. } \phi = a : BD$; daarom $BD = \frac{a \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } \alpha}$; in den driehoek BEC, heeft men: $\text{Sin. } \delta : \text{Sin. } (\epsilon - \phi) = b : BE$; alzoo $BE = \frac{b \text{ Sin. } (\epsilon - \phi)}{\text{Sin. } \delta}$, en eindelijk heeft men, in den driehoek DBE: $\text{Sin. } \gamma : \text{Sin. } \beta = \frac{a \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } \alpha} : \frac{b \text{ Sin. } (\epsilon - \phi)}{\text{Sin. } \delta}$; waaruit de vergelijking $a \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \phi = b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } (\epsilon - \phi)$ ontstaat.

Daar voorts (de $\text{Sin. } 90^\circ = 1$ stellende, en alles door $\text{Sin. } \epsilon \text{ Sin. } \phi$ delende,) deze vergelijking verandert in: $\frac{a \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \delta}{\text{Sin. } \epsilon} = b \text{ Sin. } \alpha$

$\text{Sin. } \gamma \frac{\text{Cos. } \phi}{\text{Sin. } \phi} = b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \cdot \frac{\text{Cos. } \epsilon}{\text{Sin. } \epsilon} = b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Cot. } \phi = b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Cot. } \epsilon$,
zoo vindt men eindelijk:

$$\text{Cot. } \phi = \frac{a \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \delta}{b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \epsilon} + \text{Cot. } \epsilon.$$

Het eerste gedeelte dezer gevondene waarde laat zich gemakkelijk door de logarithmen berekenen; doch, men dient daar bij in 't oog te houden, dat de sinussen, welke in dezelve voorkomen, tot het stelsel van $\text{Sin. } 90^\circ = 1$ behooren.

Overigens valt op te merken, dat deze waarde negatief wordt, als $\varepsilon = 6 \times 90^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + B) > 90^\circ$ en $\frac{a \sin \beta \sin \delta}{\delta \sin \alpha \sin \gamma \sin \varepsilon} < \cot. \varepsilon$ is. Wanneer men aldus de hoek φ beoorlooflijk bepaald heeft, is de hoek $BCE = \varepsilon - \varphi$ bekend en de lijnen BD en BE laten zich door hare respectieve waardijen $\frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha}$ en $\frac{b \sin (\varepsilon - \varphi)}{\sin \delta}$ berekenen.

Om ons voorstel geometrisch te construeren, beschrijve men, zie *Fig. 45.* op AB, als basis, eenen gelijkbeenigen driehoek, wiens tophoek $APB = 2\alpha$ is, of, hetwelk op het zelfde uitkomt, waarvan elke hoek aan de basis $= 90^\circ - \alpha$ is. Uit P als middelpunt beschrijve men eenen cirkel, welks omtrek door de punten A en B gaat. Even zoo beschrijve men op BC eenen gelijkbeenigen driehoek, wiens tophoek $BQC = 2\delta$ of waarvan elke hoek aan de basis $= 90^\circ - \delta$ is en, uit het punt Q als middelpunt, beschrijve men eenen cirkel, welks omtrek door de punten B en C gaat. Vervolgens make men, in den eersten cirkel, den hoek $BPE' = 2\beta$; en, in den tweeden cirkel, den hoek $BQD' = 2\gamma$; (waarbij het somtijds kan gebeuren, dat één dezer hoeken verheven of grooter dan 180° wordt). Eindelijk trekke men de regte lijn $D'E'$, zoo zal deze den eersten cirkel in D, en den tweeden in E snijden; welke punten de gezochte standpunten zullen zijn.

Want, als men de lijnen AD, BD, BE en CE trekt, zal volgens eene bekende eigenschap des cirkels $ADB = \frac{1}{2} APB = \alpha$ en BDE' of $BDE = \frac{1}{2} BPE' = \beta$ zijn, en in den tweeden cirkel is $BEC = \frac{1}{2} BQC = \delta$ en BED of $BED' = \frac{1}{2} BQD' = \gamma$; diensvolgens zijn D en E de gezochte standpunten.

Uit

Uit dit voorstel laten zich eenige gevolgen afleiden, welke verdienen opgemerkt te worden.

1°. Naar mate (*Fig. 44.*) het standpunt E de verlenging van de lijn BC nadert, neemt de hoek $BEC = \delta$ af, en wordt $= 0$, als E in de verlenging van BC valt. Hier door verandert onze figuur in den vierhoek ABED, (*Fig. 46.*) waarin alzoo de som der hoeken $DAB + B + \gamma + \beta + \alpha = 360^\circ$ is, zoo dat men hier door onmiddellijk vindt, DAB of $\phi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + B)$.

Onze formule $Cot. \phi = \frac{a \sin. \beta \sin. \delta}{b \sin. \alpha \sin. \gamma \sin. \epsilon} + Cot. \epsilon$ wordt dan, in dit geval, overtoellig; echter behoort zij des niettegenstaande, aan de reeds gevonde waardij van ϕ te beantwoorden, wanneer men δ en $\sin. \delta = 0$ stelt; en dit heeft werkelijk plaats: want, doordien, met $\delta = 0$ te stellen de waarde $\frac{a \sin. \beta \sin. \delta}{b \sin. \alpha \sin. \gamma \sin. \epsilon} = 0$ wordt,

zoo heeft men $Cot. \phi = Cot. \epsilon$; doch, bij al dien men hier bij in aanmerking neemt, dat, voor dit geval, de hoek $BCE = \epsilon - \phi = 180^\circ$ of $\phi = \epsilon - 180^\circ$ is, en ϵ en $\epsilon - 180^\circ$ de zelfde *Cotangens* hebben, is het zichtbaar, dat hier $Cot. \epsilon$ in $Cot. (\epsilon - 180^\circ)$ moet veranderen, of dat men 180° van de primitive waarde van $\epsilon = 6 \times 90 - (\alpha + \beta + \gamma + B)$ moet aftrekken, zoodanig, dat $\epsilon - \phi$ of $6 \times 90^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + B) - \phi = 180^\circ$, en alzoo $\phi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + B)$ worden zal: gelijk onmiddellijk uit de figuur is afgeleid geworden.

De lijnen a en b hebben diensvolgens geen invloed meer op de bepaling van den hoek $DAB = \phi$, en het is zichtbaar, dat de lijn b , voor dit geval, eene overtoellige gegevene wordt, alzoo zij tot het berekenen der overige lijnen niet meer behoeft gebruikt te worden.

De meetkundige constructie ondergaat, voor
I 3 dit

dit geval, (*Fig. 47.*) ten opzichte van den cirkel, op BC beschreven, (welke hier wegvalt,) mede eenige verandering: want den cirkel op AB zoodanig beschreven hebbende, dat de middelpuntshoek $APB = 2\alpha$ is, make men hoek $BPE' = 2\beta$; voorts beschrijve men op BE' eenen gelijkbeenigen driehoek, wiens tophoek $BQE' = 2\gamma$ is; en uit Q als middelpunt, trekke men, met de straal $BQ = QE'$, eenen cirkel, welke de verlengde BC ergens in een punt E snijdt; eindelijk trekke men door E en E' eene regte lijn, welke den omtrek des eersten cirkels in D ontmoeten zal, en dan zullen D en E de gezogte standpunten zijn. Want, volgens deze constructie, is $ADB = \frac{1}{2} APB = \alpha$, BDE' of $BDE = \frac{1}{2} BPE' = \beta$ en $BEE' = \frac{1}{2} BQE' = \gamma$.

20. Wanneer (*Fig. 48.*) het standpunt E aan de overzijde van de verlenging van BC valt, heeft de hoek BEC eene tegengestelde ligging, en alzoo moet dezelve, in vergelijking van den hoek BED, als negatief worden aangemerkt, waarom dan ook $-\delta$ en $-\text{Sin. } \delta$, voor δ en $\text{Sin. } \delta$ in de formule behooren gesteld te worden; zoodanig, dat men, voor dit geval, zal hebben:

$$\text{Cot. } \phi = - \frac{a \text{ Sin. } B \text{ Sin. } \delta}{b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \epsilon} + \text{Cot. } \epsilon$$

$$\text{En } \epsilon = 6 \times 90^\circ - (\alpha + \beta + \gamma - \delta + B);$$

waarbij men echter behoort op te merken, dat door $BCE = \epsilon - \phi$ de verheven of inspringende hoek, welke grooter dan 180° is, verstaan moet worden; doordien deze hoek reeds $= 180^\circ$ is, als het punt E in de verlenging van BC valt.

Begeert men den inwendigen hoek BCE in de berekening te brengen, zoo subtrahere men $BCE = \epsilon - \phi$ van 360° , waar door de inwendige hoek $BCE = 360^\circ + \phi - \epsilon = \phi + \alpha + \beta + \gamma - \delta + B - 180^\circ$ overblijft; stelt men voorts $\lambda = \alpha + \beta + \gamma - \delta + B - 180^\circ$, zoo is

$$\epsilon =$$

$\epsilon = 6 \times 90^\circ - (180^\circ + \lambda) = 360^\circ - \lambda$; $\sin. \lambda = - \sin. \epsilon$ en $\cot. \lambda = - \cot. \epsilon$ waar door onse formule verandert in :

$$\cot. \phi = \frac{a \sin. \beta \sin. \delta}{b \sin. \alpha \sin. \gamma \sin. \lambda} - \cot. \lambda.$$

De beide alhier gevondene uitdrukkingen laten zich ook onmiddelijk uit de figuur afleiden, hetwelk wij echter, kortheidshalve, hier zullen voorbij gaan.

3°. Wanneer de lijn DE de lijn BC snijdt, dan ondergaat de laatste oplossing geene verandering in de teekens; gaat echter de lijn DE door AB, (Fig. 49,) zoo verkrijgen de hoeken BDE = β en DEB = γ , zoo als de hoek BED = δ eene tegengestelde ligging, waarom zij dan tevens met hunne sinusfen, als negatief moeten worden aangenomen, waardoor dan

$$\cot. \phi = \frac{a \sin. \beta \sin. \delta}{b \sin. \alpha \sin. \gamma \sin. \epsilon} + \cot. \epsilon \text{ en}$$

$\epsilon = 6 \times 90^\circ - (\alpha - \beta - \gamma - \delta + B)$; worden zal; in welke uitdrukking, de verhoven hoek BCE, zoo als in het voorgaande geval, onthouden is. Wil men echter den inwendigen hoek BCE, welke kleiner dan 180° is, in de berekening brengen, zoo zal, als men $\lambda = \alpha - \beta - \gamma - \delta + B - 180^\circ$ stelt, gelijk in 't laatste geval,

$$\cot. \phi = \frac{a \sin. \beta \sin. \delta}{b \sin. \alpha \sin. \gamma \sin. \lambda} - \cot. \lambda \text{ zijn.}$$

Ook deze uitdrukkingen laten zich onmiddelijk uit de figuur afleiden.

De geometrische constructie, voor deze beide gevallen, komt met die voor het eerste geval overëen; echter met deze uitzondering, dat (Fig. 50.) de cirkel op BC eene tegengestelde ligging verkrijgt: namelijk dat het centrum Q aan de andere zijde van BC valt; overigens laat zich

de voorgaande constructie letterlijk op deze figuur toepassen.

4^o. Wanneer men, in de eerste gevondene vergelijking van ons voorstel, $\gamma = \beta$ en alzoo $\sin. \epsilon = \sin. \gamma$ stelt, is ook $DB = BE$ en men

heeft
$$\text{Cot. } \phi = \frac{a \sin. \delta}{b \sin. \alpha \sin. \epsilon} + \text{Cot. } \epsilon; \text{ en } \epsilon = 540^\circ - (\alpha + 2\beta + \delta + B).$$

Neemt men voorts hier bij aan, dat (*Fig. 51*) zich de punten D en E bestendig naderen, zoo neemt de hoek DBE af, en de hoek $\beta = \gamma$ wordt grooter, tot de eerste $= 0$ en $\gamma = \beta = 90^\circ$ wordt, in welk geval, de punten D en E in elkanderen vallen, doordien $BD = BE$ is; zoo dat men maar een enkeld standpunt hebben zal. Ons voorstel verandert alzoo hierdoor in het bekende Problema: *Het standpunt te bepalen door de waarneming van de beide hoeken tot drie bekende en in ligging gegevene punten.* (*)

De laatste gevondene vergelijking van $\text{Cot. } \phi$, ondergaat hierdoor in haaren vorm geen verandering, doch hierdoor wordt $\epsilon = 540^\circ - (\alpha + 180^\circ + \delta + B) = 360^\circ - (\alpha + \delta + B)$; en deze waarde zoo als ook de formule van $\text{Cot. } \phi$, laat zich onmiddellijk uit de figuur afleiden.

De geometrische constructie (*Fig. 52.*) voor dit geval blijft dezelfde, ten opzichte der op AB en BC te trekkene cirkels; doch daar hier bij de hoeken $BPE' = 2\beta$ en $BQD' = 2\gamma$ ieder $= 180^\circ$ worden, zoo heeft men flegts uit B, door de beide middelpunten der cirkels P en Q de diameters BE' en BD' te trekken, om de ligging der lijn D'E' te bekomen; daar echter bij dit geval

(*) Zie de analytische oplossing van dit *Problema*, dat SNELLIUS, in *Erath. Batav.* het eerste voorgesteld heeft, bij J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* § 657. Men vindt ook in de *Meetk.* van VAN SWINDEN, eene oplossing van hetzelfde.

val maar een standpunt plaats vindt, zoo moet deze lijn noodzakelijk door het snijpunt der beide cirkels gaan; wijl zij anderszins in de omtrekken der beide cirkels twee verschillende standpunten bepalen zoude. (*)

Ook is het gemakkelijk in te zien: dat deze lijn werkelijk door het gemeene snijpunt D der cirkels gaat: want, zoo men BD, D'D en ED' trekt, ontstaan hier uit de hoeken BDD' en BDE', die ieder, in eenen halven cirkel gelegen zijnde, $= 90^\circ$ zijn; waaruit dus volgt, dat $BDD' + BDE' = 180^\circ$ is, en D'DE' een rechte lijn wezen zal.

Doordien eindelijk het snijpunt D der beide cirkels, het begeerde standpunt is, alzoo hierdoor werkelijk $ADB = \frac{1}{2} APB = \alpha$ en $BDC = \frac{1}{2} BQC = \delta$ wordt, zoo is, voor dit geval, de lijn E'D' overtoollig; gelijk zij dan ook in de bekende constructie voor dit geval wordt weggelaten; hier echter heeft dezelve gediend, om aan te toonen, dat ook de geometrische constructie voor dit geval, in alle opzichte, een gevolg van ons algemeener voorstel is.

AANMERKING. Het hier ontbonde voorstel is slegts een gevolg, dat uit een veel algemeener voorstel kan worden afgeleid, het welke wij, in onze *Mathematische Beyträge etc. Königsberg, 1803*, hebben voorgedragen.

ANDERS, door J. R. Schmidt, en P.
van Eeghen, Chz.

Wijl de punten A, B en C, *Fig. 44.* in stelling gegeven zijn, zoo zijn ook AB, BC en hoek ABC bekend. Wij stellen dus $AB = a$, $BC = b$,
hoek

(*) Zie ook eene constructie van dit Voorstel, in J. DE GELDERS *Beginfelen der Meetkunst*, § 511.

hoek $ABC = \epsilon$ en voorts de waargenomenne hoeken als volgt: hoek $ADB = \alpha$, hoek $BDE = \beta$, hoek $BED = \gamma$, hoek $BEC = \delta$.

Wanneer de hoeken DAB en ECB bekend waren, zou alles bepaald zijn; daar nu de som der hoeken van den vijfhoek $ABCED$ gelijk aan zes rechte hoeken is, zoo is

$\angle BAD + \angle BCE = 6R - (\angle ADE + \angle DEC + \angle ABC)$ dat is, in deze vergelijking de boven aangenomenne waarden stellende,

$$\angle BAD + \angle BCE = 6R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)$$

De halve som der hoeken is derhalve $3R - \frac{1}{2} \times (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)$; stellende deze nu kortheids halve $= p$ en het halve verschil dezer onbekende hoeken $= x$; dan is hoek $BCE = p + x$ en hoek $DAB = p - x$.

Nu hebben wij in den driehoek DAB , $\text{Sin. } \alpha : \text{Sin. } (p - x) = a : BD$; derhalve $BD = \frac{a \text{ Sin. } (p - x)}{\text{Sin. } \alpha}$ en, in den driehoek BCE , heeft men $\text{Sin. } \delta : \text{Sin. } (p + x) = b : BE$, dus $BE = \frac{b \text{ Sin. } (p + x)}{\text{Sin. } \delta}$; maar in den driehoek BDE is $\text{Sin. } \epsilon : \text{Sin. } \gamma = BE : BD$; brengt men in deze laatste evenredigheid de gevondene waarden van BE en BD ; dan komt er:

$$\text{Sin. } \beta : \text{Sin. } \gamma = \frac{b \text{ Sin. } (p + x)}{\text{Sin. } \delta} : \frac{a \text{ Sin. } (p - x)}{\text{Sin. } \alpha}$$

$$\text{dat is } \frac{a \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha} \times \text{Sin. } (p - x) = \frac{b \text{ Sin. } \gamma}{\text{Sin. } \delta} \times \text{Sin. } (p + x)$$

zoo wij nu $\text{Sin. } (p - x)$ en $\text{Sin. } (p + x)$ ontwikkelen en alles door $\text{Cos. } x \times \text{Cos. } p$ deelen, dan verkrijgen wij:

$$\frac{a \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha} \times (\text{Tang. } p - \text{Tang. } x) = \frac{b \text{ Sin. } \gamma}{\text{Sin. } \delta} \times (\text{Tang. } p + \text{Tang. } x)$$

en

en deze oplofende,

$$\text{Tang. } x = \text{Tang. } p \times \frac{a \sin. \beta \times \sin. \delta - b \sin. \gamma \times \sin. \alpha}{a \sin. \beta \times \sin. \delta + b \sin. \gamma \times \sin. \alpha}$$

waardoor x en al het overige bepaald is.

Om deze laatste formule voor de berekening in Logarithmen geschikt te maken, deelen wij teller en noemer door $a \sin. \beta \times \sin. \delta$; dan ver-

krijgen wij, na $\frac{b \sin. \gamma \times \sin. \alpha}{a \sin. \beta \times \sin. \delta} = \text{Tang. } \phi$

(het geen altijd geschieden kan,) gesteld te hebben:

$$\text{Tang. } x = \text{Tang. } p \times \frac{1 - \text{Tang. } \phi}{1 + \text{Tang. } \phi}$$

dat is, (zie DE GELDER'S *Beginf. der Meetk.* § 550. *Bladz.* 203.)

$$\text{Tang. } x = \text{Tang. } p \times \text{Tang. } (45^\circ - \phi)$$

en wij hebben dus, om x in Logarithmen te berekenen:

$$p = 3R - \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)$$

$$\text{Log. Tang. } \phi = \text{Log. } b + \text{Log. Sin. } \alpha + \text{Log. Sin. } \gamma -$$

$$\dots [\text{Log. } a + \text{Log. Sin. } \beta + \text{Log. Sin. } \delta]$$

$$\text{Log. Tang. } x = \text{Log. Tang. } p + \text{Log. Tang. } (45^\circ - \phi)$$

CONSTRUCTIE. Het opgegeven voorstel wordt gemakkelijk op de volgende wijze geconstrueerd. Laat, *Fig. 53*, op eene onbepaalde lijn $D'E'$ de gegevene hoeken β en γ worden geconstrueerd en verder de hoeken α en δ gelijk aan hunne gegevene grootte genomen worden; bij al- dien dan $A'D'$ en $C'E'$ verlengd worden, tot dat zij elkander in F' snijden en $B'F'$ getrokken wordt, zijn hierdoor de hoeken p en q , als mede r en s , bepaald. Zoo wij dan op AB en BC (zie *Fig. 44*.) cirkelsegmenten beschrijven, die de nu bekende hoeken p en q bevatten; dan zal het snijpunt F het punt zijn, waarin de lijnen AD en CE , verlengd zijnde, elkander snijden, en de stand dezer lijnen alzoo bepaald zijnde, vinden wij de punten D en E door den hoek $FBD = r$ en den hoek $FBE = s$ te maken.

No 6

NOG ANDERS, door *Jacob de Gelder*.

MEETKUNDIGE OPLOSSING en CONSTRUCTIE.

Stel, dat alles gevonden zij; omdat dan de punten, A, B en C (*Fig. 54.*) in stelling gegeven zijn, zijn de afstanden AB en BC in grootte gegeven: aangezien nu ook de hoeken ADB en BEC gegeven zijn, zijn ook in grootte en stelling gegeven de cirkels, welke, de eerste door de punten A, B en D, en de tweede door de punten B, C en E gaan: het punt D ligt alzoo in den omtrek van den boog ADB en het punt E in den omtrek van den boog BHE. Het komt er dan op aan, om in de omtrekken dezer bogen, ADHB en BHE, twee punten D en E te vinden, zoodanig, dat de hoeken BDE en BED eene gegevene grootte hebben. Bij aldien men nu aanneemt, dat deze punten bekend zijn; dan zal, indien de lijn DE geene raaklijn aan den boog ADHB is, deze lijn (of derzelver verlengde) dien boog ADHB in eenig punt F snijden; maar, aangezien de hoek ADE gegeven is, is ook zijn supplement BDF gegeven en de boog BCAF, een gedeelte van den in stelling en grootte gegevenen cirkel uitmakende, is benevens de lijn BF, die de koorde van dien boog is, in grootte gegeven: dit zoo zijnde, zal, aangezien de hoek BEF of BED gegeven is, ook in grootte en stelling gegeven zijn de cirkel, welke door de punten B, F en E gaat: het punt E ligt alzoo in de doorsnijding der cirkels BHEC en BEF en het punt D in de doorsnijding van de lijn EF met den cirkel ABHDF. — Men beschrijve dan op AB een cirkel segment, houdende den waargenomen hoek ADB; op BC een cirkel-segment houdende den waargenomen hoek BEC; men neme, op den omtrek des eersten cirkels, den boog BAF gelijk aan het dubbeld van het supplement van den waargenomen hoek BDE; en beschrijve op de
lijn

lijn BF een segment, houdende den waargenomen hoek FEB. Het punt E, alwaar de omtrek van dit segment het segment BEC snijdt, is dan het eene der begeerde punten: het ander punt D ligt in de snijding van de lijn EF met den boog ADB. — De verscheidenheden welke, naar de gelegenheid der gegevene en gevraagde punten, in de figuur ontstaan, wijzen zich van zelve.

STELKUNDIGE OPLOSSING. Aangezien (Fig. 44.) de stelling der punten, A, B en C gegeven is, kan men ook den geheelen driehoek als bekend aanmerken en het daarvoor houden: dat de zijden AB en BC met den ingesloten hoek ABC bekend zijn, of ten minste, uit het geen men van den driehoek ABC weet, berekend kunnen worden. Men stelle dan $AB = a$, $BC = b$, hoek $ABC = B$, de waargenomene hoeken $ADB = \alpha$, $BDE = \beta$, $BED = \gamma$ en $BEC = \delta$, en men merke op: dat bij aldien men de hoeken DAB en ECB (die wij in het vervolg eenvoudig A en C noemen zullen,) bepalen konde, men dan ook, door de gewone regels der Driehoeksmeting, de onbekende afstanden AD, BD, DE, EC en DE, zou kunnen berekenen.

Om nu deze onbekende hoeken A en C te vinden, heeft men, in den driehoek DEB, de evenredigheden: $\text{Sin. DBE} : \text{Sin. BDE} = DE : BE$, en $\text{Sin. DBE} : \text{Sin. DEB} = DE : BD$; en hieruit vindt men, van onze aangenomene notatie gebruik makende:

$$BE = DE \times \frac{\text{Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\beta + \gamma)}; BD = DE \times \frac{\text{Sin. } \gamma}{\text{Sin. } (\beta + \gamma)}$$

Voorts geven de driehoeken APD en BEC de evenredigheden: de eerste, $AB : BD = \text{Sin. ADB} : \text{Sin. A}$, en de tweede, $BC : BE = \text{Sin. BEC} : \text{Sin. C}$; hieruit vindt men, in stelkundige termen;

Sin.

$$\sin. A = \frac{DE}{a} \cdot \frac{\sin. \alpha \sin. \gamma}{\sin. (\beta + \gamma)} \text{ en } \sin. C = \frac{DE}{b} \cdot \frac{\sin. \beta \sin. \delta}{\sin. (\epsilon + \gamma)}$$

Het blijkt hieruit: dat, wanneer de lijn DE bekend ware, de hoeken A en C insgelijks bekend zouden zijn; doch, wanneer men de som der sinusen van de onbekende hoeken A en C tegen derzelver verschil vergelijkt, gaat de onbekende zijde DE weg; waar, volgens *Beg. VII Stel. VIII B.*, is

$$\frac{\sin. A + \sin. C}{\sin. A - \sin. C} = \frac{\text{Tang. } \frac{1}{2} (A + C)}{\text{Tang. } \frac{1}{2} (A - C)} = \dots$$

$$\dots = \frac{b \sin. \alpha \times \sin. \gamma + a \sin. \epsilon \times \sin. \delta}{b \sin. \alpha \times \sin. \gamma - a \sin. \beta \times \sin. \delta}$$

en hieruit volgt dan voor de waarde van $\text{Tang. } \frac{1}{2} (A - C)$,

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} (A + C) \times \frac{b \sin. \alpha \times \sin. \gamma - a \sin. \beta \times \sin. \delta}{b \sin. \alpha \times \sin. \gamma + a \sin. \beta \times \sin. \delta}$$

Maar nu is $\frac{1}{2} (A + C) = 270^\circ - \frac{1}{2} (\beta + \alpha + \beta + \gamma + \delta)$; stel dit gelijk M; dan wordt de waarde van $\text{Tang. } \frac{1}{2} (A - C)$,

$$\text{Tang. M} \times \frac{b \sin. \alpha \times \sin. \gamma - a \sin. \beta \times \sin. \delta}{b \sin. \alpha \times \sin. \gamma + a \sin. \beta \times \sin. \delta}$$

welke vergelijking indien men $\frac{b \sin. \alpha \times \sin. \gamma}{a \sin. \beta \times \sin. \delta} = \text{Tang. } \phi$, en voorts bij verkorting $\frac{1}{2} (A - C) = N$ stelt, (zie *Beg. der Meetk. §. 550. Bladz. 203.*) de volgende gedaante verkrijgt:

$$\text{Tang. N} = \text{Tang. M} \times \text{Tang. } (\phi - 45^\circ)$$

Het teeken van Tang. N hangt, in deze vergelijking, af van de teekens welke Tang. M en $\text{Tang. } (\phi - 45^\circ)$ verkrijgen. Nu is M met Tang. M te gelijk positief of negatief, naar dat M kleiner of groter dan 90° is; en $\text{Tang. } (\phi - 45^\circ)$ is positief of negatief, naar dat ϕ groter of kleiner is dan 45° ; dat is, (aangezien $\text{Tang. } 45^\circ = 1$ is,) naar dat, in het gebroken,

$$\frac{b \sin. \alpha \times \sin. \gamma}{a \sin. \beta \times \sin. \delta}$$

de

de teller $b \times \text{Sin. } a \times \text{Sin. } \gamma$ grooter of kleiner dan de noemer $a \text{ Sin. } \beta \times \text{Sin. } \delta$ is; zijnde voor het overige, gelijk bekend is, het teeken van *Tang. N* positief of negatief, naar dat de teekens van *Tang. M* en *Tang. ($\phi - 45^\circ$)* gelijk of ongelijk zijn.

Zoodra nu *N* berekend is, is aangezien $M = \frac{1}{2} (A + C)$ is,

$$A = M + N, \text{ en } C = M - N$$

(in welke vergelijkingen op het teeken van *N* moet gelet worden,) en de onbekende afstanden worden nu gemakkelijk in stekkundige termen uitgedrukt. Men heeft derhalve, om alles te bepalen, het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$(1) \dots M = 270^\circ - \frac{1}{2} \times (B + a + \beta + \gamma + \delta)$$

$$(2) \dots \text{Tang. } \phi = \frac{b \text{ Sin. } a \times \text{Sin. } \gamma}{a \text{ Sin. } \beta \times \text{Sin. } \delta}$$

$$(3) \dots \text{Tang. } N = \text{Tang. } M \times \text{Tang. } (\phi - 45^\circ)$$

zijnde *Tang. M* positief of negatief, naar mate *N* kleiner of grooter is dan 90° ; en *Tang. ($\phi - 45^\circ$)* positief of negatief, naar mate $b \text{ Sin. } a \times \text{Sin. } \gamma$ grooter of kleiner dan $a \text{ Sin. } \beta \times \text{Sin. } \delta$ is.

$$(4) \dots A = M + N \text{ en } C = M - N$$

$$(5) AD = \frac{a \text{ Sin. } (A + a)}{\text{Sin. } a}; (6) BD = \frac{a \text{ Sin. } A}{\text{Sin. } a}$$

$$(7) CE = \frac{b \text{ Sin. } (C + \delta)}{\text{Sin. } \delta}; (8) BE = \frac{b \text{ Sin. } C}{\text{Sin. } \delta}$$

en aindelijk, de dubbelde vergelijking, welke tevens tot eene verificatie van de geheele berekening in getallen verstreken moet,

$$(9) DE = BD \times \frac{\text{Sin. } (\beta + \gamma)}{\text{Sin. } \gamma} = BE \times \frac{\text{Sin. } (\beta + \gamma)}{\text{Sin. } \beta}$$

zijn-

zijnde het volgende voorbeeld, naar deze formu-
len berekend. (*)

VOORBEELD. Gegeven zijnde $a = 4567^m$,
 $b = 3998^m5$; $B = 113^\circ 27' 30''$, $\alpha = 39^\circ 27' 20''$
 $\delta = 33^\circ 55' 10''$; $\beta = 65^\circ 8' 30''$ en $\gamma = 74^\circ 49' 50''$;
zoo vraagt men, naar de bovengevondene formu-
len, de onbekende hoeken A en C , benevens de
afstanden D en E tot elkander en tot de punten
 A , B en C te bepalen?

BEREKENING.

$$\begin{array}{rcl}
 a & = & 4567^m \\
 b & = & 3998,5 \\
 \beta & = & 113^\circ 27' 30'' \\
 \alpha & = & 39^\circ 27' 20'' \\
 \delta & = & 33^\circ 55' 10'' \\
 \beta & = & 65^\circ 8' 30'' \\
 \gamma & = & 74^\circ 49' 50''
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} a \\ b \\ \beta \\ \alpha \\ \delta \\ \beta \\ \gamma \end{array}} \right\} \text{optellen.}$$

$$\begin{array}{r}
 326^\circ 48' 20'' \\
 2) \quad \hline
 163^\circ 24' 10'' \\
 270^\circ 00' 00'' \\
 \hline
 M = 106^\circ 35' 50''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Log. } a & = & 3,6596310 \\
 \text{Log. } b & = & 3,6018971 \\
 M & = & 106^\circ 35' 50'' \\
 N & = & -5^\circ 37' 53'',2 \\
 \hline
 A & = & 100^\circ 57' 56'',8 \\
 C & = & 112^\circ 13' 43'',2 \\
 A + \alpha & = & 140^\circ 25' 16'',8 \\
 C + \delta & = & 146^\circ 8' 53'',2 \\
 C + \gamma & = & 139^\circ 58' 20'',0
 \end{array}$$

1°. Om

(*) Daar dit voorstel, in het *Landmeten* en de *Geodesie*,
van zoo veel belang is, hebben wij het niet onvoeg-
zaam geoordeeld, onze formules, door een voorbeeld
in getallen, optehelderen: de min bedrevenen doen wel,
wanneer zij, naar dit voorbeeld, de twee volgende
uitwerken.

I. VOORB. Gegeven: $a = 5607^m3$; $b = 4701^m7$;
 $B = 131^\circ 50' 10''$; $\alpha = 71^\circ 40' 10''$, $\beta = 69^\circ 45' 00''$.
 $\gamma = 75^\circ 10' 00''$, en $\delta = 59^\circ 55' 40''$. II VOORB.
 $a = 7900$ meters; $b = 7350$; $B = 148^\circ 43'$; $\alpha = 67^\circ 44'$
 $\beta = 42^\circ 02'$, $\gamma = 83^\circ$ en $\delta = 75^\circ 10'$. In ons uit-
gewerkte voorbeeld, hebben wij de Tafels van CALLET
gebruikt.

1°. Om N te vinden.

$$\text{Log. } a = 3,6596310$$

$$\text{L. Sin. } \delta = 9,7466550$$

$$\text{L. Sin. } \beta = 9,9577748$$

$$3,3640608$$

$$\text{Log. } b = 3,6018971$$

$$\text{L. Sin. } a = 9,8031015$$

$$\text{L. Sin. } \gamma = 9,9845976$$

$$3,3895962$$

$$\text{L. Tang. } \phi = 0,0255354$$

$$\phi = 46^{\circ}41'00'',42$$

$$\phi - 45^{\circ} = + 1^{\circ}41'00'',42$$

$$\text{L. T. } (\phi - 45^{\circ}) = 8,4682026 +$$

$$\text{L. Tang. } M = 0,5256961 -$$

$$\text{L. Tang. } N = 8,9938987 -$$

$$N = - 5^{\circ}37'53'',20$$

2°. Om AD te vinden.

$$\text{Log. } a = 3,6596310$$

$$\text{L. Sin. } (A + a) = 9,8042329$$

$$\text{C. L. Sin. } a = 0,1968985$$

$$\text{Log. } AD = 3,6607624$$

$$AD = 4579,^m912$$

3°. Om BD te vinden.

$$\text{Log. } b = 3,6596310$$

$$\text{L. Sin. } A = 9,9919969$$

$$\text{C. L. Sin. } a = 0,1968985$$

$$\text{Log. } BD = 3,8845264$$

$$BD = 7055,^m478$$

3°. Om CE te vinden.

$$\text{Log. } b = 3,6018971$$

$$\text{L. Sin. } (C + \delta) = 9,7458926$$

$$\text{C. Log. Sin. } \delta = 0,2533450$$

$$\text{Log. } CE = 3,6011347$$

$$CE = 3991,^m486$$

4°. Om BE te vinden.

$$\text{Log. } b = 3,6018971$$

$$\text{L. Sin. } C = 9,9664615$$

$$\text{C. L. Sin. } \delta = 0,2533450$$

$$\text{Log. } BE = 3,8217036$$

$$BE = 6632,^m903$$

5°. Om DE te vinden.

$$\text{Log. } BD = 3,8485264$$

$$\text{L. Sin. } (\delta + \gamma) = 9,8083184$$

$$\text{C. L. Sin. } \gamma = 0,0154024$$

$$\text{Log. } DE = 3,6722471$$

$$DE = 4700,^m615$$

6°. Verificatie.

$$\text{Log. } BE = 3,8217036$$

$$\text{L. Sin. } (\beta + \gamma) = 9,8083183$$

$$\text{C. L. Sin. } \delta = 0,0422252$$

$$\text{Log. } DE = 3,6722471$$

$$DE = 4700,^m615$$

waaruit blijkt, dat alles
naauwkeurig bepaald is.

I AANMERKING. Dit werkstuk staat in een naauw verband met het werkstuk van **SNEELIUS**, waarvan wij, in het IX Boek onzer *Beg. XII Vraagst. Bladz. 257—262*, eene oplossing gegeven hebben, welke ons daar ter plaatse op de formules van **DE LAMBRE** gebragt heeft. En in de daad, wanneer wij aannemen, dat (zie *Fig. 44.*) de punten D en E tot elkander naderen; dan wordt, op het oogenblik, dat de

K

ze in elkander vallen, $\beta + \gamma = 180^\circ$; de vergelijking (1), te weten $M = 270^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \alpha + \beta + \gamma + \delta)$, wordt dan $M = 270^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \alpha + \beta) = 90^\circ = 180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \alpha + \delta)$, dezelfde als form (2) Bladz. 259 der Beg. (wel verstaande, op de verandering van letters na.) Voorts, daar $\beta + \gamma = 180^\circ$ is, is $\sin. \beta = \sin. \gamma$, en de vergelijking (2) verandert in $\text{Tang. } \phi = (b \sin. \alpha) : a \sin. \beta$, zijnde deze dezelfde als form (1) Bladz. 259 der Begins. En daar eindelijk $\sin. (\beta + \gamma) = \sin. 180^\circ = 0$ is, wordt, in verg. (3), $DE = 0$, zoo als het ook behoort. Het blijkt dan hiernit, dat, door de onderstelling van $\beta + \gamma = 180^\circ$, of door de vereëning der punten D en E, het geheele stelsel der boven opgegevene formules in het stelsel van de formules voor het werkstuk van SNELLIUS verandert; zijnde dit laatste bij gevolg slechts een bijzonder geval van het meer algemeene van den Heer HÜGUEMIN; gelijk dan ook onze hier boven opgegevene meetkundige constructie, voor het geval, waarin de punten D en E in elkander vallen, verandert in de constructie, welke wij in onze Beginselen (§ 511, XLV. Werkstuk) van het werkstuk van SNELLIUS hebben opgegeven.

II AANMERKING. Het bovongevondene stelsel van formules, dienende ter berekening der onbekenden, is naar de 44e figuur, welke eenen vijfhoek ABCED met uitspringende hoeken ople-

k, dat de
A, B en
E, welke
zijn ver-
ook een
sing van
n, echter
rakende,
voortnaam-

19. Nemen wij, dat de punten A, C, D en E op dezelfde plaats blijven; maar dat het punt B van plaats verandere, en, naar beneden gaande, den hoek B stomper maakt; dan zal, indien eindelijk, de punten A, B en C in eene regte lijn vallen, hoek $ABC = 180^\circ$ worden, en de *vang* (1) van *Bladz.* 141, zal nu in $M = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ veranderen; terwijl nogtans al de overige vergelijkingen onveranderd zullen blijven.

20. Bij aldien het punt B nog meer naar beneden verplaatst wordt; dan zal de driehoek ABC met zijn toppunt naar beneden vallen, en de vijfhoek ADECB zal eenen inspringenden hoek B verkrijgen; voor welken nu niet meer den hoek ABC, zoo als hij tot den driehoek ABC, op zich zelf genomen, behoort; maar wel het supplement van dien hoek tot 360° ; en, door zulke in acht te nemen, zal het geheele stelsel van formules, zonder eenige verandering, op dit geval toepasselijk blijven. In het Werkdadige zal men nu gewooneijk weten, hoe de punten A, B en C, ten opzichte van de lijn DE, gelegen zijn; doch, bij aldien deze ligging onbekend mogte zijn; zou men dadelijk, na de berekening der vier eerste formules, ontdekken, hoe het hier mede gelegen ware; want, indien $A + B + C + \alpha + \beta + \gamma + \delta$ niet $= 540^\circ$ bleek te zijn, zou zulke ten kenteeken versprekken, dat men het punt B aan eene verkeerde zijde van de lijn AC gedacht had.

30. In de oorspronkelijke 44e figuur, zijn de hoeken α , β , γ en δ als positieve hoeken aangenomen; doch, sommige dezer hoeken kunnen, in bijzondere gevallen, ook negatief worden. Wanneer, bij voorbeeld, het punt E, in *Fig.* 44 nader naar de lijn BC komt, zal de hoek δ bestendig kleiner worden; en hij wordt gelijk nul, wanneer het punt E, gelijk in *Fig.* 46, in het

verlengde van BC valt; maar, wanneer het punt E aan geene zijde van de lijn BC valt, gelijk in *Fig. 48*, dan wordt die hoek negatief; (vergelijk *Beg. der Meetk. §. 532*) en dit negatief worden heeft dan invloed, vooreerst op de vier eerste formules; want, *formule (1)* wordt nu $M = 270^\circ - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta + \gamma - \delta)$ en daar nu $\alpha \sin. \beta \times \sin. \delta$ negatief wordt, wordt ook (*zie form. (2)*) *Tang. ϕ* en bijgevolg ook ϕ negatief; men zou nu voorts met de formule *Tang. $N = \text{Tang. } M \times \text{Tang. } (\phi - 45^\circ)$* kunnen verlegen zijn, en in twijfel staan, welken hoek voor N moet aangenomen worden; doch, wanneer men in aanmerking neemt, dat, in *Fig. 44*, de hoek BCE steeds nader aan 180° komt, naar mate het punt E tot het verlengde van de lijn BC nadert en dat de hoek BCE $> 180^\circ$ wordt, zoo dra het punt E aan geene zijde van BC valt, zoo ziet men, dat N natuurlijk negatief moet zijn; dat is, dat men voor eene negatieve tangens van N (*zie Tafel Beginf. Bladz. 194*) de waarde uit de tafel, met die tangens overeenstemmende, negatief nemen moet; doch zoo *Tang. N* positief is, dan zal men, aangezien de tangens van eenen negatieven boog, in het tweede kwadraat vallende, positief is, het supplement van den boog, tot *Tang. N* behoorende, negatief moeten nemen; dit alles zal men met meer vrugt inzien, wanneer men, *gegeven zijnde* $a = 950$; $b = 651,3$; $B = 108^\circ 00'$; $\alpha = 45^\circ 50'$; $\beta = 50^\circ 10'$; $\gamma = 70^\circ 50'$ en $\delta = -50^\circ 00'$, de waarde van M en N berekent. Men zal vinden: $M = 157^\circ 35'$; $\phi = -38^\circ 17' 47'', 35$; $\phi - 45^\circ = -83^\circ 17' 47'', 35$; nu is *Tang. M* en *Tang. $(\phi - 45^\circ)$* beide negatief; *Tang. N* is dus positief; men vindt *Log. Tang. N* $= 0,5452673$; maar men weet, dat N negatief moet zijn (*);

der-

(*) En al wist men dit niet, zou zulks, na de waarden

derhalve moet men, aangezien met deze gevonden *Log. Tang.* in de tafel de hoek $74^{\circ}5'46''84$ overëenkomt, het supplement van dien hoek, negatief gesteld, voor de waarde van N aannemen; N is alzoo $\equiv -105^{\circ}54'13'',16$; en hier door wordt $A \equiv 51^{\circ}40'46'',84$; $C \equiv 263^{\circ}29'13'',16$. Ten anderen, heeft de negatieve waarde van δ ook invloed op de formules (5), (6), (7), (8) en (9). Men vindt $A + \alpha \equiv 97^{\circ}30'46'',84$; $C + \delta \equiv 213^{\circ}29'13'',16$; $\beta + \gamma \equiv 121^{\circ}$; de *Sin.* C welke, in de tafel, met *Sin.* $83^{\circ}29'13'',16$, en de *Sin.* $(C + \delta)$, welke met *Sin.* $33^{\circ}29'13'',16$ worden opgezocht; zijn, even als *Sin.* δ , negatief en men vindt $AD \equiv 1313,012$; $BD \equiv 1039,051$; $CE \equiv 469,102$; $BE \equiv 844,724$ en $DE \equiv 1082,6045$; hetwelk ook met eene geteekende figuur, waaruit wij de gegevens genomen hebben, overëenstemt.

4°. Nemen wij nog, dat het punt E (*Fig. 49.*) wel, gelijk in *Fig. 48*, aan geene zijde van BC ligt; maar dat de punten B en C , met betrekking tot de lijn DE , aan de andere zijde van dezelve liggen; wanneer men dan deze figuur met de oorspronkelijke (*Fig. 44*) vergelijkt, ziet men: dat de hoek $BDA \equiv \alpha$, als aan dezelfde zijde van AD liggende, positief is; doch de hoek $BDE \equiv \beta$ is negatief; omdat hij, ten aanzien van *Fig. 44*, aan de andere zijde van BD ligt: de hoek $DEB \equiv \gamma$ is, daar hij, in vergelijking van de oorspronkelijke figuur, aan de andere zijde van BE ligt, negatief, en,

den van A en C bepaald te hebben, uit de vergelijking $A + B + C + \alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 540^{\circ}$ moeten blijken. In ons voorbeeld behoort tot de positive tangens N de positieve boog $74^{\circ}5'46'',84$; maar tot dezelfde kan ook de negatieve boog $-105^{\circ}54'13'',16$ behooren; welke van deze twee waarden nu aan de bijgebrachte vergelijking voldoen, deze is de waarde, welke alleen op de bijzondere gesteldheid der figuur passen kan.

en, om dezelfde reden, is hoek BEC negatief; en daar derhalve $\delta \sin. \alpha \sin. \gamma$ negatief en $\alpha \sin. \beta \sin. \delta$ positief is, zal $Tang. \phi$ en ϕ negatief zijn, en al het overige zal hier maar moeten ingericht worden. Indien gegeven ware: $a = 782$, $b = 557$; $B = 115^\circ 30'$; $\alpha = 70^\circ 40'$; $\beta = 10^\circ 20'$; $\gamma = 25^\circ 30'$; $\delta = 26^\circ 10'$; dan zou men vinden, $M = 207^\circ 55'$; $\phi = 74^\circ 42' 37'', 34$; $\phi = 45^\circ = 119^\circ 42' 37'', 34$; en eindelijk, $N = 137^\circ 7' 23'', 94$; $A = 70^\circ 47' 36'', 06$; $C = 345^\circ 4' 23'', 94$; hiernede verder de berekening opmakende, vindt men, nagehoeg: $AD = 516$; $BD = 782$; $CE = 831$; $BE = 325$ en $DE = 1064$.

5°. Wanneer, *Fig. 49*, de lijn CE , door de verplaatsing van het punt E , nog nader aan BC komt, zal $BEC = \delta$ steeds kleiner worden, en, als de lijn CE op BC valt, wordt $\delta = 0$; doch, verder voortdrijvende, zal hoek BCE grooter dan 360° worden, of eigenlijk, als in *Fig. 44*, moeten genomen worden; en hoek $BEC = \delta$ niettegenstaande $BED = \gamma$ negatief blijft, zal positief worden.

In alle deze gevallen is hetzelfde stelsel van formules dienstbaar, om de onbekende hoeken en onbekende zijden te vinden; gelijk ook de fraaije formules van den Heer HUGUENIN, in alle gevallen, dezelfde algemeenheid hebben.

III AANMERKING. Behalve de oplossingswijzen van de Heeren HUGUENIN en SCHMIDT, waarvan de laatste zeer na met de onze overeenstemt, kan dit voorstel ook nog anders worden opgelost.

1°. Wanneer men, *Fig. 44*, de onbekende hoeken ABD en CBE gelijk x en y stelt, dan zal men uit de driehoeken ABD en BCE vinden:

$$BD = \frac{a \sin. (\alpha + x)}{\sin. \alpha} \text{ en } BE = \frac{b \sin. (\delta + y)}{\sin. \delta}$$

en

en daar, in den driehoek DEB , $BD : BE = \sin. \gamma : \sin. \beta$ is, zal men, na substitutie en herleiding, vinden:

$$\frac{\sin. (a + x)}{\sin. (\delta + \gamma)} = \frac{b \sin. a \sin. \gamma}{a \sin. \beta \sin. \delta}$$

Nu is $x + \gamma = B + (C + \delta) + 180^\circ$; derhalve $\gamma = B + \beta + \gamma + 180^\circ$ en $\delta + \gamma = B + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$; x stelt men nu $B + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ = \mu$ zal de laatste vergelijking veranderen in

$$\frac{\sin. (a + x)}{\sin. (\mu - x)} = \frac{b \sin. a \sin. \gamma}{a \sin. \beta \sin. \delta} = \text{Tang. } \phi$$

hebbende hier $\text{Tang. } \phi$ dezelfde waarde, als in de voorgaande oplossing; ontwikkelende nu de waarden van $\sin. (a + x)$ en $\sin. (\mu - x)$ dan zal men vinden:

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Tang. } \phi \sin. \mu - \sin. a}{\text{Tang. } \phi \cos. \mu + \cos. a}$$

en bijaldien men $B + a + \beta + \gamma = 180^\circ = \mu$ stelt, dan zal men voor $\text{Tang. } \gamma$ vinden:

$$\text{Tang. } \gamma = \frac{\text{Tang. } \phi \sin. \mu - \sin. \delta}{\text{Tang. } \phi \cos. \mu + \cos. \delta}$$

dan, deze formules zijn in de berekening in verre na zoo gemakkelijk niet dan die, welke uit de voorgaande oplossingen volgen.

De Heer SCHMIDT heeft, in zijne constructie, ons werkstuk tot dat van SNELLIUS gebragt; stelskundig kan dit inogelijks geschieden. In den vierhoek $BDFE$, *Fig. 44*, zijn de hoeken $BDE = \theta$; $BED = \gamma$; $EDF = 180^\circ - a - \theta$ en $DEF = 180^\circ - \gamma - \delta$ bekend, en nu komt het er op aan, om de hoeken θ en γ te vinden. Dit is het werkstuk van den Heer BANGMA, zie n^o. 55. van dit Deel, *Bladz.* 85, en wanneer men nu de hoeken θ en γ gevonden heeft, zal men, ofschoon langs eenen langeren omweg, de begeerde afstanden vinden.

Wanneer men voor DE een zekeren willekeurigen

keurigen afstand aanneemt, zal men genoeg gegevens hebben, om de zijden der driehoeken DEB , ABD en BCE , door de gewone regels der Driehoeksmeting, te berekenen; doch, daar de berekening der twee laatste driehoeken tot het twijfelachtig geval behooren, zal men die driehoeken moeten nemen, welke $180^\circ - \hat{C} - \gamma + ABD + CBE = B$ maken. Stel nu, dat men, in deze berekening, $DE = m$ genomen hebbe, en dat men $AB = a'$ hebbe gevonden; dan zal men, om de wezenlijke waarde van DE te vinden, moeten stellen, $a' : a = m : DE$; dat is, $DE = m \times \frac{a}{a'}$. Met het gebroken $\frac{a}{a'}$ moeten derhalve de berekende afstanden DA , DB , EB , EC en DE vermenigvuldigd worden, om daaruit de ware afstanden te vinden.

N^o. 64. Door

U. H U G U E N I N.

Zij $ABCD$ Fig. 55. het in figuur gegeven onregelmatig vierhoekig veld, hetwelk, door de rechte lijn EF , in het bouwland $EFCD$ en in het weiland $ABFE$ gedeeld is. Zij voorts KM de lijn, welke het bouw- en weiland, zoo als ook het vierhoekig veld, in de vereischte verhoudingen verdeelt; dan zal $AKLE = \frac{1}{m} ABFE$, $FLMC =$

$\frac{1}{n} EFCD$ en $AKMD = \frac{1}{p} ABCD$ moeten zijn.

Laat de zijde BA verlengd worden, tot zij de verlengde zijde CD in H ontmoet; voorts verleng men EF aan beide zijden tot aan de verlengde zijde DC in I , en tot aan de verlengde zijde BA in G .

Daar nu de vierhoek $ABCD$ in figuur en bijge-

gevolg alle zijne deelen, zoo als ook de lijn EF, in groote en rigting gegeven zijn, zoo kan men de lijnen AG, AH, BG, BH, GE, GF, HC, HD, IC, ID, IF, IE en de hoeken BGF en GIH als bekend aanmerken.

Men stelle dan den hoek BGF = α , den hoek GIH = β en de $\text{Sin. } 90^\circ = 1$, zoo is de inhoud des driehoeks KGL = $\frac{1}{2} \text{GK} \cdot \text{GL} \cdot \text{Sin. } \alpha$;

des driehoeks AGE = $\frac{1}{2} \text{AG} \cdot \text{EG} \cdot \text{Sin. } \alpha$;

en des driehoeks BGF = $\frac{1}{2} \text{BG} \cdot \text{GF} \cdot \text{Sin. } \alpha$;

diensvolgens is de inhoud van het weiland ABFE = $\frac{1}{2} (\text{BG} \cdot \text{GF} - \text{AG} \cdot \text{EG}) \text{Sin. } \alpha$, maar, volgens de voorwaarde van het voorstel, moet

AKLE = $\frac{1}{m}$ ABFE zijn; addeert men hier bij den driehoek AGE = $\frac{1}{2} \text{AG} \cdot \text{EG} \cdot \text{Sin. } \alpha$, zoo heeft men driehoek GKL, dat is:

$$\frac{1}{2} \text{GK} \cdot \text{GL} \cdot \text{Sin. } \alpha = \frac{(\text{BG} \cdot \text{GF} - \text{AG} \cdot \text{EG}) \text{Sin. } \alpha}{2m} +$$

..... $\frac{1}{2} \text{AG} \cdot \text{EG} \cdot \text{Sin. } \alpha$; of

$$\text{GK} \cdot \text{GL} = \frac{\text{BG} \cdot \text{GF} - \text{AG} \cdot \text{EG}}{m} + \text{AG} \cdot \text{EG} \dots (1)$$

Op gelijke wijze vindt men:

$$\frac{1}{2} \text{IL} \cdot \text{LM} \cdot \text{Sin. } \beta = \frac{(\text{IE} \cdot \text{ID} - \text{IF} \cdot \text{IC}) \text{Sin. } \beta}{2n} +$$

..... $\frac{1}{2} \text{IF} \cdot \text{IC} \cdot \text{Sin. } \beta$; of

$$\text{IL} \cdot \text{LM} = \frac{\text{IE} \cdot \text{ID} - \text{IF} \cdot \text{IC}}{n} + \text{IF} \cdot \text{IC} \dots (2)$$

Op gelijke wijze, zal men verkrijgen:

$$\text{HK} \cdot \text{HM} = \frac{\text{HB} \cdot \text{HC} - \text{HA} \cdot \text{HD}}{p} + \text{HA} \cdot \text{HD} \dots (3)$$

In elke dezer drie vergelijkingen, is het tweede lid geheel te zamen gesteld uit bekende grootheden; men kan dus derzelver waardijen, uit deze gegevene dadelijk berekenen en alzoo GK . GL = A, IL . IM = B en HK . HM = C als bekend aannemen.

Voorts stelle men de bekende afstanden GH = a , GI = b , IH = c , en de onbekende GK = x ,

$GL = y$ en $AM = z$, zoo is: $HK = a + x$, $IL = b - y$ en $HM = c - z$. Substitueert men deze waarden in de drie gevonden vergelijkingen (1), (2) en (3); zoo heeft men $xy = A$, $(b - y)z = B$ en $(a + x)(c - z) = C$; waaruit men vindt:

$$y^2 + \frac{(abc - aB - bC - Ac)}{C - ac} y = \frac{AB - bcA}{C - ac}$$

en eindelijk, door deze tweede-magts vergelijking oplossen:

$$y = \frac{aB + bC + Ac - abc}{2(C - ac)} \pm \sqrt{\frac{(abc - aB - bC - Ac)^2}{4(C - ac)^2} + \frac{AB - bcA}{C - ac}}$$

II. AANMERKING. Deze, ten aanzien van de wijze, om de oplossing van te vatten en de voorwaarden van het werkstuk in vergelijking te brengen, buiten tegenspraak fraaije oplossing is van den beroemden en welbekenden LAMBERT, welke dezelve aan den Heer SILLERSCHLAG heeft medegedeeld; (zie LAMBERT's *Gelahrter Briefwechsel*, Zweiter Band. §. 412, XX Brief.) dan, behalve dat zij, in dit opzicht, leerzaam is, hebben wij dezelve nog om eenen andere reden medegedeeld; omdat zij namelijk een voortreffelijk voorbeeld oplevert van een niet algemeen bekend verschijnsel, dat, somtijds, in de stelskundige oplossing der Meetkundige Werkstukken, kan plaats hebben, waardoor, gelijk hier het geval is, de onbekenden, door eene bijzondere en aan den oplosser onbekende eigenschap der figuur, van elkander afhangen, waardoor dan, na dat men even zoo vele vergelijkingen uit de figuur heeft afgeleid, als er onbekenden waren aangenomen, één van deze twee dingen gebeuren kan. 1°. Of dat, door die onbekende eigenschap, (welke natuurlijk eene nieuwe vergelijking geeft,) dit uit de figuur afgeleid stelsel van vergelijkingen tot een

een minder aantal gehragt wordes (*) 2^o of dat, door die nieuwe vergelijking, wanneer zij onafhankelijk is van die, welke uit de figuur zijn afgeleid, ter bepaling der onbekenden, eene vergelijking te veel bestaat, in welk geval éene der gegevene voorwaarden overtoefig wordt en bijgevolg met de overige voorwaarden strijdig worden kan. Dit laatste is nu, in de oplossing van den Heer LAMBERT, het geval, en hierdoor wordt zijne oplossing, hoe kunstig en vernuftig ingerigt, bedriegelijk en in de toepassing onbruikbaar.

De reden nu, waarom de Heer LAMBERT zulks niet bemerkt heeft, is gelegen in twee omstandigheden: 1^o. dat hij de voorwaarden der vraag niet ernstig genoeg heeft overwogen; 2^o. dat de onbekende grootheden x , y en z door éene, in den leeftijd van LAMBERT niet algemeen bekende, eigenschap des driehoeks, van elkander afhangen.

1^o. Wanneer de Heer LAMBERT aldus geredeneerd had: het weiland ABFE is, even zoo als het bouwland, DCFE, wegens de gegevene figuur des vierhoeks ABCD en de gegevene stelling der lijn EF, in grootte gegeven; stelt men derhalve de inhouden dezer vierhoeken gelijk aan de bekende letters β en γ ; dan is AKLE

$$= \frac{1}{m} \times \beta \text{ en } ELDM = \frac{n-1}{n} \times \gamma; \text{ daar nu AKMD}$$

$$= \frac{1}{p} \times ABCD \text{ zijn moet, is}$$

$$\frac{1}{m} \times \beta + \frac{n-1}{n} \times \gamma = \frac{1}{p} \times (\beta + \gamma)$$

en

(*) Dit is, onder anderen, het geval van het welbekende Problema van ABRAM DE GRAAF, waarvan de Heer DE GELDER, in zijne *Meek. Anal.* §. 218, *Werkst.* XLIV *Bladz.* 120 en *verv.* het eerst eene oplossing publiek gemaakt heeft.

en hieruit haalt men, de waarde van p afsonderende,

$$p = \frac{mn \times (\beta + \gamma)}{n\beta + m(n-1)\gamma}$$

gevolgelyk blijkt hieruit: dat de letter p , door de gegevene grootte der Wei- en Bouw-landen, benevens door de reden-getallen m en n bepaald zijn, en dat bijgevolg de voorwaarde: „en dat „eindelijk het stuk *AKND* het *pde* gedeelte van „het geheele veld zij,” met de voorgaande voorwaarden strijdig wordt, zoodra p de zoo even uitgebragte waarde niet heeft: — wanneer zeggen wij, de Heer LAMBERT aldus geredeneerd had, zou hij eene overtollige voorwaarde in zijn werkstuk ontdekt hebben.

2°. Maar overtollige voorwaarden looplen niet altijd zoo duidelijk in het oog: zij kunnen, zoo als men ziet, eenen man, zoo schrandere en geoefend, als LAMBERT was, ontsnappen: veeltijds ontdekt men dezelve; doch niet altijd. Men heeft gezien, dat LAMBERT tot de drie vergelijkingen $xy = A$; $(b - y)z = B$ en $(a + x) \times (c - z) = C$ gekomen is; hij moest dus natuurlijk denken: dat de oplossing van dit stelsel van vergelijkingen de zaak voldingen zou. Dan de grootheden x , y en z hangen, door eene fraaije eigenschap der figuur, welke aan LAMBERT schijnt onbekend geweest te zijn, of welke hem, onder het uitwerken zijner oplossing, niet voor den geest gekomen is, van elkander af. Wanneer men zich de lijn *KM* als eene transversale van den driehoek *GHI* denkt; dan is, volgens DE GELDER's *Beginf. der Meetk.* I *Stell.* XIV *Boek*,

$$GK \times HM \times IL = GL \times HK \times IM$$

dat is, naar de, in de oplossing, aangenomene notatie,

$$x(c - z)(b - y) = yz(a + x)$$

en zie daar eene nieuwe vergelijking, welke met de

de drie voorgaanden, $xy = A$; $(b - y)z = B$ en $(a + x)(c - z) = C$, eene vergelijking meer geeft; dan noodig is, om de onbekenden x , y en z te bepalen.

De vergelijkingen (1), (2) en (3) hangen van m , n en p af, en bijgevolg moet, daar p afhankelijk van m en n is, ééne dezer vergelijkingen, met de twee voorgaanden, strijdig worden, en men kan bijgevolg verwachten, dat, wanneer de grootheden m , n en p naar welgevallen aangenomen worden, de grootheid onder het wortel-teeken onbestaanbaar worden zal, gelijk ook in de daad plaats heeft, indien men, in eene geteekende figuur, de waarde van a , b , c , A , B en C met genoegzame naauwkeurigheid bepaalt en m , n en p naar welgevallen aanneemt.

Wanneer men nu de derde of laatste voorwaarde van het vraagstuk, als onbestaanbaar met de twee eersten verwerpt, dan heeft men het stelsel der vergelijkingen $xy = A$; $(b - y)z = B$ en $x(c - z)(b - y) = yz(a + x)$ op te lossen. Uit de twee eersten volgt, $x = A : y$ en $z = B : (b - y)$; substitueert men nu deze waarden van x en z in de derde vergelijking; dan heeft men, na behoorlijke herleiding:

$$y^2 - \frac{2bcA}{Ac - aB} \times y + A \times \frac{b^2c - Bb}{Ac - aB} = 0$$

waaruit derhalve de waarde van y kan gevonden worden; namelijk

$$y = + \frac{bcA}{Ac - aB} \pm \sqrt{\left[A \times \frac{b^2c - Bb}{Ac - aB} + \left(\frac{bcA}{Ac - aB} \right)^2 \right]}$$

en deze is de ware oplossing, welke niet meer, met de bedriegelijke van LAMBERT, dat gemeen heeft, dat zij alleen bruikbaar is, voor het geval, dat ABCD een onregelmatigen vierhoek is, en niet, wanneer AB evenwijdig aan CD is; wijl als dan, in de oplossing van LAMBERT, HK en HM = 00 en de vergelijking (3) in 00 x 00 = 00 x 00 verandert, eene omstandigheid wel-

welke van LAMBERT reeds iets onwettigs in zijn oplossing had moeten doen vermoeden.

II. AANMERKING. Dit zonderling geval kan ons inselaten leeren, dat het altijd bedenkelijk is, het geval der onbekenden, in de oplossing van een Meetkundig Vraagstuk, buiten noodzakelijkheid te vermenigvuldigen, omdat, hoe veel men ook van de eigenschappen eener figuur, weten mag, er altijd nog verborgen en onbekende eigenschappen bestaan kunnen, welke ons (gelijk het geval van LAMBERT was,) misleiden kunnen. Had LAMBERT de oplossing anders aangevat, en minder onbekenden gebruikt, dan zou hij, in den loop der oplossing, de overtoollige voorwaarde des vraagstuk onthekt hebben en niet, door een schijnbare oplossing, zijn misleid geworden. Wij zullen dit kortelijk aantoonen, door de oplossing van onzen vriend, DE GELDER, die onze opmerkzaamheid op dit gewigtig punt gevestigd heeft, mede te deelen.

„Men kan,” zegt de Heer DE GELDER, de oplossing van dit vraagstuk op onderscheidene wijzen aanwatten; doch alle oplossingswijzen brengen niet even gemakkelijk tot een handhaare eindvergelijking.

„Men merke in Fig. 55 op, dat, vermits de lijn EF, met betrekking tot den vierhoek ABCD, in stelling gegeven is, ook de deelen, waarin zij de zijden AD en BC verdeelt, als mede de hoeken, deze zijden snijdt, in grootte dan ook, door constructie worden de inhouden van het bouwland DCFE, als bekend zijnde, door zullen uitdrukken. Om na losen, moeten er twee dingen bepaald worden: 1^o waar het punt L, op de grenslijn EF, moet genomen worden; 2^o onder

der werken hoek door het punt L, de lijn KM, moet getrokken worden, op dat het gegeven vierhoekig stuk lands, in de vereischte evenredigheid verdeeld zij.

Men verlengde de lijnen AD en KM, tot dat zij elkander in Z ontmoeten, en stelle de bekende hoeken $ZEL = \alpha$, $ZAK = \beta$, $ADC = \gamma$; de bekende lijnen $AE = b$ en $DE = c$; de lijn $EL = x$ en den hoek $ELZ = \phi$; dan zal men de inhouden der vierhoeken AKLE en ELMD, op de volgende wijze, in functien van x , ϕ , α , β en γ kunnen bepalen."

„In den driehoek ELZ, is $Z = 180^\circ - (\alpha + \phi)$ en dan zal, uit de bekende evenredigheden, $\text{Sin. } Z : \text{Sin. } L = EL : ZE$, en $\text{Sin. } Z : \text{Sin. } E = EL : LZ$, volgen:

$$ZE = \frac{x \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } (\alpha + \phi)}, \quad \text{en} \quad ZL = \frac{x \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\alpha + \phi)}$$

en, volgens de *Beginf. der Meetk. X. Stell. IX Boek.*

$$\text{Inh. drieh. ELZ} = \frac{1}{2} x^2 \times \frac{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } (\alpha + \phi)}$$

„In den driehoek AKZ, is hoek $AKZ = 180^\circ - Z - ZAK = 180^\circ - 180^\circ + \alpha + \phi - \beta = \alpha - \beta + \phi$, en de zijde $AZ =$

$$ZE = AE = \frac{x \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } (\alpha + \phi)} = b. \quad \text{Men kan}$$

dus ook, door de evenredigheid, $\text{Sin. } AKZ : \text{Sin. } ZAK = AZ : ZK$, de waarde van ZK vinden:

$$ZK = \frac{\text{Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\alpha - \beta + \phi)} \times \left[\frac{x \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } (\alpha + \phi)} - b \right]$$

deze waarde van ZK met die van AZ en $\frac{1}{2} \text{ Sin. } Z$ of $\frac{1}{2} \text{ Sin. } (\alpha + \phi)$ vermenigvuldigd hebbende, verkrijgt men, voor den inhoud van den driehoek AKZ,

$$\text{Inh. AKZ} = \frac{\text{Sin. } E \text{ Sin. } (\alpha + \phi)}{2 \text{ Sin. } (\alpha - \beta + \phi)} \times \left[\frac{x \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } (\alpha + \phi)} - b \right]^2$$

en

en wanneer men nu dezen driehoek van den driehoek ELZ aftrekt, zal men den vierhoek AKLE overhouden, en, volgens de eerste voorwaarde der vraag, zal, indien men $2 M : m = \mu$ stelt,

$$x^2 \times \frac{\sin. \alpha \sin. \varphi}{\sin. (\alpha + \varphi)} - \frac{\sin. \beta \sin. (\alpha + \varphi)}{\sin. (\alpha - \beta + \varphi)} x$$

$$\dots\dots \left[\frac{x \sin. \varphi}{\sin. (\alpha + \varphi)} - b \right]^2 = \mu \dots (1)$$

zijn. Op dezelfde wijze zal men, door middel der driehoeken DMZ en ELZ, volgens de tweede voorwaarde der vraag, $2 (n - 1) N : n = \nu$ stellende, vinden:

$$\frac{\sin. \gamma \sin. (\alpha + \varphi)}{\sin. (\alpha - \gamma + \varphi)} \times \left[\frac{x \sin. \varphi}{\sin. (\alpha + \varphi)} + c \right]^2 -$$

$$\dots\dots x^2 \times \frac{\sin. \alpha \sin. \varphi}{\sin. (\alpha + \varphi)} = \nu \dots (2)$$

„ Wij hebben dus twee vergelijkingen, om de onbekenden x en φ te bepalen, en het blijkt hieruit: dat de laatste voorwaarde der vraag niet slechts overtollig is; maar ook tevens, als van de twee eerste afhankelijk zijnde, met dezen strijdig kan zijn.

„ De ontwikkeling der twee uitgebragte vergelijkingen brengt op twee anderen, in elk van welke de onbekenden x en $\cot. \varphi$ in de tweede magt voorkomen, zoo dat de eindvergelijking tot de vierde magt zal opklimmen, en niet, dan met moeite en eene kunstige zet, tot eene vierde magts vergelijking van de tweede magts vorm kan gebragt worden.” — Wij verlaten dus deze oplossing, (*) om de volgende van den Heer DE GELDER, welke in de uitvoering veel eenvoudiger en gemakkelijker is, mede te deelen.

„ Om

(*) Welker begin wij hier mededeelen, om de jonge beoefenaars te oefenen; in het vinden van de verschillende gezigpunten, uit welke een vraagstuk, in de oplossing, kan beschouwd worden, HUGUENIN

„Om tot eene gemakkelijker oplossing te komen,” vervolgt hij: „stelle men, *Fig. 55*: $GI = 2h$; $GL = h - x$; $LI = h + x$; $GA = f$, $GE = g$; $FI = k$, $CI = l$: inhoud drieh. $GEA = P$, inhoud drieh. $IFC = Q$, welke inhouden, als bekende grootheden, kunnen aangemerkt worden: voorts stelle men hoek $BGI = \alpha$, en hoek $GIH = \gamma$; voorts, als boven, $ABFE = M$ en $DCFE = N$ en eindelijk den onbekenden hoek $ELK = \phi$; dan heeft men, in den driehoek GLK , $\text{Sin. } K : \text{Sin. } L = GL : GK$; en nog, in den driehoek ILM , $\text{Sin. } M : \text{Sin. } L = IL : IM$, dat is, in onze aangenomene notatie,

$$\text{Sin. } (\alpha + \phi) : \text{Sin. } \phi = h - x : GK$$

$$\text{Sin. } (\lambda + \phi) : \text{Sin. } \phi = h + x : IM$$

de waarden van GK en IM worden dan:

$$GK = \frac{(h - x) \text{Sin. } \phi}{\text{Sin. } (\alpha + \phi)}, \text{ en } IM = \frac{(h + x) \text{Sin. } \phi}{\text{Sin. } (\lambda + \phi)}$$

„Nu is, volgens het III Gevolg, XI *Stell.* IV *Boek* mijner *Beginfelen*,

$$GA \times GE : GK \times GL = dr. GAE : dr. GKL$$

dat is, in onze aangenomene waarden,

$$fg : \frac{(h - x)^2 \text{Sin. } \phi}{\text{Sin. } (\alpha + \phi)} = P : dr. GKL.$$

en wij hebben derhalve, voor den inhoud van den driehoek GKL , de waarde,

$$\text{Inh. drieh. } GKL = \frac{P \times (h - x)^2 \times \text{Sin. } \phi}{fg \times \text{Sin. } (\alpha + \phi)}$$

hiervan aftrekkende driehoek $GAE = P$, blijft er vierhoek $AKLE$ over, en wij hebben derhalve,

daar $AKLE = \frac{1}{m}$ $ABFE$ moet zijn, de vergelijking:

$$\frac{P \times (h - x)^2 \times \text{Sin. } \phi}{fg \times \text{Sin. } (\alpha + \phi)} - P = \frac{M}{m} \quad \text{of,}$$

of, alles door P deelende en $\frac{M}{mP} = \mu$ stellende,

$$\frac{(h-x)^2 \times \text{Sin. } \phi}{fg \times \text{Sin. } (x + \phi)} - 1 = \mu$$

Wanneer men de uitdrukking $\text{Sin. } (x + \phi)$ ontwikkelt en de teller en noemer van de breuk, uitmakende den voorsten term van het eerste lid dezer vergelijking, door $\text{Sin. } \phi$ deelt; dan vindt men, na behoorlijke herleiding,

$$\text{Cos. } \phi = \frac{(h-x)^2 - (\mu+1)fg \text{Cos. } x}{(\mu+1)fg \text{Sin. } x} \dots\dots\dots (1)$$

„ Wanneer men de driehoeken IFC en ILM, op dezelfde wijze behandelt, (het geen niet noodig is alhier uittewerken,) vindt men, $N : nQ = v$ stellende,

$$\text{Cos. } \phi = \frac{(h+x)^2 - (v+1)kl \text{Cos. } \lambda}{(v+1)kl \text{Sin. } \lambda} \dots\dots\dots (2)$$

en zie daar twee vergelijkingen, met welke behulp x zal kunnen bepaald worden.

„ Men stelde kortheldshalve,

$$(\mu+1)fg \text{Cos. } x = p \quad (\mu+1)fg \text{Sin. } x = q$$

$$(v+1)kl \text{Cos. } \lambda = r \quad (v+1)kl \text{Sin. } \lambda = s$$

dan geeft de vergelijking van de twee bovenstaande waarden van $\text{Cos. } \phi$

$$\frac{(h-x)^2 - p}{q} = \frac{(h+x)^2 - r}{s}$$

en deze oplofende (het geen niet moeilijk is,) vindt men de eindvergelijking:

$$x^2 + \frac{2h(q+r)}{q-s}x = -h^2 + \frac{qr-ps}{q-s}$$

en eindelijk

$$x = \frac{-h(q+r) \pm \sqrt{4h^2qs + (qr-ps)(q-s)}}{q-s}$$

„ Deze waarde van x bekend zijnde, zal men den hoek ϕ , door ééne der vergelijkingen (1) of (2), bepalen en alles zal bekend zijn.”

„ De tijd laat mij niet toe,” vervolgt de Heer

DE

DE GELDER, „ om de fraaije aanmerkingen, waartoe deze oplossing aanleiding geeft, (*) U mede te deelen; ik zal van dezelve gebruik maken voor de Verhandeling, welke ik, in mijne *Meetkundige Analyse*, *Bladz.* 223. beloofd heb, en welke hoofdzakelijk ook zal moeten strekken, om den jongen Beoefenaren eene nieuwe bijdrage te leveren, om hun genie te ontwikkelen. De meeste Liefhebbers vergenoegen zich, wanneer zij eene formule voor de waarden der onbekenden verkregen hebben, zonder zich verder in te laten met de zoo noodige en leerzame discusie der omstandigheden, welke het problema oplevert, het geen nogtans de ware weg is, om eenmaal, in den waren zin van het woord, Wiskunstenaar te worden.”

Tot dus verre het uittreksel zijner medegedeelde oplossing. Zonder nu zijne beloofde aanmerkingen te willen vooruitloopen, merken wij aan: dat zij, welke zouden wenschen, dit Werkstuk op getallen toe te passen, met de teekens der grootheden omzigtig moeten te werk gaan.

N^o. 65. Door

MOSES LEMANS, C. J. van Setten, F. J.
: Meen, A. van der Swan, P. van Eeghen, Chr.,
en Jan Pauw.

. Rig, op het uiteinde A (*Fig.* 56.) des verschils AB, de loodlijn AD, en verleng AB onbepaald tot in C; deel den hoek DAC midden door door AE; beschrijf uit B, als middelpunt, met de hypothenuze, als radius, eenen cirkelboog, snijdende
AE

(*) De oplossing, welke de Heer HUGUENIN op de bedriegelijke van LAMBERT laat volgen, is voor geens minder slijke aanmerkingen vatbaar, DE GELDER.

AE in F, en trek de loodlijn FG; dan is BFG de begeerde driehoek.

BEWIJS. In den driehoek AFG is $\angle FAG = 45^\circ$ (*Constructie*), en dus $\angle AFG = 45^\circ$; dus driehoek AFG gelijkbeenig; weshalve $AG = FG$.

ANDERS, door C. J. van Brussel.

Het opgegeven voorstel, om namelijk, op eene gegevene lijn als hypothenuse, eenen regthoekigen driehoek te beschrijven, waarvan het verschil der regthoekszijden gegeven is, staat met dat, waarin de som der regthoekszijden gegeven is, in zulk een naauw verband, dat de oplossing van het eene die van het andere insluit, zie hier de constructie, welke op de beide voorstellen toepasselijk is:

Laat AC (*Fig. 57.*) de gegevene hypothenuse zijn en op dezelve een cirkel beschreven worden; laat de halve cirkel CDA door D in twee gelijke deelen gedeeld zijn, en uit D, met $CD = AD$ als radius; een andere cirkel CH'AH' beschreven worden; zoo dan uit A eene koorde AH getrokken wordt, welke gelijk aan de gegevene som of het gegeven verschil der regthoekszijden is, zal deze koorde, of derzelver verlengde, den eersten cirkel ergens snijden in B; trekkende dan BC; dan zal: 1°. de driehoek ACB de begeerde zijn; 2°. de som der regthoekszijden zal gelijk aan de gegevene lijn AH zijn, wanneer AH grooter dan AC is; 3°. het verschil der regthoekszijden zal gelijk de gegevene lijn zijn, wanneer deze kleiner dan AC is.

BEWIJS van het eerste. Laat CH getrokken worden, dan is, in den regthoekigen driehoek CHB, $\angle CHB + \angle HCB = L$; maar $\angle CHB = \frac{1}{2} \angle CDA = \frac{1}{2} L$; dus $\angle CHB = \angle HCB = \frac{1}{2} L$, en bijgevolg $BC = BH$, waaruit dan volgt, dat $CB + AB = HB + AB = AH$,
de

de som der regthoekszijden is, dus gelijk aan AH, wanneer $\triangle ABC$ in den bovensten halven cirkel valt. Evencens is, in den regthoekigen driehoek $CH'B'$, $\angle CH'B' + \angle H'CB' = L$; maar $\angle CH'B' = 2L - \angle CH'A = \angle CHA = \frac{1}{2}L$; dus $\angle CH'B' = \angle H'CB' = \frac{1}{2}L$ en bijgevolg $CB' = H'B'$, en dus $AB' - CB' = AB' - B'H' = AH'$; het verschil der regthoekszijden is dus gelijk aan de gegebene lijn, wanneer de $\triangle AB'C$ in den benedensten halven cirkel valt.

Bewijs van 2^o en 3^o. Laat AE regthoekig op AC zijn, dan is zij eene raaklijn van den kleinsten cirkel; waaruit volgt, dat alle koorden AH, welke binnen den regten hoek CAE vallen, den bovensten halven cirkel CDA, en dat alle koorden AH' of AH'', welke buiten dezen hoek liggen, verlengd zijnde, den benedensten halven cirkel snijden; ten tweede is deze lijn $AE = AC$; want $AC^2 = 2AD^2$ zijnde, is AC de zijde van het kwadraat in den grooten cirkel beschreven, en daar AE regthoekig op AC is, is AE mede een der zijden van dit kwadraat; alle de lijnen, die dus binnen den hoek CAE vallen, zijn grooter dan AC, en alle, die buiten dien hoek vallen, zijn kleiner dan AC; hier uit volgt dan: dat, wanneer de koorde AH grooter dan AC is, zij den bovensten halven cirkel zal snijden, en dat bijgevolg, volgens het bewijs van het eerste, in dit geval, de som der regthoekszijden gelijk AH zal zijn; maar dat het omgekeerde plaats zal hebben, wanneer AH kleiner dan AC is. Het is klaar, dat er, in ieder geval, twee oplossingen komen; want wij kunnen uit A altoos twee koorden AH en AH^o of AH' en AH'' trekken, welke even lang zijn, en verkrijgen daar door twee driehoeken ABC en AB^oC of AB'C en AB''C. Deze twee oplossingen verschillen echter alleen in den stand der driehoeken; want $AH = AH^o$ zijnde, is $\angle H^oAF = \angle HAF$

en bijgevolg zijn de bogen DB° en DB , waarop deze hoeken staan gelijk; waaruit dan gemakkelijk volgt, dat $CB^\circ = AB$ en $AB^\circ = CB$ is, en dit bewijs is mede ligtelijk toe te passen op de driehoeken CBA en $CB'A$.

Deze twee oplossingen herleiden zich slechts tot ééne, wanneer de gegevene lijn $AH =$ de middellijn $AF = AC \sqrt{2}$ is; want dan verkrijgen wij alleen den driehoek ABC ; wanneer dus AH grooter dan AF gegeven ware, zou het voorstel onmogelijk zijn; $AH = AF = AC \sqrt{2}$ is dus de limiet in grootte voor de som der regthoekszijden. Zoo AH op zijn kleinst mogelijk en dus gelijk nul genomen wordt, wordt de lijn $AH'B'$ tangens van den grooten cirkel en het punt B valt in D' ; het verschil der regthoekszijden is hier nul en de twee limieten voor AH geven dus dezelfde oplossing. Wanneer AH eindelijk gelijk AC is, valt H in C en de driehoek herleidt zich in dit geval tot de enkele lijn AC . (*)

N O G A N D E R S, door U. Huguenin.

In den regthoekigen driehoek ABC (*Fig. 58.*) is de hypothenuse $BC = a$, het verschil der regthoekszijden $AC - AB = DC = b$ bekend. Men stelde den onbekenden hoek $ACB = \phi$, zoo is, de *Sinus Totus* $= 1$ zijnde, $AB = a \sin. \phi$, $AC = a \cos. \phi$, en $a \cos. \phi - a \sin. \phi = b$, of $\cos. \phi - \sin. \phi = \frac{b}{a}$. Daar voorts $\cos. 45^\circ =$
 $\cos.$

(*) En hier mede kan men derhalve ook een ander vraagstuk, door den Heer MOZES LEMANS, ter oplossing ingezonden, om namelijk eenen regthoekigen driehoek te beschrijven, waarvan de hypothenuse en de som der regthoekszijden gegeven is, voor opgelost houden. *Prov. Wetensch. Commissie.*

$$\frac{\cos. 45^\circ}{\sin. 45^\circ} = 1 \text{ is, zoo is ook } \cos. \phi = \frac{\cos. 45^\circ}{\sin. 45^\circ} \times$$

$$\sin. \phi = \frac{b}{a}, \text{ of } \sin. 45^\circ \times \cos. \phi = \cos. 45^\circ \times$$

$$\sin. \phi = \frac{b \sin. 45^\circ}{a}; \text{ dat is } \sin. (45^\circ - \phi) =$$

$$\frac{b}{a\sqrt{2}}; \text{ waarin } \phi \text{ alleen onbekend is, en gemakke-}$$

lijk kan worden berekend.
De tweede wortel $\sin. (180^\circ - (45^\circ - \phi))$,
of $\sin. (135^\circ + \phi) = \frac{b}{a\sqrt{2}}$, geeft den tegenge-
stelden driehoek Cab : want zoo men den hoek
 $ACb = 135^\circ + \phi$ maakt, is hoek $bCa =$
 $45^\circ - \phi$: waaruit alzoo twee gelijke, doch te-
geng. stelde driehoeken BAC en bac ontstaan.

Onze vergelijking $\sin. (45^\circ - \phi) = \frac{b}{a\sqrt{2}}$ laat
zich ook gemakkelijk construeren. Men rigte,
Fig. 59, op $BC = a$ de loodlijn $BE = BC$ en trekke
 CE . Op deze lijn, als diameter, beschrijve men
den halven cirkel EBC en stelle voorts, van E naar
 B , in den omtrek de lijn $EF = b$ uit; vervolgens
trekke men CF , en men late uit B op CF de
loodlijn BA vallen; dan zal BAC de begeerde
driehoek zijn.

Want, zoo men op CE eene willekeurige lengte
 $CG =$ de éénheid of $\sin. Totus$ aanneemt, en
uit G op FC de loodlijn GH trekt, heeft men
 $CE : EF = CG : GH$; dat is: wijl $CE =$
 $\sqrt{2} BC = a\sqrt{2}$ is; $a\sqrt{2} : b = 1 : GH$, of
 $GH = \frac{b}{a\sqrt{2}} = \sin. (45^\circ - \phi)$; maar $BCE =$
 $BEC = 45^\circ$ zijnde, zoo is $BCA = 45^\circ -$
 $(45^\circ - \phi) = \phi$; gevolglijk is $AC = BC \times$
 $\cos. \phi = a \cos. \phi$ en $BA = a \sin. \phi$; waaruit
dus volgt, dat $AC = BA = a \cos. \phi =$
 $a \sin. \phi = b$ wezen zal, zoo als vereischt wordt.

N^o. 66. Door

MOZES LEMANS, *A. van der Swan, J. C. van Setten, Jan Pauw, P. van Eeghen, Chz., en C. J. van Brussel.*

Stel den ouderdom $= p + q$, de vijfhoekige getallen $\frac{3p^2 - p}{2} = x + 338$ en $\frac{3q^2 - q}{2} = x - 338$; dan is het verschil der cuben $= 6,38x^2 + 2 \cdot (338)^3$ en de som der getallen $= 2x$, dus

$$12.338x^3 + 4 \cdot (338)^3 x = 630182948096$$

$$\text{of } \frac{x^3}{3} + 114244x - 466111648 = 0$$

$$\frac{\frac{x^3}{3}}{3} \quad \frac{114244x}{3} \quad \frac{-466111648}{3}$$

$$y^3 + 342732y - 4195004832 = 0$$

Hieruit is $y = 1542$, dus $x = \frac{1}{3}y = 514$, $x + 338 = 852 = a$, en $x - 338 = 176 = b$; voorts $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{24a + 1} = 24$ en $q = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{24a + 1} = 11$; dus $p + q = 35$.

N^o. 67. Door

JAN PAUW, *C. J. van Setten, P. van Eeghen, Chz., C. J. van Brussel, A. van der Swan, C. Lantz Jr., en N. Bondt.*

Een gouden dukaat is 210 halve stuiv., een halve dukaton 63, een goud-gulden 56, een gulden 40 en een zesthalf 11 halve stuivers; dus

210,

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 163

$$\begin{array}{r}
 210, 63, 56, 40, 11 \\
 \hline
 2 \quad 105, 63, 28, 20, 11 \\
 \hline
 2 \quad 105, 63, 14, 10, 11 \\
 \hline
 2 \quad 105, 63, 7, 5, 11 \\
 \hline
 3 \quad 35, 21, 7, 5, 11 \\
 \hline
 5 \quad 7, 21, 7, 1, 11 \\
 \hline
 7 \quad 1, 3, 1, 1, 11
 \end{array}$$

derhalve kan hij het huis betalen met $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$ halve stuivers, + 1 zesthalf, zijnde 2521 zesthalf, of 623 guld. $5\frac{1}{2}$ stuiv.

Nº. 68. Door

JAN PAUW, P. van Eeghen, Chr., J. C. van Sellen, en A. van der Swan.

Mang.	waard	Mang.	waard
12 —	10	20 —	18
$\frac{1}{2} \dots 2$ —	2	$\frac{1}{3} \dots 4$ —	4
10 —	8	16 —	14
16 —	14		
26 —	22	39 : komt 33 waardij	
$\frac{1}{2} \dots 39$ —	$\frac{1}{2}$ is	13	in geld
de waarde van B zijn goed 46 (genoten			

Nº. 69. Door

C. J. van Brussel, en C. Lantz Jr.

Stel dat hij van A, x fl, van B, y fl, van C, z fl en dus van D, $2x$ fl koopt; dan kost
L 5 het

108 ONTBINDINGEN VAN DE

het fl van A, $x - y$ guld. en dus $x \text{ fl}$, $xz - xy$ guld., het fl van B, x guld. en dus $y \text{ fl}$, xy guld.; het fl van C, y guld. en dus $z \text{ fl}$, zy guld., het fl van D, z guld. en dus $2x \text{ fl}$, $2xz$ guld., en dus heeft men:

$$3x + y + z = 60 \text{ en } 3xz + zy = 800$$

$$3xz + zy + z^2 = 60z$$

$$\text{dus } z^2 = 60z - 800$$

waaruit $z = 40$ of 20 ; neemt men nu $z = 20$, dan is $y = 40 - 3x$, waarin $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ en 13 gesteld kan worden, en dus $y = 37, 34, 31, 28, 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4$ en 1 , dat is 13 antwoorden. Neemt men $z = 40$, zoo wordt $y = 20 - 3x$, waarin $x = 1, 2, 3, 4, 5$ en 6 zijn kan, dus $y = 17, 14, 11, 8, 5$ en 2 ; dat is 6 antwoorden; dus in het geheel 19 antwoorden.

Nº. 70. Door

P. WOLFF, C. J. van Brussel, A. van der Swan, J. C. van Setten, C. Lantz Jr, Jan Pauw, N. Bondt, en P. van Eeghen Chz.

Stel DE (Fig. 60), verbeeldende de kleinste toren $= x$, dan is AC $= 280$, DC $= 220$, AB $= x + 45$, en door het Theorema van PYTHAGORAS

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{80425 + 90x + x^2}$$

$$\text{en } CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{x^2 + 48400}$$

dus $\sqrt{80425 + 90x + x^2} = 75 + \sqrt{x^2 + 48400}$
Deze vergelijking in het vierkant brengende, komt

$$80425 + 90x + x^2 = 54025 + x^2 + 150\sqrt{x^2 + 48400}$$

of, de gelijksoortige termen vereënnigende:

$$26400 + 90x = 150\sqrt{x^2 + 48400}$$

$$30) \frac{26400 + 90x}{880 + 3x = 5\sqrt{x^2 + 48400}}$$

De

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 169

Deze wederom in het vierkant brengende, heeft men:

$$774400 + 5280x + 9x^2 = 25x^2 + 1210000$$

of eindelijk

$$\begin{array}{r}
 5280x = 16x^2 + 435600 \\
 16) \hline
 330x = x^2 + 27225 \\
 x^2 - 330x + 27225 = (x - 165)^2 = 0 \\
 \text{waaruit } x = 165 \text{ de kleinste,} \\
 \text{en } x + 45 = 210 \text{ de hoogste toren.}
 \end{array}$$

N^o. 71. Door

P. van Eeghen Chz., P. WOLFF, A. van der Swan, C. J. van Brussel, J. G. van Setten, C. Lantz Jr. en N. Bondt.

Stel dat er waren $7\frac{1}{2} + x$ mannen en $7\frac{1}{2} - x$ vrouwen; dan is, volgens het voorstel,

$$9(7\frac{1}{2} + x)^2 + 9(7\frac{1}{2} - x)^2 = (7\frac{1}{2} + x)^3 + (7\frac{1}{2} - x)^3$$

$$\text{of } 9(112\frac{1}{2} + 2x^2) = 843\frac{3}{4} + 45x^2$$

$$112\frac{1}{2} + 2x^2 = 93\frac{3}{4} + 5x^2$$

$$18\frac{3}{4} = 3x^2$$

$$75 = 12x^2$$

25 = $4x^2$ dus $x = 2\frac{1}{2}$; derhalve zijn er 10 mannen en 5 vrouwen geweest.

N^o. 72. Door

P. van Eeghen, Chz., P. WOLFF, J. C. van Setten, C. Lantz Jr., A. van der Swan, C. J. van Brussel, en N. Bondt.

Stel dat er waren $8 + x$ mannen en $8 - x$ vrouwen; dan is het legaat geweest $(8 + x)^3 + (8 - x)^3 = 1024 + 48x^2$; nu verdienen al de personen te zamen $(8 + x)^2 + (8 - x)^2 = 128 + 2x^2$ in de week; dus in drie weken $384 + 6x^2$; hier bij het legaat $1024 + 48x^2$,
komt

komt $1408 + 54x^2 = 1624$ en $54x^2 = 216$,
 dus $x^2 = 4$, en $x = 2$; dus 10 mannen en
 6 vrouwen.

Nº. 73. Door

O. S. B A N G M A.

Laat ABCD (*Fig. 61.*) een parallelogram zijn,
 AC en BD de diagonalen, elkander midden door
 deelende in Z. Maak $AE = BF = DK = CL$.
 Trek EK en FL, loopende evenwijdig AD en
 BC, en snijdende AC en BD in X, Y, U, en
 W; dan is

$$AY : AZ = DX : DZ$$

$$\text{maar } AY = CW \text{ en } AZ = CZ$$

$$\text{dus } CW : CZ = DX : DZ$$

dus XW en YU trekkende, zullen deze evenwijdig
 loopen aan AB en DC.

Laten AD en BC door XW en YU gesneden
 worden, in L, M, H en G, dan heeft men:

$$\begin{aligned} AM : AL : AD &= AY : AW : AC \\ &= AE : AF : AB \end{aligned}$$

dus ME en LF trekkende, zullen deze evenwijdig
 loopen aan BD; dus ook IH en KG evenwijdig
 aan BD; om dezelfde rede LK, MI, EH
 en FG evenwijdig aan AC.

Laten ME, IH, LK en FG elkander ontmoeten
 in P, N, Q en O; laten ook LF, KG, MI en EH
 elkander ontmoeten, in T, R, V en S, dan zijn,
 uit de beschouwing der driehoeken LPH, MTG
 en AZB, de lijnen LP, MT en AZ gelijk en
 evenwijdig, en daar hunne uiteinden L, M en A
 in eene regte lijn gelegen zijn, liggen de
 uiteinden P, T en Z ook in eene regte lijn,
 die evenwijdig aan AD is; dus ook de punten
 Q, V en Z in eene regte lijn evenwijdig aan
 BC; derhalve PTZVQ eene regte lijn evenwijdig
 aan AD of BC. Om dezelfde rede is NRZSO eene
 reg-

regte lijn evenwijdig aan AB of DC. Als men nu boomen plant in alle punten, die met letters geteekend zijn, heeft men 24 bomen en 20 regels van 4 bomen ieder, te weten: AB, MG, LH, DC, AD, EK, FI, BC, AC, BD, NQ, LF, KG, PO, NP, MI, EH, QO, NO, en QP.

Als nu de punten T en W in eene regte lijn vielen met D en O, zouden ook W en S in eene regte lijn vallen met P en B, S en U met C en Q, U en V met O en A, V en Y met B en N, Y en R met Q en D, R en X met A en P, X en T met N en C, het welk 8 nieuwe regels zoude opleveren; makende, met de 20 reeds gevondene, 28 in het geheel.

Maar op dat TW door het punt D gaan zal moeten de parallellen MI en AC door de punten T en W in dezelfde rede gedeeld zijn, en op dat TW door het punt O gaan zal, moeten de parallellen QP en FI door de punten T en W in dezelfde rede gedeeld zijn.

Doch, wanneer een van deze voorwaarden plaats heeft, zal de andere ook plaats hebben; want, omdat PO evenwijdig NQ is, heeft men:

$$QT : TP = MT : TI$$

en omdat DC evenwijdig AB is, heeft men:

$$FW : WI = AW : WC$$

zoo nu $MT : TI = AW : WC$ is

zal ook $QT : TP = FW : WI$ zijn.

Stel dan $MT : TI = AW : WC$

$$\text{of } MT : MI = AW : AC$$

komt $AZ : AW = AW : AC$

$$\text{of } \frac{1}{2} AC : AW = AW : AC$$

Maar AB is door het punt F in dezelfde rede gedeeld, als AC door het punt W, dus

$$\frac{1}{2} AB : AF = AF : AB$$

Maak dan AF midden-evenredig tusschen AB en $\frac{1}{2} AB$, of, wat op het zelfde uitkomt, maak AF gelijk de halve diagonaal van het vierkant op AB, en beschrijf de figuur, zoo als in de oplossing

ling gedaan is; dan zullen de 24 boomen 28 regels maken van 4 boomen ieder, naar den eisch van het voorstel.

AANMERKING. De diagonalen, zijden en parallellen van de beide parallelogrammen ABCD en NQOP, worden alle door de boomen in dezelfde rede gedeeld; want $NK : KP = QT : TP = MT : TI = AW : WC = AL : LD = AF : FB$ enz. Het is dus onverschillig met welke van deze lijnen men de constructie beginnen wil, als men dezelve maar zoodanig deelt, dat het grootste deel midden-evenredig zij tusschen de geheele lijn en de halve lijn. Begin dan met de diagonalen NO en PQ, en stel dezelve, om de figuur regelmatig te maken, loodrecht op elkander; dan wordt PNQO een ruit en ABCD een regthoek, in welk geval de tuin de gedaante verkrijgt van *Fig. 62*.

Maar men kan nog, op eene andere wijze, eene regelmatige figuur verkrijgen, door te maken, dat DNBO een regthoek wordt; dan wordt ook PAQC een regthoek; want $NP = MI = YC$, dus PC evenwijdig NY; voorts $DC = LH = NS$, dus CS evenwijdig DN; dus $\angle BCQ = \angle DNB = \text{regt.}$ Verder $DI = ZO = ZD = OI$, dus $DC = OP$ (om dat hunne evenmatige deelen DI en OI gelijk zijn); maar $ZP = ZC$, dus $\triangle DZC = \triangle OZP$, waaruit blijkt, dat de parallelogrammen ABCD en PNQO in dit geval gelijk en gelijkvormig zijn. In dit geval kan men beginnen met den regthoek DNBO te beschrijven, NO en BD te trekken, $NS = \sqrt{NZ \times NO}$ te maken; voorts $\triangle NEB = \triangle DIO = \triangle DZO$ maken, eindelijk $AB = NQ = OP = DC = NS$ maken, waaruit alle overige punten, door het trekken van lijnen van zelve voortvloeijen.

VOORGAANDE VOORSTEL

Nº. 74. Door

J. R. SCHMIDT, *P. van Eegh*
Moses Lemans.

In de Beginselen der Meetkunde v. J. DE GELDER, is, in § 976, aangestellende de hoogte of dikte BG (A eenig bolvormig segment gelijk h, AB van het grondvlak r, de inhoud ment zal zijn $= \frac{1}{2} \pi h (r^2 + \frac{1}{2} h)$ van den omtrek tot de middellijn zijn

Stellende nu de middellijn GK van lijk m; dan is BK $= m - h$, en BG zijnde, $r^2 = m h - h^2$; breng ze waarde van r^2 in onze formul verandert dezelve in $\frac{1}{2} \pi h^2 (3 m -$ deze formule dient nu, om den inh bolvormig segment te vinden, want hoogte, benevens de middellijn van e geeven zijn.

Wordt nu verder $h = \frac{m}{n}$ gesteld,

ze laatste formule in $\frac{1}{2} \pi \frac{m^3}{n^3} (3 n -$

hierdoor is nu de inhoud van een bo ment uitgedrukt, door de middellijn en de reden tusfchen deze middellijn te van het segment.

Laat nu, om deze laatste formule stel toe te pasfen, GB, BC, CD, even groot onderfteld worden; dan is

$\frac{m}{n}$; GC $= 2 h = \frac{2 m}{n}$; GD $= 3 h$

zijn; zoo wij dan, in de laatste for

lijk, in $\frac{1}{2} \pi \frac{m^3}{n^3} (3 n - 2)$, voor n

ftellen, n, 2 n, 3 n, enz.; dan zulle

174 ONTBINDINGEN VAN DE

de inhouden der op elkander volgende segmenten verkrijgen :

$$\text{voor het } 1^{\text{e}} \text{ segment} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (3n - 2)$$

$$2^{\text{e}} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (12n - 16)$$

$$3^{\text{e}} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (27n - 54)$$

$$4^{\text{e}} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (48n - 128)$$

en, in het algemeen:

$$\text{voor het } p^{\text{e}} \text{ segment} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (3p^2 n - 2p^3).$$

Trekkende nu ieder dezer inhouden van den volgenden af; dan blijft er, voor de inhouden der achtervolgende bolvormige schijven, het eerste segment als de eerste schijf aanmerkende,

$$\text{voor de } 1^{\text{e}} \text{ schijf} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (3n - 2)$$

$$2^{\text{e}} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (9n - 14)$$

$$3^{\text{e}} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (15n - 38)$$

$$4^{\text{e}} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (21n - 74)$$

enz. en, in het algemeen:

$$\text{voor de } p^{\text{e}} \text{ schijf} \dots \frac{1}{8} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} [3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)]$$

waaruit dan volgt: dat de inhouden dezer schijven tot elkander in reden zijn; als de getallen,

(α) $3n - 2$; $9n - 14$; $15n - 38$; $21n - 74$; enz.
 . . . tot $3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)$

waarin n de reden is van de dikte der schijven tot de

Ben wij slechts, in de algemeene term van (n) , namelijk $3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)$; $n = 30$, en p achtereenvolgens 7 en 19 te stellen, waardoor wij verkrijgen 916 en 1272, en dus staan deze twee schijven tot elkander als de getallen 229 en 318.

AANMERKING. Wij zien, uit deze voorbeelden, en het is ook, uit den aard der zaak ontwijfelbaar, dat, wanneer n een geheel getal, en dus h een evenmatig deel van de middellijn is, de inhouden der schijven in dezelfde orde moeten afdalen, waarin zij eerst waren opgeklommen; en, in de daad, wij kunnen ook rechtstreeks aantoonen: dat, 1°. Wanneer n een geheel positief getal is, onze reeks $3n - 2$; $9n - 14$, $15n - 38$ enz. tot $3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)$, altijd zoo vele positieve termen zal hebben, als er denuden in n zijn; 2°. dat deze n positieve termen in dezelfde orde zullen afdalen, waarin zij eerst waren opgeklommen.

Bewijs van het eerste. Stel, in den algemeenen term, $p = n$, dan komt er voor den n term $3n - 2$; daar nu n niet kleiner dan één kan zijn, is deze waarde altijd positief.

Maar, stellende $p = n + 1$, komt er voor den $(n + 1)$ term der reeks, $-(3n + 2)$, welke waarde, daar n positief is, altijd negatief zal zijn.

Daar dan de n term nog positief, maar de $(n + 1)$ negatief is, blijkt hieruit: dat, wanneer n een geheel positief getal is, de reeks nooit meer noch minder dan n positieve termen zal hebben.

Bewijs van het tweede. Stel, in den algemeenen term, $p = n - g$; dan vinden wij, na herleiding, voor den $(n - g)$ term, $3(2g + 1)n - 2(3g^2 + 3g + 1)$, en stelt men g in den algemeenen term, $g + 1$ in plaats van p , komt er eveneens

$BC = x - h$; $CD = y - x$; $DE = z - y$
 enz. waardoor het begeerde gevonden is.

VOORBEELD. Laat $m = 10$ en $h = 3$ gegeven zijn; dan is $3h^2m - 2h^3 = 216$, en onze vergelijkingen zijn, na dezelve door twee gedeeld te hebben:

$$x^3 - 15x^2 + 216 = 0; y^3 - 15y^2 + 324 = 0;$$

$$z^3 - 15z + 432 = 0,$$

waaruit $x = 4.54$ ten naasten bij; $y = 6$;
 $z = 7.66$ ten naasten bij, zoo dat de begeerde dikten der schijven, in dit geval, zijn; $h = 3$;
 $x - h = 1.54$; $y - x = 1.46$; $z - y = 1.66$;
 en er kunnen, in dit geval, niet meer dan deze vier schijven van gelijken inhoud, van den bol worden afgesneden.

AANMERKING. Wij vinden voor den inhoud van het eerste segment $\frac{1}{8}\pi (3h^2m - 2h^3)$; stellende nu $h = m$; dan verandert dit segment in den inhoud van den geheelen bol, en wij hebben dus voor den inhoud van den geheelen bol $\frac{1}{8}\pi m^3$; het eerste segment is dus in den geheelen bol

$\frac{3h^2m - 2h^3}{m^3}$ malen begrepen, en er kunnen dus

wanneer de middellijn van den bol m , en dikte van de eerste schijf (welke te gelijker tijd het eerste segment is,) h gegeven is, $\frac{3h^2m - 2h^3}{m^3}$

schijven van gelijken inhoud, worden afgesneden; en in de daad, stellende, in de vergelijking $\frac{2X^3}{m^3} - \frac{3mX}{m^3} + p(3h^2m - 2h^3) = 0$; $p =$

$\frac{3h^2m - 2h^3}{m^3}$; wordt dezelve, $2X^3 - 3mX^2 + m^3 = 0$, waaruit $X = m$.

wij den inhoud van de q^e schijf $= x$ stellen
 $a : x = 3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1) :$
 $3(2q - 1)n - 2(3q^2 - 3q + 1)$ waaruit
 $x = a \times \frac{3(2q - 1)n - 2(3q^2 - 3q + 1)}{3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)}$
 voor den inhoud van de q^e schijf.

Zoo wij nu den inhoud van den geheelen bol i stellen en de middellijn m , hebben wij in de *Aanmerking* op het 75^e voorstel reeds gevonden,
 $i = \frac{1}{6} \pi m^3$.

Maar in het 74^e voorstel, is, voor den inhoud van de p^e schijf, gevonden $\frac{1}{6} \pi \times \frac{m^3}{n^3} [3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)]$. Derhalve hebben wij, omdat deze inhoud $= a$ gegeven is,

$$a : i = \frac{1}{6} \pi \cdot \frac{m^3}{n^3} (3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)) : \frac{1}{6} \pi m^3$$

waaruit $i = a \times \frac{n^3}{3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)}$,
 waarvoor dan ook de inhoud van den geheelen bol, in onze gegevens is uitgedrukt en alzoo het voorstel is opgelost.

AANMERKING. Wil men ook de middellijn in onze gegevens hebben uitgedrukt, dan hebben wij, in plaats van i deszelfs waarde $\frac{1}{6} \pi m^3$ schrijvende,

$$\frac{1}{6} \pi m^3 = a \times \frac{n^3}{3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)}$$

waaruit volgt:

$$m^3 = n^3 \times \frac{6a}{\pi [3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)]}$$

en eindelijk:

$$m = n \times \sqrt[3]{\frac{6a}{\pi [3(2p - 1)n - 2(3p^2 - 3p + 1)]}}$$

Maar negen jaren ouder geworden zijnde, zou hij $x + 9$ jaren oud geworden en $y + 9$ geregeerd hebben, dat is, volgens de tweede voorwaarde,

$$y + 9 = \frac{1}{2}(x + 9)$$

$$\text{of } y = \frac{1}{2}(x + 9) - 9$$

Men heeft, dan om x te vinden,

$$\frac{1}{4}(x - 5) + 5 = \frac{1}{2}(x + 9) - 9$$

vermenigvuldig, om de breuken weg te maken, met vier; dan is:

$$x - 5 + 20 = 2x + 18 - 36$$

$$x - 2x = 18 - 36 + 5 - 20$$

$$\text{of } -x = -33 \text{ of } x = 33 \text{ ouderdom}$$

en $y = \frac{1}{4}(x - 5) + 5 = 12$ het jaar zijner regering.

Nº. 80. Door

JACOB DE GELDER, *E. van Heusden, J. C. van Setten, P. van Eeghen, Chr., A. van der Swan, H. W. Caspari, en Mozes Lemans.*

Stel, dat NEWTON x en HUIGENS y jaren zijn oud geworden: aangezien er dan thans, in Aº. 1812, na den dood van NEWTON, even zoo veel jaren verlopen zijn, als hij oud geworden is, zoo is NEWTON geboren in den jare $1812 - 2x$ en gestorven in den jare $1812 - x$.

Maar toen NEWTON geboren werd, was, volgens de opgave der vraag, HUIGENS $\frac{1}{5}(y - 1)$ jaren oud: bijgevolg werd HUIGENS geboren in den jare $1812 - 2x - \frac{1}{5}(y - 1)$, of (na verëéniging der gelijkflachtige deelen,) in den jare $1812\frac{1}{5} - 2x - \frac{1}{5}y$; hier bij y , of zijnen ouderdom, bijtellende, stierf hij in den jare $1812\frac{1}{5} - 2x + \frac{4}{5}y$.

Men schreef derhalve, tien-en-één-half jaar, voor den dood van HUIGENS, het jaar $1812\frac{1}{5} - 10\frac{1}{5} - 2x + \frac{4}{5}y$, of wel $1801\frac{7}{5} - 2x + \frac{4}{5}y$; maar toen was, volgens de vraag, NEWTON

op

N^o. 81. Door

JACOB DE GELDER, *P. van Eeghen, Chz.,
Mozes Lemans, en J. C. van Setten.*

In het metrieke stelsel van Maten en Gewigten, is de liter de inhoud van eenen cubieken decimeter; dat is, de *cubus*, beschreven op het tiende gedeelte van den meter. Stellen wij de middellijn van de basis van den cilinder, wiens inhoud in liters, veelvouden of deelen van denzelfven gegeven is $= x$; de reden van de hoogte tot die middellijn $= b$; dan is de hoogte $= bx$; de reden van den omtrek tot de middellijn eens cirkel $= \pi = 3,14159265$; dan is de omtrek van de basis des cilinders $= \pi x$ en de inhoud van de basis $= \frac{1}{2} \pi x^2$, (zie *Beg.* § 438. *Bladz.* 157 en 158) deze inhoud van de basis met de hoogte bx vermenigvuldigd hebbende, verkrijgt men, (zie *Beg.* III *Stell.* XII *Boek*) voor den inhoud des cilinders, dien wij I stellen:

$$\frac{1}{2} \pi b x^3 = I$$

en hieruit volgt dan, door de afzondering van x , in het algemeen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Middellijn der basis } x = \sqrt[3]{\frac{4I}{\pi b}} \\ \text{Hoogte des cilinders } bx = b \sqrt[3]{\frac{4I}{\pi b}} \end{array} \right.$$

Voor de Vogtmaten, moet, volgens de Wet, de hoogte het dubbel van de middellijn van de basis zijn; bijgevolg is, in dit geval, $b = 2$ en men heeft voor de berekening van de afmetingen der Vogtmaten; de formules:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Middellijn der basis } x = \sqrt[3]{\frac{2I}{\pi}} \\ \text{Hoogte des cilinders } 2x = 2 \sqrt[3]{\frac{2I}{\pi}} \end{array} \right\} \cdot (1)$$

, Voor

N^o. 82. Door

JACOB DE GELDER, P. van Eeghen Chz.,
Mozes Lemans, en J. C. van Setten.

Stel de hoogte van den afgeknotten kegel $= 3x$; dan is, volgens de vraag, de middellijn van den bodem $= 2x$ en (omdat de middellijn van den bodem tot dien van het bovenvlak moet staan als 3 tot 2,) zal, daar $3 : 2 = 2x : 1\frac{1}{3}x$ is, de middellijn van het bovenvlak $= 1\frac{1}{3}x$ zijn. Stellende dan $\pi = 3,14159265$; dan zal, volgens de *Beginselen*, § 438, *Bladz.* 157 en 158,

De inhoud van den bodem $= 2\pi x \times \frac{1}{2}x = \pi x^2$.

De inhoud van het bovenvlak $= 1\frac{1}{3}\pi x \times \frac{1}{3}x = \frac{4}{9}\pi x^2$;

En de inhoud van een vlak, dat midden evenredig is tusschen het grond en het bovenvlak $= \sqrt{(\pi x^2 \times \frac{4}{9}\pi x^2)} = \frac{2}{3}\pi x^2$.

Volgens de *Beginselen* (VII *Stell.* XII *Boek*) is, de inhoud van den afgeknotten kegel $= 1$ stellende:

$$[\pi x^2 + \frac{4}{9}\pi x^2 + \frac{2}{3}\pi x^2] \times x = \frac{19}{9}\pi x^3 = 1.$$

waaruit (aangezien $1 = 1000000$ ubicke millimeters is,) volgt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{91}{19\pi}} = \sqrt[3]{\frac{9000000}{19\pi}}$$

welke waarde van x , door Logarithmen, aldus gevonden wordt:

$$\text{Log. } 9000000 = 6,95424251$$

$$\text{Compl. Log. } 19 = 8,72124640$$

$$\text{Compl. Log. } \pi = 9,50285013$$

$$\text{Log. } x^3 = 5,17833904$$

3)

$$\text{Log. } x = 1,72611301$$

$$\text{derhalve } x = 53,22467 \text{ millim.}$$

$$\text{de hoogte } 3x = 159,67408$$

$$\text{middell. bod. } 2x = 106,44934$$

$$\text{midd. bovy. } 1\frac{1}{3}x = 70,96623$$

N^o. 83.

N^o. 84. Door

P. VAN EEGHEN, CHZ.

Zij $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$; dan is $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$; of $x^2 - 4x + 3 = 0$. Deze vergelijking oplofende, vindt men: $x = 3$ en $x = 1$. Deze waarden substitueere men in

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

dan wordt, voor $x = 3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = +90$; en voor

$x = 1$, wordt $\frac{d^2y}{dx^2} = -10$; derhalve maakt $x = 3$ de gegebene functie tot eene kleinste en $x = 1$ tot eene grootste.

N^o. 85. Door

A. VAN DER SWAN, L. van Heusden, J. G. van Setten, H. W. Caspari, Mozes Loman, en P. van Eeghen Chz.

Stel het tweede getal x ; dan is het eerste $2x$; laat y het getal zijn, waarvan in de derde plaats gesproken wordt; dan moet men hebben $2x - y = x + y$ en ook $x + y = y$; door de eerste vergelijking heeft men terstond $x = 2y$, en deze waarde van x in de tweede vergelijking stellende, komt $3y = 9$; dus $y = 3$, dus $x = 6$ en $2x = 12$.

N^o. 86.

paalde Analysis van DIOPHANTUS betrekking hebbende, is meestal met vele moeilijkheden vergezeld, niet zoo zeer daarin bestaande, om getallen te vinden, welke aan de voorwaarden van eenig vraagstuk voldoen, als wel om de oplossing daar henen te rigten, dat de gevondene getallen aan geen meer voorwaarden voldoen, dan in het voorstel volstrekt opgegeven worden. Immers, wanneer men overtollige voorwaarden niet heeft weten te vermijden, mag men niet verwagten, dat de oplossing de eenvoudigste zal worden en dat de gevondene getallen de kleinste zullen zijn, welke op de eigenlijk gestelde voorwaarden der vraag zullen passen; ja ook, wanneer men de algemeenste en meest regstreeksche wijze van oplossen gevolgd heeft, kan men, in zeer vele gevallen, zelfs niet eens verzekeren, dat men niet, langs eenen geschikteren en nog niet bekenden weg, kleiner getallen zou verkregen hebben; de trapswijze voortgang der oplossing, de wijze, waarop men dezelve ten uitvoer brengt, elke omstandigheid heeft hierin haren eigenen invloed; wiens daarzijn gemakkelijker gevoeld wordt, dan het mogelijk is, om deszelfs uitwerksel, in alle gevallen te voorzien en te bepalen.

De uitkomst der eerste oplossing van OZANAM (zie de aangehaalde plaats in de noot,) komt nauwelijks in aanmerking; hij neemt drie getallen a , b en c aan, de eigenschap hebbende, dat de verschillen van twee van dezelve, op alle mogelijke wijzen genomen, volkomen vierkante getallen

Zinnen-Confess, Bladz. 379, hetwelk hij zegt, hem, door JOACHIM MICHEL BRAND te *Staden*, te zijn voorgesteld. PANSER heeft er, in zijne *Mathematische Rariteit-kamer*, onder N°. 95, Bladz. 310 eene oplossing van gegeven. Het komt ook voor, bij OZANAM, *Nouveaux Elémens d'Algebre*, 1702. II Partie, Pag. 662. DE GELDER.

VOORGAA

len zijn, en het
bende, moeten de
 $c = x$ tot volke
worden; doch, d
derzelver product,

$abc = (ab + ac)$
noodwendig een v

OZANAM stelt d
tal gelijk aan de u

$$\sqrt{abc} =$$

en vindt, na het
het gezegde produ

$$x = \frac{2a^2bc + 2ab^2}{}$$

waaruit hij dan be
gevraagde getallen

het 1^e . .

het 2^e . .

het 3^e . .

het 4^e . . $2a^2bc +$

mits, dat (zoo al

geheele getallen ge

len niet slechts v

welker product de

drukking (a) blij

Nu neemt hij, v

vierkanten der ge

2288168, (getrok

Mathématiques.)

twee aan twee

zijn, (*) en vindt,

(*) Want, wanne

danig aanneemt, dat

$y + z$ en $y - z$ v

zijn ook $(x + y)$

welke uit niet minder dan uit ~~zeven~~ of ~~acht~~ ~~en~~ ~~veertig~~ cijfers bestaan, vermeene, dat er langzamen wege geen kleinere getallen zouden te vinden zijn.

OZANAM heeft, in zijne *Diction. Math.* pag. 90 et 91, in den jare 1691 uitgegeven, van dit vraagstuk eene andere oplossing gegeven, op welke hij zich in zijne *Nouv. Elem. d'Algebre* verder beroept. Zie hier, waarop deze oplossing nederkomt.

Wanneer men zich drie getallen u , v en w voorgesteld, de eigenschap hebbende, dat de som om het verschil van twee van deselve, op alle mogelijke wijzen genomen, volkomen vierkante getallen zijn; dan is hun som $u + v + w$ een vierde getal, hetwelk, met de drie eerstgestelde, u , v en w aan den eisch der vraag zal voldoen; want $u + v = \alpha^2$, $u - v = \beta^2$, $u + w = \gamma^2$, $u - w = \delta^2$; $v + w = \epsilon^2$ en $v - w = \zeta^2$ stellende; dan zal $(u + v + w) - u = \epsilon^2$, $(u + v + w) - v = \gamma^2$, $(u + v + w) - w = \alpha^2$; $u - v = \beta^2$, $u - w = \delta^2$ en $v - w = \zeta^2$ moeten zijn.

Stellen wij dan, met den Heer OZANAM, voor de getallen, welker sommen en verschillen, twee aan twee genomen, volkomen vierkanten moeten zijn, $2abxy$, $a^2x^2 + b^2y^2$ en $b^2x^2 + a^2y^2$; dan zijn de som van het eerste en tweede $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax + by)^2$ en die van het eerste en derde $b^2x^2 + 2abxy + a^2y^2 = (bx + ay)^2$ volkomen vierkanten; maar de som van het tweede en derde, namelijk:

$$(a^2 + b^2) \times (x^2 + y^2) \dots\dots (1)$$

moet

$(x - z) = x^2 - z^2$ en $(y \pm z) = y^2 \pm z^2$ volkomen vierkante getallen, en dan voldoen x^2 , y^2 en z^2 aan de voorwaarde, dat derzelver verschillen, twee aan twee genomen, vierkante getallen zijn. DE GELDER.

mo
Voe
min
by
sat
kan
der

O
for
ma
fel
kin

we
ka
bel
hi

of
at
at
to

m
(
m
m

...

$$-(2a^5b^3 - 2a^3b^5 - 2ab^7 + 2a^7b)xy \dots \dots + (a^8 - 2a^4b^4 + b^8)y^2 \dots \dots (4)$$

Daar deze uitdrukkingen, (3) en (4), volkomene vierkanten q^2 en p^2 moeten zijn, is (de laatste als de grootste aannemende,) derzelver verschil $p^2 - q^2$ gelijk aan

$$2a^4b^4x^2 - 2b^8x^2 - 4a^5b^3yz + 4ab^7yz$$

bij aldien nu in dit verschil twee stelkundige factoren te vinden zijn, kan men dezelve aan $p + q$ en $p - q$ gelijk stellen en de halve som dezer factoren zal $= p$ zijn: nu heeft in de daad dit

verschil de factoren $-2ab^3x$ en $\frac{b^5x}{a} - a^3bx + 2a^4y - 2b^4y$, en derzelver halve som is:

$$\frac{b^5x}{2a} - ab^3x - \frac{1}{2}a^3bx + a^4y - b^4y = p$$

men stelde dan het vierkant dezer vergelijking gelijk aan de uitdrukking (4); dan zal men, na herleiding, vinden:

$$(b^9 - 3a^3b + 6a^4b^5)x = (4ab^8 - 4a^9)y$$

door welke de betrekking der getallen y en x in functien van a en b , die men naar welgevalen kan aannemen, gegeven is. Men zal dus $y = n(b^9 - 3a^3b + 6a^4b^5)$ stellende, hebben $x = n(4ab^8 - 4a^9)$, en neemt men, daar n willekeurig kan gesteld worden, $n = 1$; dan is:

$$x = 4ab^8 - 4a^9$$

$$y = b^9 - 3a^3b + 6a^4b^5$$

$$x = x - \frac{a}{b}y = 3ab^8 - 6a^5b^4 - a^9$$

Deze waarden van x en y , in de hier boven aangenomen uitdrukkingen, $2abxy$, $a^2x^2 + b^2y^2$, $b^2x^2 + a^2y^2$ en in derzelver som $(a^2 + b^2)x^2 + 2abxy + (a^2 + b^2)y^2$, overbrengende, vindt men, voor de gevraagde getallen, in geheele stelkundige uitdrukkingen:

oplossende, $x = (1 + a^2) : 2a$. Deze waarde van x stelt hij in de formule, $25a^2 - 40x + 25$, en deze, die een volkomen vierkant moet zijn, wordt dan:

$$[25a^4 - 80a^3 + 150a^2 - 80a + 25] : 4a^2$$

zijnde eene breuk, welker teller, aangezien de noemer reeds zondanig is, tot een volkomen vierkant moet gemaakt worden; het geen op onderscheidene wijzen geschieden kan. (*) PANSIA stelt voor den wortel uit dit vierkant de uitdrukking $\frac{1}{2}a^2 - 8a + 5$ en vindt alzoo $a = \frac{17}{2}$ en daaruit $x = \frac{11713}{11568}$; waardoor hij dan eindelijk, voor de begeerden getallen, verkrijgt: 6770699225, 5567996825, 5595949904 en 5416091200, alle gedeeld door 133633600, welker gemene noemer mag weggelaten en bij gevolg de tellers voor de geheele getallen genomen worden, welke dan, zoo als, bij de proef, blijken zal, aan de voorwaarden der vraag voldoen.

Bij de schrijvers, welke ons bekend zijn, komen geene andere dan de boven opgegevene oplossingen van dit voorstel voor.

Het was, in de eerste oplossing van OZANAM, onnoodig, voor a , b en c volkomen vierkante getallen te nemen, om daardoor aba tot een volkomen vierkant te maken; hij neemt dus eene voorwaarde, welke de vraag niet verdert, te veel aan en komt daarom tot zulke groote getallen.

De tweede oplossing van OZANAM onderstelt, zonder blijkbare reden, de overvloedige voorwaarde, dat het vierde getal gelijk aan de som van de drie andere getallen moet zijn, en zonder dat het bewezen is, dat, op geene andere wijze, en buiten

(*) De wijze, om storelijke uitdrukkingen tot volkomen vierkanten te maken, vindt men in het IX Hoofdstuk van EULERS Algebra.

ten dit hulpmiddel bij de hand te nemen, het vraagstuk kan opgelost worden.

PANZER laat het verschil van het eerste en tweede getal gelijk aan het bepaalde getal *negen* zijn. Men behoeft zijne oplossing slechts oppervlakkig in te zien, om zich dadelijk te overtuigen, dat hij, door het aannemen van soortgelijke uitdrukkingen, maar in andere getallen gesteld, oneindig vele oplossingen; doch elke aan eene vreemde voorwaarde onderwerpen, zou hebben kunnen vinden.

Zulke aan het vraagstuk vreemde voorwaarden mogen niet aangenomen worden, ten zij men mogte bewezen hebben, dat zij een noodzakelijk gevolg van de gestelde voorwaarden waren. Dat nu alle de bijgebrachte oplossingen, in dit opzigt, gebrekkig zijn, zal blijken, wanneer men, op eene regtstreeksche wijze, zonder vreemde voorwaarden aan te nemen, niet alleen eene meer natuurlijke en meer algemeene oplossing geven, maar ook bovendien door dezelve tot kleiner getallen komen kan.

Men stelle voor de begeerde getallen, u , $u + x^2$, $u + y^2$, $u + z^2$, (zijnde $x < y$ en $y < z$), dan voldoen deze uitdrukkingen uit zich zelve reeds aan drie voorwaarden; daar, het eerste getal u van de drie overigen afgetrokken zijnde, de verschillen x^2 , y^2 en z^2 zijn. Trekt men nu het tweede getal van het derde en vierde, en het derde van het vierde, dan blijkt het: dat x , y en z zoodanig moeten bepaald worden: dat de uitdrukkingen $y^2 - x^2$, $z^2 - x^2$ en $z^2 - y^2$ volkomen vierkante getallen worden. Het vraagstuk, uit dit oogpunt beschouwd, komt dan op het zeer bekende neder: *om namelijk drie volkomen vierkanten te vinden, welke verschillen, op alle mogelijke wijzen genomen, volkomen vierkante getallen zijn, en het blijkt dan al ten eerste,*

dat men het eerste getal u naar welgevallen zal kunnen aannemen.

Men stelde voor de drie vierkante getallen, welker verschillen volkomen vierkanten moeten zijn, $(a^2 x^2 + b^2 y^2)^2$, $(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2$ en $4 a^2 b^2 x^2 y^2$; dan ziet men duidelijk, dat deze aangenomen uitdrukkingen reeds twee voorwaarden vervullen; want

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2)^2 - 4 a^2 b^2 x^2 y^2 = (a^2 x^2 - b^2 y^2)^2$$

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 - 4 a^2 b^2 x^2 y^2 = (b^2 x^2 - a^2 y^2)^2$$

zijn reeds volkomen vierkanten; en er blijft niets anders over, dan de uitdrukking,

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2)^2 - (b^2 x^2 + a^2 y^2)^2$$

dat is, na behoorelijke ontwikkeling,

$$(a^4 - b^4)x^4 + (b^4 - a^4)y^4$$

of, waar voor men ook schrijven kan:

$$(a^4 - b^4) \times (x^4 - y^4)$$

tot een volkomen vierkant te maken.

Het is bekend, dat het verschil van twee vierde magten nooit een volkomen vierkant kan worden; onze formule kan dan, door het rationaal maken der factoren $a^4 - b^4$ $x^4 - y^4$, geen volkomen vierkant worden: maar daar zij ook aldus kan voorgesteld worden,

$$(a^2 + b^2) \times (a^2 - b^2) \times (x^2 + y^2) \times (x^2 - y^2)$$

zal men aan dit vereischte moeten voldoen, het zij door

$$(a^2 + b^2) \times (x^2 + y^2) \text{ en } (a^2 - b^2) \times (x^2 - y^2) \dots (A)$$

het zij eindelijk door,

$$(a^2 + b^2) \times (x^2 - y^2) \text{ en } (a^2 - b^2) \times (x^2 + y^2) \dots (B)$$

elk in het bijzonder, tot volkomen vierkanten te maken.

Uit de boven bijgebragte tweede oplossing van OZANAM blijkt: dat de uitdrukkingen (A) volkomen vierkanten worden, wanneer men

$$x = -a^3 - 6a^2b^4 + 3ab^6$$

$$y = -3a^5b + 6a^4b^5 + b^9$$

aanneemt, en hier door verkrijgt men dan, in stel-

stelkundige uitdrukkingen, voor de drie vierkanten, welke verschillen volkomen vierkanten zijn, de tweede magten der waarden, welke aldaar voor $a^2x^2 + b^2y^2$, $b^2x^2 + a^2y^2$ en $2abxy$ gevonden zijn, te weten:

$$1^0. [a^{20} + 21 a^{16} b^4 - 6 a^{12} b^8 - 6 a^8 b^{12} + 21 a^4 b^{16} + b^{20}]^2 \dots (C)$$

$$2^0. [10 a^2 b^{18} - 24 a^6 b^{14} + 60 a^{10} b^{10} - 24 a^{14} b^6 + 10 a^{18} b^2]^2$$

$$3^0. [6 a^2 b^{18} + 24 a^6 b^{14} - 92 a^{10} b^{10} + 24 a^{14} b^6 + 6 a^{18} b^2]^2$$

en welke getallen men nu voor a en b stelle, zal men drie volkomen vierkanten verkrijgen, welke verschillen, twee aan twee genomen, volkomen vierkanten zijn.

Wanneer men het kleinste der drie getallen, hier boven, in de tweede oplossing van OZANAM gevonden, van elk der drie anderen aftrekt, dan worden de verschillen, 644^2 , 725^2 en 2165^2 , welke, twee aan twee, van elkander afgetrokken zijnde, de volkomen vierkanten, namelijk 2067^2 , 2040^2 en 333^2 , geven. En, wanneer men verder de aldaar gevondene stelkundige uitdrukkingen (de eerste van elk der drie anderen) aftrekt, dan verkrijgt men:

$$1^0. [a^{10} + 5 a^8 b^2 - 2 a^6 b^4 - 2 a^4 b^6 + 5 a^2 b^8 + b^{10}]^2 \dots (D)$$

$$2^0. [a^{10} - 3 a^8 b^2 + 6 a^6 b^4 + 6 a^4 b^6 - 3 a^2 b^8 + b^{10}]^2$$

$$3^0. [2 a^9 b - 12 a^5 b^5 - 2 a b^9]^2$$

en deze zijn volkomen stelkundige vierkanten, welke gedurige verschillen worden, als volgt: het eerste min het tweede:

$$[4 a^9 b - 4 a b^9]^2$$

het eerste min het derde:

$$[a^{10} + 3 a^8 b^2 + 6 a^6 b^4 - 6 a^4 b^6 - 3 a^2 b^8 - b^{10}]^2$$

het de tweede min het derde:

$$[a^{10} - 5 a^8 b^2 - 2 a^6 b^4 + 2 a^4 b^6 + 5 a^2 b^8 - b^{10}]^2$$

zij zijn dus ook stelkundigerwijze volkomen vierkanten. Het is intusschen opmerkenswaardig, dat de regtsstreeksche oplossing de uitdrukkin-

gen (C) veel zamengestelder schijnt te maken, dan de uitdrukkingen (D), welke uit de oplossing van een ander vraagstuk van OZANAM worden afgeleid. Dan, wanneer men in aanmerking neemt, dat, in de uitdrukkingen (C), de letters a en b tot evene magten opklimmen, zoo zal men, in plaats van a^2 en b^2 , schrijvende a en b , (de uitdrukkingen in eene andere orde genomen,) verkrijgen:

$$1^{\circ}. [a^{10} + 21a^8b^2 - 6a^6b^4 - 6a^4b^6 + 21a^2b^8 + b^{10}]^2 (E)$$

$$2^{\circ}. [10a^9b - 24a^7b^3 + 6a^5b^5 - 24a^3b^7 + 10ab^9]^2$$

$$3^{\circ}. [6a^9b + 24a^7b^3 - 92a^5b^5 + 24a^3b^7 + 6ab^9]^2$$

zijnde de verschillen van de vierkanten dezer uitdrukkingen, te weten: 1° min 2° , 1° min 3° en 2° min 3° , respectievelijk gelijk aan,

$$[a^{10} + 3a^8b^2 + 66a^6b^4 - 66a^4b^6 - 9a^2b^8 - b^{10}]^2$$

$$[a^{10} - 29a^8b^2 + 34a^6b^4 - 34a^4b^6 + 29a^2b^8 - b^{10}]^2$$

$$[8a^9b - 48a^7b^3 + 48a^5b^5 - 8ab^9]^2$$

zoodat men de uitdrukkingen (E) voor de eenvoudigste kan houden, welke uit de regstreekste wijze van OZANAM, om $(a^4 - b^4)(x^4 - y^4)$ rationaal te maken, volgen; en deze kunnen derhalve, met de uitdrukkingen (D), welke nogtans kleinere getallen geven, als twee stelsels van stelskundige vierkanten worden aangemerkt, melker verschillen, op alle mogelijke wijzen genomen, volkomen stelskundige vierkanten zijn.

Wanneer men, voor een oogenblik, één dezer twee stelsels, (D) en (E), van stelskundige uitdrukkingen, voor de eenvoudigste mogt aanzien, die men verkrijgen kan, zal het echter weldra blijken, dat zij niet alle getallen opleveren, welke de vereischte voorwaarden vervullen; en dit verschijnsel schijnt toegeschreven te moeten worden aan de wijze van rationaal maken; want, indien men, op het voetspoor van EULER, (zie zijne *Algebra* §. 234) eene tafel van de waarden van $a^4 - b^4$ vervaardigt (maar men moet de

zelve veel verder dan aldaar uitstrekken,) dan zal men vinden: dat

1°. Wanneer men $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $x^2 = 121$ en $y^2 = 4$ stelt, de getallen welke aan den eisch van het voorstel voldoen, zijn zullen: u , $u + 1105^2$, $u + 520^2$ en $u + 264^2$.

2°. Dat, wanneer men $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $x^2 = 81$ en $y^2 = 49$ stelt, het stelsel u , $u + 925^2$, $u + 765^2$ en $u + 756^2$ ontstaan zal, en meer anderen.

Evenwel losfen niet alle waarden van a^2 , b^2 , x^2 en y^2 , uit deze tafel genomen, welke $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$ tot een volkomen vierkant maken, het vraagstuk op. De gevallen, waarin $a : b = x : y$ of $a : b = y : x$ is, zijn hier van uitgesloten; omdat als dan $ay = bx$ of $ax = by$ en het derde getal gelijk aan het eerste of aan het tweede wordt, en deze waarden van a , b , x en y , zijn in deze tafel wel de menigvuldigste.

Wij laten de discussie van het rationaal maken der formelen (B), namelijk van $(a^2 + b^2)(x^2 - y^2)$ en $(a^2 - b^2)(x^2 + y^2)$, (om deze oplossing niet te ver te doen uitloopen,) tot eene andere gelegenheid over, en merken alleen op: dat het rationaal maken van dezelve, zoo wel als van de uitdrukkingen (A), op eene algemeene wijze aangevat, en, om zeker te zijn, dat men de eenvoudigste stelskundige waarden voor x en y verkrijge, zoodanig behoort ingerigt te zijn, dat, bij voorbeeld, voor (A), x en y zoodanige functien van a en b moeten zijn, dat $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2) \times \phi(a, b)$ en $x^2 - y^2 = (a^2 - b^2) \times \phi'(a, b)$ en $\phi(a, b) \times \phi'(a, b)$ het eenvoudigst stelskundig vierkant moet zijn, dat men vinden kan.

Dan, al had men ook de eenvoudigste functien voor a en b gevonden; (die ook zelve de gevallen hier boven uit de tafel voor de waarden van $a^2 - b^2$ afgeleid in zich begrepen, dan zou men de-

deze oplossing nogtans niet voor de algemeenste kunnen houden; daar het uit de oplossing, welke EULER, in zijne *Algebra* §. 235 gegeven heeft, (en welke men hier moet raadplegen,) blijkt: dat het stelsel u , $u + 697^2$, $u + 185^2$, en $u + 153^2$ het voorstel oplost, ofschoon deze kleinere getallen in onze oplossing niet begrepen zijn, niettegenstaande deze, in den eersten opslag, eenvoudiger schijnt te zijn. (*)

Wij gaan voor het tegenwoordige alle andere oplossingswijzen, die wij onderzocht hebben, voorbij: allen, ja ook die van EULER zelve zijn aan den invloed van onderstellingen onderworpen, welke verhinderen, dat men de kleinste getallen vinde: en ofschoon geene der door ons beproefde oplossingen, kleinere getallen dan die van EULER gegeven hebben, is men niet zeker: dat deze de kleinste zijn, voor dat men eene tafel van vierkanten, welker verschillen volkomen vierkanten zijn, gemaakt en beproefd hebbe, welk vierkant getal bij twee van dezelve opgeteld zijnde, volkomen vierkante getallen geven zal.

Uit onze wijze van oplossen blijkt het: dat het vraagstuk, om vier getallen te vinden, welker verschillen, twee aan twee genomen, zes volkomen vierkanten geven, nog aan meer voorwaarden kan onderworpen worden: zoo kan men er bij voorbeeld nog bijvoegen, en dat derzelver som een volkomen vierkant, of een volkomen cubus, of een volkomene vierde magt zij, of ook andere voorwaarden. Nemen wij, bij voorbeeld, het stelsel:

u , $u + 153^2$, $u + 185^2$, $u + 697^2$
dan is de som $= 4u + 548443$. Laten wij deze som

(*) En geen wonder, want onze oplossing onderstelt, dat een der gezochte vierkanten door 4 deelbaar is: het geen niet volstrekt noodzakelijk is. DE GELDER.

fom $\equiv w^2$ stellen; dan moet $u \equiv \frac{1}{4}(w^2 - 543443)$ genomen worden: stellen wij $w = 1767$, dan is $u = 629807\frac{1}{4}$, enz. Wil men de fom der getallen een volkomen cubus maken, wordt $u \equiv \frac{1}{4}(w^3 - 543443)$; nemende dan $w = 83$, of $w^3 = 571787$; dan is $u = 7086$ en de vier getallen worden dan, 7086, 30495, 41311 en 492195.

Nº. 89. Door

M. J. ZUIDHOF, en P. van Eeghen; Chz.

Men stelde het begeerde getal $\equiv x$. In het algemeen, wordt een veelhoekig getal, wiens wortel $\equiv x$ en zijde $\equiv n$ is, uitgedrukt door $\frac{1}{2}(n - 2)x^2 - \frac{1}{2}(n - 4)x$. (Zie DE GELDER, II *Curs. Bladz.* 330 noot 84.) Voor een driehoekig getal is $n = 3$, voor een zeshoekig $n = 6$ en voor een dertighoekig $n = 30$. Het getal x , tot een driehoekig getal verheven, geeft dan $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; hetzelfde tot een dertighoekig verheffende, heeft men $14x^2 - 13x$; en het product van het laatste met $2\frac{1}{2}$ maal het eerste, opgeteld met 100534, wordt dan $\frac{1}{8} \cdot (x^2 + x) \times (14x^2 - 13x) + 100534$; dat is, na de factoren vermenigvuldigd te hebben,

$\frac{1}{8} \cdot (98x^4 + 7x^3 - 91x^2 + 603204) \dots (A)$ en deze uitdrukking moet nu gelijk zijn aan even zoo veel termen van de vierkanten der natuurlijk opklimmende zeshoekige getallen, als er éénheden in x zijn. Een zeshoekig getal wordt door $2x^2 - x$, en het vierkant van een zeshoekig getal door $(2x^2 - x)^2 = 4x^4 - 4x^3 + x^2$ uitgedrukt. De vierkanten der natuurlijk opklimmende zeshoekige getallen zijn dan:

$$4 \times 1^4 - 4 \times 1^3 + 1^2$$

$$4 \times 2^4 - 4 \times 2^3 + 2^2$$

enz.

enz.

$$4 \times x^4 - 4 \times x^3 + x^2$$

en

en de som van de vierkanten dezer zeshoekige getallen, van 1 tot x , is dan gelijk aan,

$$+ 4(1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \text{enz.} + x^4) \\ - 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \text{enz.} + x^3) \\ + 1(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \text{enz.} + x^2)$$

dat is (zie DE GELDER II *Cursus*. §. 836. *Bladz.* 461) (*) gelijk aan

$$4 \times \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x \right] \dots \dots \dots \\ - 4 \times \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right] + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$$

en indien men nu deze uitdrukking ontwikkelt, verkrijgt men voor dezelve:

$$\frac{4}{5}x^5 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{15}x$$

deze moet nu aan de uitdrukking (A) gelijk zijn: men heeft derhalve:

$$\frac{4}{5} \cdot (98x^4 + 7x^3 - 91x^2 + 603204) = \frac{4}{5}x^5 + x^4 \dots \\ - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{15}x$$

de-

(*) Men kan, zoo als de Heer VAN EEREN gedaan heeft, op eene andere wijze, tot eene uitdrukking voor de som van de x eerste vierkanten der zeshoekige getallen komen: deze vierkanten zijn:

reeks . . . 1, 36, 225, 784, 2025, enz.

eerste versch. 35, 189, 559, 1241, enz.

tweede versch. . . 154, 370, 682, enz.

derde versch. 216, 312, enz.

vierde versch. 96, 96, enz.

dan is (zie DE GELDER'S II *Curs.* §. 723. *Bladz.* 442. of STRABBE, *Int. Mat. Wes.* *Bladz.* 258) de som dezer reeks gelijk aan:

$$x + 35 \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} + 154 \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3} + \dots \\ \dots \dots \dots 216 \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3} \cdot \frac{x-3}{4} + \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots 96 \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3} \cdot \frac{x-3}{4} \cdot \frac{x-4}{5}$$

welke, ontwikkeld zijnde, dezelfde uitdrukking, als in den tekst, voor de som van de vierkanten der zeshoekige getallen geven zal. *Wet. Comm.*

deze vergelijking met 30 verm. en naar de afmetingen van x geordend zijnde, heeft men:

$$24x^7 - 460x^6 - 45x^5 + 440x^4 + x - 3016020 = 0$$

Uit deze vergelijking vindt men, naar ééne der bekende leerwijzen, voor het vinden der deeler, $x = 20$. De overige deeler der vergelijking zijn begrepen in de vergelijking:

$$24x^4 + 20x^3 + 358x^2 + 7540x + 150806 = 0$$

in welke geene positive noch meetbare wortels meer te vinden zijn; $x = 20$ is dus het eenige getal, dat de vraag oplost.

Nº. 90. Door

U. HUGUENIN.

Laten (*Fig. 65.*) $AB = a$ en $BC = b$ de bekende afstanden en $ABC = B$ de bekende hoek zijn; stel voorts de waargenomen hoeken $ADB = \alpha$ en $BEC = \beta$, den gemeten afstand $DE = c$ en den onbekenden hoek $DAB = \phi$; dan is hoek $ABD = 180^\circ - (\alpha + \phi)$, hoek $EBC = B + \alpha + \phi - 180^\circ$ en hoek $BCE = 180^\circ - [B + \alpha + \beta + \phi - 180^\circ] = 360^\circ - (\alpha + \beta + B) - \phi$. Stellende dan $360^\circ - (\alpha + \beta + B) = \epsilon$, zoo is $BCE = \epsilon - \phi$, en men heeft, in den driehoek DAB , de evenredigheid, $\text{Sin. } \alpha : \text{Sin. } \phi = a : BD$ en in den driehoek EBC , de evenr. $\text{Sin. } \beta : \text{Sin. } (\epsilon - \phi) = b : BE$; waaruit $BD = a \text{ Sin. } \phi : \text{Sin. } \alpha$ en $BE = b \text{ Sin. } (\epsilon - \phi) : \text{Sin. } \beta$ volgen; maar doordien $BD + DE = BE$ is, heeft men:

$$\frac{b \text{ Sin. } (\epsilon - \phi)}{\text{Sin. } \beta} - \frac{a \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } \alpha} = c$$

of, de breuken wegmakende, en $\text{Sin. } (\epsilon - \phi)$ ontwikkelende,

$$b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \epsilon \text{ Cos. } \phi - [b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \epsilon + a \text{ Sin. } \beta] \times \text{Sin. } \phi = c \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta$$

of

of door $b \sin. a \sin. \varepsilon$ deelende,

$$\cos. \varphi - \left[\cot. \varepsilon + \frac{a \sin. \beta}{b \sin. a \sin. \varepsilon} \right] \sin. \varphi = \frac{c \sin. \beta}{b \sin. \varepsilon}$$

Men stelde in deze vergelijking de bekende uitdrukking $\cot. \varepsilon + \frac{a \sin. \beta}{b \sin. a \sin. \varepsilon} = \cot. \mu = \cos. \mu : \sin. \mu$ [zie de Noot op *Bladz. 83* van dit Deel,] en vermenigvuldige dezelve met $\sin. \mu$, dan heeft men:

$$\sin. \mu \cos. \varphi - \cos. \mu \sin. \varphi = \sin. (\mu - \varphi) = \frac{c \sin. \beta \sin. \mu}{b \sin. \varepsilon}$$

en daar $\mu - \varphi$ en $180^\circ - (\mu - \varphi)$ dezelfde sinus hebben, zoo is de tweede wortel dezer vergelijking door $\sin. [180^\circ - (\mu - \varphi)] = \frac{c \sin. \beta \sin. \mu}{b \sin. \varepsilon}$ gegeven. Het zij ons vergund

den aard van dit voorstel door een paar voorbeelden nader te ontvouwen.

I VOORBEELD. Zij gegeven $a = 785$, $b = 414$ en hoek $ABC = B = 117^\circ 41' 26''$, $DC = c = 306$ gemeten; voorts zij $\alpha = 50^\circ 30'$ en $\beta = 17^\circ 45'$ door waarneming gevonden; waardoor $\varepsilon = 360^\circ - (\alpha + \beta + B) = 174^\circ 3' 34''$, en $\cot. \mu = \cot. 174^\circ 3' 34'' + \dots$
 $\frac{785 \sin. 17^\circ 45'}{414 \sin. 50^\circ 30' \sin. 174^\circ 3' 34''}$ wordt. Nu is $\sin.$

$174^\circ 3' 34'' = \sin. 5^\circ 56' 26''$ en $\cot. 174^\circ 3' 34'' = - \cot. 5^\circ 56' 26''$, en daar de sinus totus of radius $= 1$ aangenomen is, heeft men, in Logarithmen werkende:

$\text{Log. } 785 = 2,8048604$	$\text{Log. } 414 = 2,6170003$
$\text{Log. } \sin. 17^\circ 45' = 9,4841066 - 10$	$\text{Log. } \sin. 50^\circ 30' = 9,8874061 - 10$
$\text{som} = 2,3789763$	$\text{Log. } \sin. 5^\circ 56' 26'' = 9,0149260 - 10$
$\text{af. } \dots * 1,5193324$	$\text{som} = * 1,5193324$
$\text{rest } 0,8596439 = \text{Logarithmus van } 7,238422$	
$\text{Hierbij } \cot. 174^\circ 3' 34'' = \cot. - 5^\circ 56' 26'' = - 9,610266$	
	$\text{komt } \cot. \mu = - 2,371844$

Maar

Maar $2,371844$ is de *Cot.* van $22^{\circ}51'58''$; derhalve is $\mu = 180^{\circ} - 22^{\circ}51'58'' = 157^{\circ}8'2''$, en

$$\sin.(157^{\circ}8'2'' - \phi) = \frac{306 \sin.17^{\circ}45' \times \sin.157^{\circ}8'2''}{414 \sin.174^{\circ}3'34''}$$

nu is $\sin.157^{\circ}8'2'' = \sin.22^{\circ}51'58''$ en $\sin.174^{\circ}3'34'' = \sin.5^{\circ}56'26''$, en, in Logarithmen werkende,

$$\begin{array}{rcl} \text{Log. } 414 & = & 2,6170003 \\ \text{Log. } \sin.174^{\circ}3'34'' & = & 9,0149260 - 10 \\ \hline & & * 1,6319263 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \text{Log. } 306 & = & 2,4857214 \\ \text{Log. } \sin.17^{\circ}45' & = & 9,4841066 - 10 \\ \hline & & \text{Log } 157^{\circ}8'2'' = 9,5894993 - 10 \\ & & \frac{1,5592873}{1,6319263} \end{array}$$

trek af... * 1,6319263

$\text{Log. } \sin.(180^{\circ} - \mu + \phi) = 9,9273010 - 10$
hetwelk de $\text{Log. } \sin.57^{\circ}47'8''$ is. Men heeft dan, voor den eersten wortel der vergelijking, $157^{\circ}8'2'' - \phi = 57^{\circ}47'8''$; of $\phi = 99^{\circ}20'54''$; en voor den tweeden $180^{\circ} - 157^{\circ}8'2'' + \phi = 57^{\circ}47'8''$; of $\phi = 34^{\circ}55'10''$.

Men verkrijgt alzoo twee antwoorden, welke de standpunten D en E tegen over de holte van den hoek ABC, dat is binnen ABC, bepalen en den waarnemer gevolgelyk in verlegenheid kunnen brengen van niet met zekerheid te weten van welke dezer antwoorden hij zich, om de ware plaats der standpunten, waaruit hij de hoeken waargenomen heeft, op de kaart te brengen, zal moeten bedienen? en deze zwaarigheid neemt toe, naar mate de gevondene waarden van ϕ mindet van elkander verschillen. In zulk een geval is het noodig, door eenig kenmerk op het terrein, of wel, met behulp van de noordlijn, te bepalen, welke der twee gevondene antwoorden met de natuurlijke ligging der standpunten overeenkome? Maar, wanneer $\mu - \phi = 180^{\circ} - (\mu - \phi)$ en alzoo $\mu - \phi = 90^{\circ}$ is, het geen plaats heeft, indien $c \sin. \beta \sin. \mu = b \sin. \epsilon$ is, dan vervalt deze zwaarigheid geheel; daar het voorstel als dan slechts ééne oplossing heeft. Ook zal deze zwaarigheid wegvallen, wanneer de

Q

stand.

standpunten D en E; ten opzichte van A, B en C, volgens de beide oplossingen eene tegengestelde ligging hebben; gelijk in het volgend voorbeeld plaats heeft.

II VOORBEELD. Zij gegeven $a = 236$, $b = 374$, $c = 177$, $B = 99^{\circ} 38' 21''$, $\alpha = 28^{\circ} 30'$ en $\beta = 32^{\circ} 00' 00''$; dan is $\epsilon = 360^{\circ} - (99^{\circ} 38' 21'' + 38^{\circ} 30' + 32^{\circ}) = 199^{\circ} 51' 58''$ en diensvolgens,

$$\text{Cot. } \mu = \text{Cot. } 199^{\circ} 51' 58'' + \frac{236 \text{ Sin. } 32^{\circ}}{374 \text{ Sin. } 28^{\circ} 30' \text{ Sin. } 199^{\circ} 51' 58''}$$

waarvan, aangezien $\text{Sin. } 199^{\circ} 51' 58'' = - \text{Sin. } 19^{\circ} 51' 58''$ is, het laatste gedeelte negatief wordt. Nu is

$\text{Log. } 374 = 2,5728716$	$\text{Log. } 236 = 2,3729120$
$\text{Log. Sin. } 28^{\circ} 30' = 9,6786629 - 10$	$\text{Log. Sin. } 32^{\circ} = 9,7242095 - 10$
$\text{Log. Sin. } 19^{\circ} 51' 58'' = 9,5312532 - 10$	<u>2,0971217</u>
$* 1,7827877$	$* 1,7827877 \text{ af}$
	<u>rest 0,3143340</u>

hetwelk de Log. van 2,0622152 is, en dit getal moet, in de waarde van $\text{Cot. } \mu$, negatief genomen worden, zoo als bereids voor $\text{Sin. } 199^{\circ} 51' 58''$ is aangemerkt geworden. Daar voorts $\text{Cot. } 199^{\circ} 51' 58'' = \text{Cot. } 19^{\circ} 51' 58'' = 2,7674990$ is, heeft men $\text{Cot. } \mu = 2,7674990 - 2,0622152 = 0,7053678 = \text{Cot. } 54^{\circ} 48' 8''$; gevolgelijk is:

$$\text{Sin. } (54^{\circ} 48' 8'' - \phi) = \frac{177 \text{ Sin. } 32^{\circ} \times \text{Sin. } 54^{\circ} 48' 8''}{374 \text{ Sin. } 19^{\circ} 51' 58''}$$

$\text{Log. } 374 = 2,5728766$	$\text{Log. } 177 = 2,2479733$
$\text{Log. Sin. } 19^{\circ} 51' 58'' = 9,5312532 - 10$	$\text{Log Sin } 32^{\circ} = 9,7242097 - 10$
$* 2,1041248$	$\text{L. Sin. } 54^{\circ} 48' 8'' = 9,9123110 - 10$
	<u>11,8844940 - 10</u>
	$\text{af. } * 2,1041248$
	<u>rest . . . 9,7803692 - 10</u>

hetwelk de $\text{Log. Sin. } 37^{\circ} 5' 25''$ is. Men vindt derhalve, voor den eersten wortel, $\text{Sin. } (54^{\circ} 48' 8'' - \phi) = - \text{Sin. } 37^{\circ} 5' 25'' = \text{Sin. } (180^{\circ} + 37^{\circ} 5' 25'')$ of $\phi = - 162^{\circ} 17' 17''$; en, voor den
twee-

tweeden wortel, is $\sin. (180^\circ - (54^\circ 48' 8'' - \phi))$
 $\equiv \sin. (180^\circ + 37^\circ 5' 25'')$; of $\phi \equiv 91^\circ 53' 33''$.
 Daar nu, volgens het eerste antwoord, de hoek ϕ eene negatieve waarde heeft, zoo is het zeker, dat de standpunten D en E, voor dit geval, aan de tegenovergestelde zijde van de holligheid des hoeks ABC zullen vallen: bevinden zich dan de ware standpunten in de holligheid van dezen hoek, dat is, binnen denzelfden, gelijk in de figuur aangenomen is, zoo valt allen twijfel weg, omdat, in dit geval, het tweede antwoord alleen het ware zijn kan.

Om te onderzoeken, welke figuur uit den eersten wortel ontstaat, make men, aan de tegenovergestelde zijde van AB, (Fig. 66.) den hoek BAD: $\phi \equiv 162^\circ 17' 17''$ (*) en, om de punten D en E te bepalen, merke men op: dat, in (Fig. 65.) hoek ABD of hoek ABE $\equiv 180^\circ - (\alpha + \phi)$
 $\equiv 180^\circ - (28^\circ 30' - 162^\circ 17' 17'') \equiv + 313^\circ 47' 17''$ wordt: daar nu deze hoek, grooter, dan 180° is, en de hoek ABE, in de oorspronkelijke figuur 65, van AB naar BC geteld wordt, zoo telle men, in die rigting, ABE $\equiv 313^\circ 47' 17''$, of men neme den scherpen hoek ABE, in fig. 66, gelijk aan het supplement van $313^\circ 47' 17''$ tot 360° , en doordien, voor dit geval, hoek BGE $\equiv \epsilon - \phi \equiv 199^\circ 51' 58'' + 162^\circ 17' 17'' \equiv 360^\circ + 2^\circ 9' 15''$, is, welke, in den zin onzer eerste figuur 65, met hoek $\alpha Cc \equiv 360^\circ + \alpha Cc$ overeenkomt, zoodanig dat de scherpe hoek $\alpha Cc \equiv 2^\circ 9' 15''$ is en Cc aan de binnenzijde van BC valt, waardoor het punt E op de lijn BE bepaald wordt. Verlengt men eindelijk DA tot het verlengde van EB in D, dan zullen de pun-

(*) De lezer raadplege, wegens het begrip van positieve en negatieve hoeken, op dat hij dit gedeelte der oplossing te beter versta, DE GELDER's, *Beg. Meetk.* §. 532. *Wet. Comm.*

punten D en E de standpunten voor de negatieve waarde van ϕ zijn.

Ten einde zich hiervan te overtuigen, zal het slechts noodig zijn, aan te toonen: dat de hoeken BDA en BEC met de waargenomene hoeken $\alpha = 28^\circ 30'$ en $\beta = 32^\circ$ overëenstemmen. Men subtrahere tot dat einde $D'AB = 162^\circ 17' 17''$ van 180° , rest $BAD = 17^\circ 42' 43''$: voorts subtrahere men 180° van den verhevenen hoek ABE $= 313^\circ 47' 17''$, rest $ABD = 133^\circ 47' 17''$; derhalve is $BDA = 180^\circ - (17^\circ 42' 43'' + 133^\circ 47' 17'') = 28^\circ 30' = \alpha$: en, om zich te overtuigen: dat hoek BEC $= \beta = 32^\circ$ is, subtrahere men den verhevenen hoek ABE $= 313^\circ 47' 17''$ van 360° , rest $EBA = 46^\circ 12' 43''$; hier bij $ABC = B = 99^\circ 38' 2''$, geeft $EBC = 145^\circ 50' 45''$, waaruit volgt, dat $BEC = 180^\circ - (145^\circ 50' 45'' + 2^\circ 9' 15'') = 32^\circ = \beta$ is.

Uit dit onderzoek blijkt het dan: dat beide verkregen antwoorden tot twee verschillende problemata behooren: namelijk, in onze oorspronkelijke figuur, zijn de standpunten D en E in eene regte lijn, welker verlengde door het punt D gaat, en binnen den hoek ABC aangenomen: het eerste antwoord van het tweede voorbeeld leert ons echter, dat in onze oplossing het geval mede begrepen is, waarin de standpunten zich buiten den hoek ABC ten wederzijden van het punt B bevinden, zoodanig, dat de punten D, B en E in eene regte lijn liggen: het is dus buiten twijfel, dat deze beide gevallen op het allernaauwste met elkander verknocht zijn, en dat dus het laatste geval, wanneer men daar den verheven hoek $D'AB = \phi$ aanneemt, tot onze gevondene vergelijking brengen moet. In de daad is dan ook $BAD = \phi - 180^\circ$, de verheven hoek $AFC = AFE + 180^\circ = \alpha + \beta + 180^\circ$ en daar, in den vierhoek ABCF, de som zijner vier hoeken, den inspringenden hoek F, als naar be-

behooren $> 180^\circ$ nemende, gelijk 360° is, zoo wordt $BCE = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) - \varphi = \gamma - \varphi$. Voorts is, in den driehoek ABD, $BD = a \sin. (\varphi - 180^\circ) : \sin. \alpha = -a \sin. (180^\circ - \varphi) : \sin. \alpha = -a \sin. \varphi : \sin. \alpha$, en, in den driehoek EBC, is $BE = b \sin. (\gamma - \varphi) : \sin. \beta$, en daar $DE = BE + BD$ is, heeft men
$$\frac{b \sin. (\gamma - \varphi)}{\sin. \beta} - \frac{a \sin. \varphi}{\sin. \alpha} = c$$
, zijnde

deze dezelfde vergelijking, welke wij boven, voor het eerste geval, gevonden hebben. (*)

De meetkundige constructie is de volgende. Men beschrijve (*Fig. 67,*) op AB en BC, als koorden, de beide cirkels, welker middelpunten zijn X en Y, zoodanig, dat hoek AXB $= 2\alpha$ en hoek BYC $= 2\beta$ zij: men make voorts, in den tweeden cirkel, hoek BYF $= 2\alpha$, en beschrijve op AF, als koorde, eenen cirkel, zoodanig, dat de hoek aan het middelpunt FZA $= 2\alpha$ zij; daarna beschrijve men uit F, als middelpunt, met $DE = c$, als straal, eenen boog, welke dezen cirkel, in de beide punten G en g, zal snijden; wanneer men dan uit B de beide lijnen BE en Bc met FG en Fg evenwijdig trekt, zullen deze lijnen de standpunten D en E voor het eerste, en d en e, voor het tweede antwoord, in de omtrekken der beide cirkels bepalen.

Want, volgens de constructie, is hoek ADB $= Adb = \frac{1}{2} AXB = \alpha$; derhalve is FEB $=$
ADB

(*) De stekkundige en de analytisch-trigonometrische oplossingen van meetkundige voorstellen hebben doorgaands het nut, dat zij andere voorstellen of eigenschappen van figuren leeren kennen, waaraan men, hoezeer dezelve met het oorspronkelijke voorstel in verband staan, niet gedacht had, en hoedanige als verwandschap-te figuren moeten beschouwd worden, welker nasporing vermoedelijk voor de uitbreiding der Meetkunst allernuttigst zoude zijn. HUGUENIN.

$\angle ADB$ en $\angle FeB = \angle AdB$; alzoo zijn AD en FE evenwijdig; ook is Ad evenwijdig aan Fe ; maar doordien ook FG en $Fg = c$ evenwijdig met DE en de zijn, zoo is ook $DE = de = c$ en de punten D en E en d en e zijn de standpunten, welke op tweeërlei wijze ons voorstel beantwoorden.

Dezelfde constructie geldt ook voor *fig. 68*, in welke de standpunten d en e voor het tweede antwoord, buiten de rigting der lijn AB vallen, met die uitzondering, dat hier niet de hoek $\angle ADB$ zelf; maar zijn supplement $\angle Ade = \frac{1}{2}AXB = \alpha$ is; zoodat $\angle ADB = 180^\circ - \alpha$ wezen zal.

De constructie voor *fig. 69*, welke met ons tweede voorbeeld overeenkomt, is van de vorige niet onderscheiden; uitgenomen, dat hier de punten d en e van het eene antwoord eene tegengestelde ligging, gelijk die van *fig. 66*, verkrijgen, zoodanig, dat niet het verlengde van $de = c$; maar deze lijn zelve door B gaat en dat voorts hoek $\angle FeB$ (zoo als in *fig. 67*,) niet gelijk $\angle FEB = \frac{1}{2}BYX = \alpha$, maar gelijk aan zijn supplement is; want, naardien de punten F , e , B en E in den omtrek eens cirkels gelegen zijn, is $\angle FeB + \angle FEB = 180^\circ$, en $\angle FeB = 180^\circ - \angle FEB = 180^\circ - \alpha$. Dat nu voor het overige d en e de standpunten zijn, die met het eerste antwoord van het tweede voorbeeld overeenkomen, is zichtbaar: want, aangezien de door B evenwijdig aan Fg getrokken en hoek $\angle Bda = \frac{1}{2}AXB = \alpha$ is, zoo is $\angle Fed + \angle edA = 180^\circ$ en gevolgelyk Fe evenwijdig aan gd ; diensvolgens is $ed = Fg = c$; eindelijk is hoek $\angle Bec = \frac{1}{2}BYC = \beta$; derhalve zijn d en e punten, welke, even als D en E , het voorstel beantwoorden.

Wanneer de lijn $DE = c$ de lengte van de middellijn FH des cirkels FGg heeft, vallen, ingevolge deze constructie, de lijnen FG en Fg op de middellijn FH en de punten D en d , zoo als ook de punten E en e , zullen zich vereenigen en

en er zal, in dit geval, slechts één antwoord bestaan: is echter $DE = c$ grooter dan men, door eene constructie, de middellijn vindt, dan zijn de gegevens van het voorstel onderling onbestaanbaar, omdat de koorden FG en Fg des cirkels niet grooter dan deszelfs middellijn kunnen zijn.

Dit komt nu ook met de hier boven gevondene wortels overëen. Wij hebben gezien: dat dezelfde gelijk worden, als $\text{Sin. } (\mu - \varphi) = \text{Sin. } (180^\circ - (\mu - \varphi)) = \text{Sin. } 90^\circ = 1 = c \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \mu : b \text{ Sin. } \epsilon$ is; derhalve kan $c \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \mu : b \text{ Sin. } \epsilon$ nooit grooter dan één worden; wijl de sinus nooit grooter dan de straal worden kan, en alzoo is de grootste waarde, welke $\text{Sin. } (\mu - \varphi)$ of $\text{Sin. } (180^\circ - (\mu - \varphi))$ hebben kan, $c \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \mu : b \text{ Sin. } \epsilon = 1$; voor welk geval $c = b \text{ Sin. } \epsilon : \text{Sin. } \beta \text{ Sin. } \mu$ worden zal; daar voorts, onder deze voorwaarde, de beide wortels gelijk zijn, zoo moet ook de waarde van c met de lengte van de middellijn FH overëenkomen, hetgeen bovendien ook uit de figuur bewijsbaar is.

CONSTRUCTIE, door J. R. Schmidt.

Laten, *Fig. 70*, A , B en C de gegevene en D en E de gezochte punten zijn, zoodat $\angle ADB = \angle p$, $\angle BEC = \angle q$ en $DE = r$ zij: wanneer wij dan AD verlengen, tot dat zij EC in G snijdt, dan zijn, in den driehoek DEG , bekend, $\angle DEG = q$; $\angle EDG = ADB = p$ en de zijde $DE = r$: de driehoek DEG is dan is alles gegeven en het vraagstuk komt dus eigenlijk hier op neder: *Drie punten A , B en C gegeven zijnde; door elk van dezelve eene lijn te trekken, zoodanig dat de driehoek DEG , door de onderlinge snijding dezer lijnen gevormd, in alles gegeven zij?*

Van dit voorstel nu vindt men eene oplossing

in de *Meetk. Anal.* van den Heer DE GELDER §. 105. in de noot, en eene andere in onze *Verz. van Voorst.* I Deel n^o. 169. door mij zelve gegeven. In deze laatste is aangewezen, dat dit voorstel in het algemeen voor vier-en-twintig onderscheidene oplossingen vatbaar is, welk aantal antwoorden, in ons tegenwoordig geval, slechts tot acht gebragt wordt; omdat hier, in de omstandigheden van het vraagstuk, eene nadere bepaling van den stand des driehoeks DEG, ten opzichte van de gegevene punten A, B en C, ligt opgesloten; want hier wordt gevorderd, dat de zijde DE en niet DG of EG gelijk aan de gegevene lijn r zij; waaruit dan van zelf blijkt: dat het aantal oplossingen slechts een derde kan zijn van het geen het zijn zou, indien er deze voorwaarde niet ware bijgevoegd. Neemt men bovendien nog in aanmerking, dat de voorsteller nog eene voorwaarde stelt, namelijk, dat men, na den hoek ADB gemeten te hebben, in de rigting van BD, tot in E, achter uitgaat en dus het punt E niet op BD; maar op derzelver verlengde moet vallen; dan is het klaar, dat, door deze nadere bepaling, wederom de helft van het getal der oplossingen, welke ons overbleven, worden uitgesloten, en dat er dus slechts vier oplossingen bestaan, welke aan alle de voorwaarden, door den opgever gesteld, in den striksten zin, zullen voldoen. Zie hier kortelijk de constructie, welke ik op de aangehaalde plaats gegeven heb.

Laten (*Fig. 70.*) op AB en BC cirkel-segmenten beschreven worden, bevattende de gegevene hoeken p en q ; dan blijft er niets meer over, dan, uit het snijpunt B dezer twee cirkels, de rechte lijn BD zoodanig te trekken, dat derzelver gedeelte DE tusschen de omtrekken dezer cirkels begrepen, gelijk zij aan de gegevene lijn r

Dit laatste voorstel is het 20^e der onopgeloste,
ach-

achter de *Grond. der Meetk.* van A. B. STRABBE: men vindt in de Werken van ons Genootschap onderscheidene oplossingen van hetzelfde, als eene in de *Meetk. Anal.* van DE GELDER, §. 97, XXI^e *Vr.*; eene van A. F. DE PAAUW in het *Wisk. Mengelw.* II D. N^o. 41, en eindelijk eene van mij zelve, in de *Vorz. van Voorst.* I D. N^o. 168, en deze is de volgende.

Laten (*Fig. 71.*) B en B' de snijpunten der twee cirkels zijn. Men beschrijve op de koorde BB' eenen cirkel: indien dan $B'F = B'F'$, als vierde evenredige tot den afstand PQ der middelpunten, de halve koorde $BB' = \frac{1}{2} BB'$ en de ge-gevene lijn r genomen wordt; dan zullen de lijnen BDE en BD'E', door de punten F en F' getrokken, de begeerde zijn. Men heeft dan twee oplossingen en de lijnen BDE en BD'E' hebben de eigenschap, dat zij met de koorde BB' gelijke hoeken maken. (*Zie 168^e Voorst. I D. Verz. van Voorst.*) Deze twee oplossingen worden slechts ééne, wanneer de vierde evenredige BF aan de middellijn BB' gelijk wordt; het geen plaats heeft, wanneer $2PQ = r$ is, in welk geval, de punten F en F' in B vallen, en de lijn BFE den stand van D'BE', loodregt op BB' verkrijgt. De lijn D'E' is dan, daar eene koorde nooit grooter dan de middellijn zijn kan, de grootste waarde, welke r , zal het vraagstuk bestaanbaar zijn, hebben kan. Passen wij nu deze constructie op het voorgestelde vraagstuk, toe.

Er zijn, in de opgave van het vraagstuk, geene bepalingen, waarom wij de cirkel-segmenten liever aan deze dan aan gene zijde der lijnen AB en BC (*Fig. 70.*) zouden plaatsen: er bestaan dus, ten opzichte van de ligging dezer segmenten, vier combinatiën, ofschoon de ligging der ge-gevene punten A, B en C, de waarde der ge-gevene hoeken p en q , en die der ge-gevene lijn r onveranderd blijven: daar nu elke dezer com-

binatien twee oplossingen geeft, verkrijgen wij er in het geheel acht.

1°. In *Fig. 70*, hebben wij de cirkel-segmenten boven de gegevene lijnen AB en BC geplaatst, en, de constructie wijders, als in *Fig. 71*, ingerigt hebbende, hebben wij de lijnen BDE en E'BD' verkregen, welke met BB' gelijke hoeken maken: de eerste lost het voorstel, in den eigenlijken zin op, omdat E in het verlengde van BD ligt; maar in de tweede ligt E' aan de andere zijde van D': en men is dus, in plaats van in de richting BD' achter uit te gaan, van D' tot B genaderd.

2°. In *Fig. 72*, is het segment op AB naar boven; maar dat op BC naar beneden geplaatst, en dit geval, als in *Fig. 71*, behandeld hebbende, geeft ons de lijnen BDE en BD'E', waarvan de eerste alleen het voorstel in den eigenlijken zin oplost; daar in de tweede E' wederom op de lijn BD' en niet in derzelver verlengde ligt; zijnde hier daarenboven hoek BE'C niet $= q$, maar $= 180^\circ - q$.

3°. Stellen wij, *Fig. 73*, het segment op AB naar beneden, en dat op BC naar boven; dan verkrijgen wij, als boven, de lijnen BDE en BD'E', met BB' gelijke hoeken makende, en waarvan, even als in de voorgaande gevallen, alleen de eerste aan de voorgestelde voorwaarden voldoet.

4°. Stellen wij eindelijk in *Fig. 74*, beide segmenten beneden de lijnen AB en BC; dan verkrijgt men wederom BDE en BE'D', waarvan de eerste eene wezenlijke oplossing geeft, terwijl, in de tweede, het punt E' niet in het verlengde maar op de lijn BD' zelve gelegen is.

Verëenigen wij nu alle deze bijzondere oplossingen, voor deselfde gegevens, in ééne en dezelfde figuur (zie *fig. 75*), dan hebben wij alle oplossingen, waarvoor het vraagstuk, voor de drie

drie gegevene punten A, B en C, de twee gegevene hoeken ADB en BEC en de gegeven lijn DE, vatbaar is, in een duidelijk bestek bij elkander: de oplossingen, uit *Fig.* 70, 72, 73 en 74 volgende, zijn hier met 1 en 2, 3 en 4, 5 en 6, 7 en 8 geteekend, en de vraag is nu, welke van dezelve op de kaart behooren gebragt te worden? De oplossingen, geteekend 2, 4, 6 en 7, lijden geen twijfel; want zij beantwoorden aan eene voorwaarde, welke, in den striktsten zin, niet met de opgegevene overeenstemmen, daar, in alle deze, het punt E niet in het verlengde van BD; maar op BD zelve ligt, en, bovendien, de oplossing, met 4 geteekend, den hoek BEC niet $= q$, maar $= 180^\circ - q$ maakt; waaromtrent, in het werkdadige, geenen twijfel kan overblijven, daar men op het veld altoos weet, of men, in eene zekere rigting, zich van een zichtbaar voorwerp verwijderd of tot hetzelfde nadert? De vier andere oplossingen, gemerkt met 1, 3, 5 en 8, lossen allen het voorstel op, in den volkomensten zin en zonder wijziging van eenige voorwaarde, en men zou dus in het onzekere kunnen blijven, welke van dezelve op de kaart behoorde gebragt te worden? indien niet de eene of andere waargenomene omstandigheid op het terrein deze keuze bepaalde: zoo zou men, bij voorbeeld, niet meer in het onzekere zijn, wanneer men, bij de waarneming, had opgemerkt, dat de rooilijn EDB binnen de beenen van den hoek ABC gelegen ware; want dan zou, in onze figuur, alleen de oplossing, gemerkt met N^o. 1, kunnen dienen. Hadt men opgemerkt, dat de rooilijn tussehen het verlengde van AB en BC viel, zou de oplossing, met 8 geteekend, in de kaart moeten gebragt worden. Wist men, dat zij tussehen AB en het verlengde van BC viel, zou de oplossing, met 5 geteekend, alleen aan de waarneming beantwoorden; en eindelijk

zou

zou de oplossing, met 3 geteekend, voor de ware moeten gehouden worden, wanneer men had opgemerkt, dat DEB tusschen BC en het verlengde van AB gelegen ware.

Offchoon er dan slechts vier van de acht oplossingen aan het vraagstuk kunnen beantwoorden, verdienen de vier andere nogtans alle onze aandacht, daar zij met het voorstel in een naauw verband staan en hetzelfde oplossen, in de onderstelling, dat men, na, in D, den hoek ADB gemeten te hebben, niet in BD eene gegevene lengte DE is te rug gegaan; maar in tegendeel even zoo veel tot het voorwerp B genaderd ware.

Overigens moet worden aangemerkt: dat dit aantal oplossingen, in sommige gevallen, minder wordt; ja dat er somtijds geen antwoord hoegenaamd mogelijk is; en dit alles is van de onderscheidene betrekkingen der gegevens afhankelijk. Is, in *Fig. 71*, $r = D'E'$, bestaat er slechts één, is $r > D'E'$ bestaat er geen antwoord. Wanneer, bij voorbeeld, de gegevens zoo gesteld mogten zijn, als in *Fig. 76, 77, 78 en 79*, is aangewezen, zou de eerste combinatie der segmenten slechts ééne, de tweede en derde combinatie geene, en de vierde twee antwoorden voortbrengen, welke laatste, (zie *Fig. 79*) daar de cirkels zich niet snijden, maar wel aanraken, merkwaardig is: men zou dus wel drie onderscheidene antwoorden hebben: maar, bij elke van deze, ligt E op BD en niet in derzelver verlengde en men verkrijgt dus zelfs niet ééne wezenlijke oplossing: nochtans kan dit geval in het werkdadige geen plaats hebben; aangezien de gegevens, omdat zij, door eene dadelijke meting bepaald worden, niet anders dan altijd onderling bestaanbaar kunnen zijn.

ANAL.

ANAL. OPLOSSING, door *Jacob de Gelder*.

Daar wij geene meetkundige constructie, welke, in den grond der zake, van de waarlijk fraaije, door de Heeren HUGUENIN en SCHMIDT, gegeven, onderscheiden is, gevonden hebben, vergenoegen wij ons, met slechts onze analytische oplossing medetedeelen; niet, omdat wij dezelve, in eenig opzigt, als geschikter of beter oordeelen; maar alleen met oogmerk, om den jongen Wiskundigen, ter gelegenheid van de opgave van dit fraaije en voor het werkdadige belangrijke vraagstuk, eene nieuwe en leerzame bijdrage tot zelfoefening opteleveren.

Daar de Heer HUGUENIN, in zijne opgave, geene bepaling maakt, hoedanig de punten A, B en C, ten opzichte van de lijn DE, moeten gelegen zijn, zoo doen er zich vier gevallen op, welke elk afzonderlijk overwogen en met elkander behooren vergeleken te worden, 1°. wanneer de lijn BDE (*Fig. 65.*) binnen de beenen van den hoek ABC ligt; 2°. wanneer zij tusschen de beenen van den hoek ABP; 3°. wanneer zij binnen den hoek PBQ; en eindelijk 4°. wanneer zij binnen den hoek QBC gelegen is.

a. Stellen wij, met den Heer HUGUENIN, (*Fig. 65.*) $AB = a$, $BC = b$, hoek $ABC = B$, $DE = c$, $ADB = \alpha$, $BEC = \beta$, $BAD = \varphi$ en $\epsilon = 360^\circ - (\alpha + \beta + B)$; dan wordt, zie zijne oplossing, (*Bladz. 206*):

$$\cos. \varphi - \left[\cot. \epsilon + \frac{a \sin. \beta}{b \sin. \alpha \sin. \epsilon} \right] \times \sin. \varphi = \frac{c \sin. \beta}{b \sin. \epsilon}$$

Deze behandelen wij als volgt: (*) de coëfficient van

(*) Dit willen wij als geene critiek aangemerkt hebben. Het strekt alleen, om den Leden aantewijzen: dat men, in de berekening van deze vergelijking, de natuurlijke sinus-tafel ontwijken kan, hetgeen thans doorgaans ge-

van $\text{Sin. } \varphi$ wordt, aangezien $\text{Cot. } \varepsilon = \text{Cos. } \varepsilon : \text{Sin. } \varepsilon$ is, gelijk aan $\frac{b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \varepsilon + a \text{ Sin. } \beta}{b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \varepsilon}$.

Men stelde nu $b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \varepsilon = P$; $a \text{ Sin. } \beta = Q$, en $b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \varepsilon = R$, en $\text{Cot. } \mu = (P + Q) : R$; dan wordt, $\text{Cos. } (\varphi + \mu) = \frac{a \text{ Sin. } \beta \text{ Cos. } \mu}{b \text{ Sin. } \alpha} = M$, en men heeft dan, om den onbekenden hoek φ te vinden, het volgend stelsel van vergelijkingen:

$$(1) \dots \varepsilon = 360^\circ - (\alpha + \beta + B) \dots (1)$$

$$(2) \dots P = b \text{ Sin. } \alpha \times \text{Cos. } \varepsilon$$

$$(3) \dots Q = a \text{ Sin. } \beta$$

$$(4) \dots R = b \text{ Sin. } \alpha \times \text{Sin. } \varepsilon$$

$$(5) \dots \text{Tang. } \mu = (P + Q) : R$$

$$(6) \dots M = \frac{a \text{ Sin. } \beta \text{ Cos. } \mu}{b \text{ Sin. } \alpha}$$

$$(7) \dots \begin{cases} \varphi = \text{Boog Cos. } M - \mu \\ \varphi = -\mu - \text{Boog Cos. } M \end{cases}$$

$$(8) \dots p = a : \text{Sin. } \alpha; \text{ en } q = b : \text{Sin. } \beta$$

$$(9) \dots BD = p \times \text{Sin. } \varphi; \text{ en } AD = p \times \text{Sin. } (\alpha + \varphi)$$

$$(10) BE = q \times \text{Sin. } (\varepsilon - \varphi); \text{ en } CE = q \times \text{Sin. } (\varepsilon - \varphi + \beta)$$

zullende de deugd der berekening daaruit blijken, wanneer het verschil der berekende waarden van BE en BD juist gelijk aan c is.

Nemen wij, om dit stelsel van formules op een voorbeeld toetepassen, het eerste van den Heer HUGUENIN, (zie *Bladz.* 206) te weten $a = 785$, $b = 414$, $c = 306$, $B = 117^\circ 41' 26''$, $\alpha = 50^\circ 30'$ en $\beta = 17^\circ 45'$; dan vindt men (*)

E

geschiedt (en altijd geschieden kan,) en ook van belang is voor hen, die met de tafelen van CALLET, welke de beste en nauwkeurigste zijn, plegen te werken. DE GELDER.

(*) Wij oordeelen het geschikter de schets der berekening te geven; de jonge beoefenaar zal ons gemakkelijker, van stap tot stap, kunnen volgen, en zich in die soort van rekenen, zonder veel moeite, bekwaam kunnen maken. Wij gebruiken bestendig de tafelen van CALLET, welke de beste, nauwkeurigste en gemakkelijkste zijn. DE GELDER.

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 222

$$\begin{array}{l|l} \phi = 174^{\circ} 31' 34'' & E. T. \mu = 0,3750866 \\ \text{Log. } P = 2,5020679 & \mu = -67^{\circ} 8' 20'',78 \\ \text{Log. } Q = 2,3789763 & L. C. \mu = 9,5893856 \\ \text{Log. } R = 1,5193324 & \text{Log. } M = 9,9272873 \\ P = -317,737073 & B. C. M = +32^{\circ} 14' 17'' 37 \\ Q = +239,318493 & \phi = +99^{\circ} 22' 38'',15 \\ R = +33,062253 & \text{of } \phi = +34^{\circ} 54' 3'',41 \\ P + Q = -78,418580 & \text{en, hier uit volgt:} \end{array}$$

1°. Voor de eerste waarde van ϕ ,
 $BE = 1309,739$; $BD = 1003,739$; $AD = 510,553$; $CE = 1856,758$.

2°. Voor de tweede waarde van ϕ ,
 $BE = 888,077$; $BD = 582,077$; $AD = 1014,058$; $CE = 532,601$.

zijnde alles ten nauwkeurigste berekend. Het onderscheid tusſchen deze uitkomsten en die van den Heer HUGUENIN, moet aan het onderscheid der tafels toegescreven worden.

b. Wil men de onbekende hoeken BAD en BCE, op eene andere wijze, vinden, zoo redene- nere men als volgt. In den vierhoek ABCE (Fig. 65.) is $A + C + B + \alpha + \beta = 360^{\circ}$; derhalve $\frac{1}{2}(A + C) = 180^{\circ} - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta)$. Men ſtelle dan kortheidshalve $\gamma = 180^{\circ} - \frac{1}{2}(B + \alpha + \beta)$, en $A = \gamma + \chi$, $C = \gamma - \chi$ (zijnde χ een onbekende hoek, welke, indien hij bekend geworden is, A en C inſgelijks bekend doen worden,) dan is, in de driehoeken ADB en AEC,

$$\text{Sin. } a : \text{Sin. } (\gamma + \chi) = a : BD$$

$$\text{Sin. } b : \text{Sin. } (\gamma - \chi) = b : BE$$

en hieruit volgt, aangezien $BE - BD = c$ is, de vergelijking:

$$b \text{ Sin. } a \text{ Sin. } (\gamma - \chi) = a \text{ Sin. } b \text{ Sin. } (\gamma + \chi) = c \text{ Sin. } a \text{ Sin. } \beta$$

en wanneer men nu deze ontwikkelt, en als boven behandelt, dan vindt men het volgend ſtelsel van vergelijkingen:

(1)

ONTBINDINGEN VAN DE

$$(1) \therefore \gamma = 180^\circ - \frac{1}{2} (B + \alpha + \beta) \dots (II)$$

$$(2) \dots \dots \dots M = a \sin. \beta$$

$$(3) \dots \dots \dots N = b \sin. \alpha$$

$$(4) \dots \text{Tang. } x = \frac{M - N}{M + N} \times \text{Tang. } \gamma$$

$$(5) \dots K = \frac{c \times \sin. \alpha \sin. \beta \times \cos. x}{[M + N] \times \cos. \gamma}$$

$$(6) \dots x = \begin{cases} 1^\circ. \text{Boog Sin. } K - x \\ 2^\circ. 180^\circ - \text{Boog Sin. } K - x \end{cases}$$

$$(7) \dots A = \gamma + x \text{ en } B = \gamma - x$$

$$(8) \dots p = a : \sin. \alpha; \text{ en } q = b : \sin. \beta$$

$$(9) BD = p \times \sin. A \text{ en } BE = q \times \sin. C$$

$$(10) AD = p \times \sin. (A + \alpha) \text{ en } CE = q \times \sin. (C + \beta)$$

Dit stelsel van formules op hetzelfde voorbeeld toepasfende, vindt men:

$\gamma = 92^\circ 58' 13''$	$x = -70^\circ 6' 33'', 77$
$M = 239,31849$	$\text{Log. } K = 9,9272873$
$N = 319,45259$	$B. \sin. K = -57^\circ 45' 42'', 73$
$M + N = 558,77108$	$\text{en } 1^\circ x = +12^\circ 20' 51'', 04$
$M - N = -80,13410$	$\text{of } 2^\circ x = +307^\circ 52' 16'', 50$
$L. \text{Tang. } x = 0,4415197$	$\text{en hieruit vindt men:}$
$1^\circ. \begin{cases} A = 99^\circ 22' 38'', 04 \\ B = 74^\circ 40' 55'', 96 \end{cases}$	$2^\circ. \begin{cases} A = 34^\circ 54' 3'', 50 \\ C = -220^\circ 50' 29'', 50 \end{cases}$

men kan, in de tweede waarde, voor C ook nemen $139^\circ 9' 30'', 5$, welke met $-220^\circ 50' 29'', 50$ dezelfde sinus heeft.

c. Wil men de hoeken ABE en CBE zoeken, zoo stelle men, wijl hoek ABC = B bekend is, hoek ABE = $\frac{1}{2} B - \psi$ en hoek CBE = $\frac{1}{2} B + \psi$; dan heeft men:

$$BAD = 180^\circ - \alpha - \frac{1}{2} B + \psi$$

$$BCE = 180^\circ - \beta - \frac{1}{2} B - \psi$$

en nu vindt men, door de evenredigheden,

$$\sin. BEC : \sin. C = b : BE$$

$$\sin. ADB : \sin. A = a : BD$$

en de vergelijking $BE - BD = c$, (hetgeen wij wederom aan den Lezer ter zelfoefening overlaten,) het volgend stelsel van vergelijkingen:

(1)

VOORGAANDE VOORTSELLEN. 209

- (1) . . . $A = b \sin. \alpha \sin. (\frac{1}{2} B + \beta) \dots (III)$
- (2) . . . $A' = b \sin. \alpha \cos. (\frac{1}{2} B + \beta)$
- (3) . . . $B = a \sin. \beta \sin. (\frac{1}{2} B + \alpha)$
- (4) . . . $B' = a \sin. \beta \cos. (\frac{1}{2} B + \alpha)$
- (5) . . . $Tang. \eta = \frac{A - B}{A' + B'}$
- (6) . . . $L = \frac{c \sin. \alpha \sin. \beta \cos. \eta}{A' + B'}$
- (7) . . . $\psi = \begin{cases} 1^{\circ}. Boog \sin. L - \eta \\ 2^{\circ}. 180^{\circ} - \eta - Boog \sin. L \end{cases}$
- (8) . . . $ABE = \frac{1}{2} B - \psi$ en $CBE = \frac{1}{2} B + \psi$
- (9) . . . $\begin{cases} A = 180^{\circ} - \frac{1}{2} B - \alpha + \psi \\ C = 180^{\circ} - \frac{1}{2} B - \beta - \psi \end{cases}$
- (10) . . . $p = a : \sin. \alpha$; en $q = b : \sin. \beta$
- (11) . . . $BD = p \sin. A$; en $BE = q \sin. C$
- (12) . . . $\begin{cases} AD = p \times \sin. (\frac{1}{2} B - \psi) \\ CE = q \times \sin. (\frac{1}{2} B + \psi) \end{cases}$

Men vindt, dit stelsel van formules op hetzelfde voorbeeld toepasfende,

$\frac{1}{2} B + \alpha = 109^{\circ} 20' 43''$	$L.T. \eta = 1,2115718$
$\frac{1}{2} B + \beta = 76^{\circ} 35' 43''$	$\eta = -86^{\circ} 29' 3'',669$
$A = +310,749643$	$Log. L = 9,9272876$
$B = +225,806467$	$B.S.L = -57^{\circ} 45' 42'',934$
$A' = +74,058068$	$1^{\circ} \psi = +28^{\circ} 43' 20'',737$
$B' = -79,276700$	$2^{\circ} \psi = +324^{\circ} 14' 46'',601$
$A - B = +84,943176$	Met deze twee waarden
$A' + B' = -5,218632$	van ψ vindt men,

Voor de eerste waarde van ψ :

$$ABE = 30^{\circ} 7' 22'',263 \text{ en } CBE = 87^{\circ} 34' 3'',737$$

$$A = 99^{\circ} 22' 37'',737 \text{ en } C = 74^{\circ} 40' 56'',263$$

en voor de tweede waarde van ψ :

$$ABE = -265^{\circ} 24' 3'',601 \text{ en } CBE = 383^{\circ} 5' 29'',601$$

of, dat op het zelfde uitkomt,

$$ABE = +94^{\circ} 35' 56'',399 \text{ en } CBE = 23^{\circ} 5' 29'',601$$

$$A = 34^{\circ} 54' 3'',72 \text{ en } C = 139^{\circ} 9' 30'',1.$$

hetwelk alles, met de berekening der voorgaande formules overeenftemt.

Men zal, langs nog andere wegen, tot de op-
P los-

oplossing van dit werkstuk kunnen komen: dan, de drie opgegevene stelsels van formules, zijn, onder allen, die welke wij beproefd hebben, voor de berekening in getallen de eenvoudigste; inzonderheid geven wij aan de twee eerste stelsels de voorkeur. Men ziet intusschen, hoe nauwkeurig onderscheidene stelsels van formules, uit verschillende oplossingen ontstaande, steeds met elkander overeenstemmen; mits men met aandacht en nauwkeurigheid te werk ga.

Wij hebben dus het eerste geval, wanneer de lijn BDE tusschen de voorwerpen A en C, of in den hoek ABC, gelegen is, afgehandeld, en er blijft ons nog de beschouwing der gevallen over, in welke de lijn BDE in de hoeken ABP, PBQ en QBC valt. In de daad zouden elk dezer gevallen eene bijzondere figuur en eene bijzondere oplossing vereischen, welke, niet tegenstaande de overeenstemming, welke men in deselve vinden zou, in andere opzigten echter van elkander en van het eerste geval zouden schijnen onderscheiden te zijn; maar de oplossingen dezer gevallen zijn alle in de stelsels van formules, uit de oplossing van het eerste geval volgende, begrepen, mits men slechts oplettend zij, op welk eene wijze de teekens der gegevens, ten opzichte dezer andere gevallen, veranderen. Het zal nogtans voor den eerstbeginnenden nuttig zijn dat hij deze gevallen oplosse, (*) op dat hij zich ook,

(*) Dit zal hem meer nut aanbrengen, dan de nuttelooze en geestvermoelijke speculatiën in de oneindigheid van *Polygonalen*, *Columnaren* en *Pirgoïdalen*, welke in de dadelijke toepassing geen nut aanbrengen: bovendien is de grondige naauwkeuring van een enkel fraai en leerzaam werkstuk, gelijk het tegenwoordige is, oneindig meer waard dan de oplossing van honderd anderen; wij hebben ook om die reden alleen dit fraaije en leezame werkstuk zoo uitvoerig behandeld: de aan-
ke.

ook, door de dadelijke proef, van de waarheid onzer gevolgtrekkingen moge verzekeren.

Wanneer men een werkstuk, dat aan onderscheidene gevallen onderworpen is, voor een enkel geval, heeft opgelost, dan is het stelsel van vergelijkingen of formules, voor dit enkele geval verkregen, algemeen voor alle de andere; mits dat men oplette, welke grootheden, in de overige gevallen, van teeken, dat is van positief in negatief, of van negatief in positief veranderen; en tot dat einde moet men de lijnen, welke gezochte punten met gegevens vereenigen, de figuur in de gedachte doen rondwandelen, en aandachtig nagaan; welke gegevens standvastig blijven en welke andere gegevens van teeken veranderen.

De berekening van de drie stelsels van formules, hier boven opgegeven, is gegrond op de onderstelling, dat de lijn BDE binnen den hoek ABC, of dat het voorwerp C ter regter en het voorwerp A ter linkerhand van deze lijn gelagen zij. Natuurlijk heeft men de lijnen a , b en c , benevens de hoeken B; α , β als positief aangenomen; want het positief en negatief zijn der grootheden is slechts betrekkelijk; zij worden slechts in vergelijking van andere negatief.

Laten wij nu de lijn BDE, van de regter naar de linkerhand, doen bewegen, zoodanig dat de hoek ABE steeds kleiner wordt, en laten wij hem eene geheele omwenteling om het punt B laten volbrengen; dan blijven de lijnen a , b en c , benevens de hoek B, standvastig, en kunnen, als zoodanige, noch positief noch negatief wor-

komeling in de Wiskunde moet echter, om onzen voor-
drag grondig te kunnen nagaan, het VIII en IX Boek
onzer *Beg. der Meetk.* raadplegen; hij zal daarin den
waren sleutel vinden van het geen hem hier te zwaar
om te verstaan mogt voorkomen. DE GELUKKIGEN

worden; zij blijven derhalve, in alle mogelijke gevallen, hetzelfde positieve teeken behouden: de hoeken α , β , als mede BAD, BCE, CBE en ABD, veranderen daarentegen van teeken en wel in de volgende rangorde:

1°. In den hoek ABC, blijven de hoeken α en β , ten aanzien van de lijn BDE, in dezelfde betrekkelijke ligging; zij veranderen dus wel in grootte; maar niet van teeken en blijven positief, omdat zij, in de oorspronkelijke stelsels der formules voor dit geval, als positief zijn aangenomen. De hoek ABD wordt kleiner; maar de hoek BAD nadert steeds tot 180° .

2°. Wanneer de lijn BDE op AB valt, dan wordt $\alpha = 0$; ABE $= 0$, en BAD $= 180^\circ$. Alle grootheden welke, in de opgegevene formules, $\sin \alpha$ tot factor hebben, verdwijnen. Dan, het is niet noodig, zich hier mede op te houden; wijl, in dit geval, voor het eerste stelsel, bij voorbeeld, $\phi = 180^\circ$ wordt, en de *form.* (10) van dit stelsel, hier alleen te pas kan komen. Ook ziet men duidelijk; dat dit geval tot de oplossing van eenen driehoek, waarvan ééne zijde en de drie hoeken gegeven zijn, gebragt wordt.

3°. Is de lijn BDE door het punt A gegaan en in den stand N°. 2. gekomen, en liggen dus de voorwerpen: A en C, beide ter rechterhand van B: dan is de hoek α aan de andere zijde van de lijn BDE gekomen, hij is door de nul gegaan, en moet dus, ten aanzien van de ligging, N°. 1, (zie *Beg. Meetk.* §. 532) als negatief beschouwd worden. De hoek β is, in dit geval, wel van waarde verandert; maar vermits hij aan dezelfde zijde van de bewegende lijn BDE gebleven is, is hij natuurlijk positief gebleven. De hoek BAD de ϕ van het stelsel (I) is nu, zoo als het boogje *def* aanwijst, grooter dan 180° geworden; maar de hoek ABD is, daar hij aan de andere zijde van AB (welke de oorsprong zijner telling is,) is,)

is, γ valt, negatief geworden: *alle de drie stelsels van formules, voor het eerste geval gevonden, zullen dan op dit tweede geval toepasselijk worden, indien men slechts α negatief neemt en de teekens, welke de hulpgrootheden, door die onderstelling, verkrijgen, naar de bekende regels verandert.*

4°. Wanneer de lijn BDE, uit den hoek ABP, in den hoek PBQ overgaat, en op het verlengde van BC valt, dan wordt $\beta = 0$, en men ziet duidelijk, dat alsdan het werkstuk wederom tot de oplossing van eenen eenvoudigen driehoek wordt terug gebragt.

5°. Maar is de lijn BDE, bij N°. 3, in den hoek PBQ overgegaan, en ligt het voorwerp A ter regter en het voorwerp C ter linkerhand van de lijn BDE; dan ligt ook de hoek α ter regterhand van BDE, en de hoek β , welke door nul gegaan is, is nu ter linkerzijde van dezelve gekomen en daar zulks, in allen opzichte, het tegenovergestelde van het eerste geval is, moeten de hoeken α en β beide negatief genomen en de teekens der hulpgrootheden, in alle de oorspronkelijke stelsels van formules, naar de bekende regels, bepaald worden; de lijn AD is nu den boog ghi doorgelopen, en de negatieve hoek ABD wordt nog steeds grooter.

6°. Valt de lijn BDE op BQ, dan wordt wederom alles door de oplossing van eenen enkelden driehoek EAC volbragt, en de hoek α gaat dan door nul.

7°. Is de lijn BDE, in den stand N°. 4, tusschen de beenen van den hoek CBQ gekomen, dan is de hoek α , na door nul gegaan te zijn, aan de linkerzijde van de lijn BDE gekomen, en is dus, ten aanzien van de standen N°. 2 en N°. 3, negatief; dat is, daar hij in dezelve negatief was, positief geworden; maar de hoek β aan dezelfde zijde van BDE gebleven zijnde, heeft

zijn negatieve teeken behouden; de hoek BAD is nu, daar hij den boog k/m is doorgelopen, reeds grooter dan 360° geworden, en de negatieve hoek ABD is reeds over de 180° gekomen. Uit dit alles ziet men dan: *dat de oorspronkelijke stelsels van vergelijkingen, voor dit geval, zullen dienen, wanneer men, in dezelve a , positief en b negatief stelt.*

8°. In den overgang eindelijk van het derde tot het eerste geval, heeft hetzelfde verschijnsel, als in den overgang van het eerste tot het tweede, van het tweede tot het derde, enz. plaats. Hier wordt de hoek $\beta = 0$ en gaat van den negativen tot den positiven toestand over, terwijl de hoek α in zijnen positiven toestand blijft.

In deze beschouwing, zijn alle mogelijke gevallen begrepen; het zij men de lijn BE, en de stelling der punten D en E op dezelve, (zoo als wij in de redeneering aangenomen hebben,) standvastig, of dat men dezelve veranderlijk aanneme.

De Heer HUGUENIE heeft zijn werkstuk aan de voorwaarden onderworpen, dat men, na, in D, den hoek α waargenomen te hebben, in de rigting van BD tot in E achteruitga en aldaar den hoek β waarnemt; doch indien hij gezegd hadt *uit het punt D kan men den hoek ADB waarnemen en, in een ander punt E, op de lijn BD genomen, kan de hoek BEC waargenomen worden*, zou dit punt E of voorwaards of achterwaards kunnen gelegen zijn; nu is voorwaards en achterwaards hetzelfde, wat men in de analytische taal, kunstmatig, *positief* en *negatief*, of omgekeerd, *negatief* en *positief* noemt; daar wij dan, in onze oorspronkelijke berekening van het geval N°. 1, de lijn DC $= c$, dat is de afstand van E tot D, positief genomen hebben, zoo volgt hieruit: dat, wanneer men, in plaats van achteruittegaan, vooruit gaat, DE $= c$, ten aanzien van het eerste geval, negatief worden zal: men

men zal dan slechts in de oorspronkelijke stelsels van formules de grootheid ϵ negatief behoeven te stellen, om, ingevalle men vooruitgegaan is, door die zelfde oorspronkelijke stelsels van formules, het werkstuk op te lossen; en, daar voor de negatieve waarde van ϵ , even als voor hare positieve waarde, vier gevallen bestaan, bestaan er, het werkstuk in deszelfs uitgestrektste algemeenheid nemende, acht gevallen; het geen dan alles ten volle overëenkomt met de fraaie constructie, welke de Heer SCHMIDT ons hier boven heeft medegedeeld.

Uit deze verklaring blijkt nu volledig: 1°. dat de stelsels der formules, benevens alle anderen, die men, om het voorstel op te lossen, zou kunnen vinden, ontworpen zijn, in de onderstelling, dat het punt B, ten aanzien van de standpunten D en E des waarnemers, tuschen de twee andere punten A en C en boven de lijn AC gelegen is, en dat men, na den hoek α te hebben waargenomen, zij achteruitgegaan, om den hoek β waartenemen; 2°. dat elk dezer stelsels op zich zelve dienen kan, om, in alle gevallen, zonder onderscheid, de stelling der punten D en E te berekenen; mits dat 1°. wanneer men in plaats van achteruit te zijn gegaan, vooruit gegaan zij, $DE = c$ negatief genomen worde; 2°. dat men, indien de voorwerpen A en C ter rechterhand van het voorwerp B liggen, de hoek α negatief en hoek β positief neme; 3°. dat men, wanneer het punt B tuschen de punten A en C, maar beneden de lijn AC gelegen is, de hoeken α en β beide negatief neme; 4°. en dat men eindelijk, ingevalle de voorwerpen A en C ter linkerhand van het voorwerp B liggen, α positief en β negatief aanneme.

Met deze regels, welke uit den aard der figuur volgen, zal men in het werkdadige alle gevallen, dit werkstuk betreffende, door hetzelfde stelsel

van formules, in getallen kunnen berekenen. In deze uit de natuur genomene gevallen, kunnen de gegevens nimmer onderling onbestaanbaar zijn: men behoeft slechts één geval te berekenen; maar daar hetzelfde twee oplossingen geeft, moet men, na de berekening, onderzoeken, welke van dezelve de wezenlijke waargenomene standpunten D en E geven, en hieromtrent kan nimmer eene onzekerheid bestaan; dan wanneer de twee oplossingen de twee systemata der standpunten D en E zoo na bij elkander mogten brengen, dat het onderscheid als 't ware eene oneindige kleine grootheid mogte zijn.

Doch, bijaldien de gegevens uit geene dadelijke waarneming ontleend zijn, en het werkstuk, zonder eenige bepaling, op de algemeenste wijze, voorgesteld, een voorwerp van beschouwing en oefening wordt, dan moet men, met de aangenomene gegevens, alle de boven opgenoemde gevallen berekenen. Wij hebben, daar deze zaak van zoo veel gewigts is, noodig geoordeeld, de uitkomsten der berekeningen van het eerste voorbeeld, door den Heer HUGUENIN, *Bladz.* 206 opgegeven, in alle mogelijke gevallen genomen, alhier medetedeelen; de berekening is naar het stelsel (II) geschied en het stelsel (I) heeft met eene afwijking van $0'$, 1 of $0'$, 2 dezelfde uitkomsten gegeven.

a. Voor het eerste geval, als namelijk de lijn ADE in den hoek ABC ligt (zie altijd *fig.* 65,) en c positief genomen wordt, is $\gamma = 87^{\circ} 1' 47''$, $\alpha = -70^{\circ} 6' 33'', 77$, *Boog Sin.* $K = -57^{\circ} 45' 42'', 73$, en $\chi = 12^{\circ} 20' 51'', 04$, of $= 307^{\circ} 52' 16'', 50$ en hier mede vindt men:

$$1^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 99^{\circ} 22' 38'', 04 \\ C = 74^{\circ} 40' 55'', 96 \end{array} \right] \text{ of } 2^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 394^{\circ} 54' 3'', 50 \\ C = -220^{\circ} 50' 29'', 50 \end{array} \right]$$

doch c negatief nemende, blijft alles hetzelfde, alleen verkrijgt *Boog Sin.* K het tegengestelde teken, en wordt $= + 57^{\circ} 45' 42'', 73$; en nu is

$$\chi =$$

$\chi = 127^{\circ} 52' 16'', 40$, of $192^{\circ} 40' 51'', 14$; hiermee wordt nu:

$$1^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = +214^{\circ} 54' 3'', 40 \\ C = -40^{\circ} 50' 29'', 40 \end{array} \right] 2^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 279^{\circ} 22' 38'', 14 \\ C = -105^{\circ} 19' 4'', 14 \end{array} \right]$$

b. Voor het tweede geval, wanneer de lijn BDE in den hoek ABP ligt, is voor de positieve waarde van c , $\gamma = 137^{\circ} 31' 47''$; $\alpha = 81^{\circ} 5' 45'', 25$; *Boog Sin. K* $= 10^{\circ} 51' 53'', 65$; $\chi = -70^{\circ} 13' 51'', 60$ of $+88^{\circ} 2' 21'', 10$ en hieruit volgt dan verder:

$$1^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 67^{\circ} 17' 55'', 40 \\ C = 207^{\circ} 45' 38'', 60 \end{array} \right] 2^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 225^{\circ} 34' 8'', 10 \\ C = 49^{\circ} 29' 25'', 90 \end{array} \right]$$

en wanneer men c negatief neemt, wordt

$$1^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 45^{\circ} 34' 8'', 10 \\ C = 229^{\circ} 29' 25'', 90 \end{array} \right] 2^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 247^{\circ} 17' 55'', 40 \\ C = 27^{\circ} 45' 38'', 60 \end{array} \right]$$

c. Valt de lijn BDE in den hoek PBQ; dan is, voor de positieve waarde van c , $\gamma = 155^{\circ} 16' 47''$; $\alpha = 3^{\circ} 46' 38'', 55$, *Boog Sin. K* $= -8^{\circ} 8' 7'', 54$ en $\chi = -11^{\circ} 54' 46'', 09$ of $= +184^{\circ} 21' 28'', 99$; waaruit volgt:

$$1^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 143^{\circ} 22' 0'', 91 \\ C = 167^{\circ} 11' 38'', 09 \end{array} \right] 2^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 339^{\circ} 38' 15'', 99 \\ C = -29^{\circ} 4' 41'', 99 \end{array} \right]$$

en, wanneer men c negatief neemt:

$$1^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 159^{\circ} 38' 15'', 99 \\ C = 150^{\circ} 55' 8'', 01 \end{array} \right] 2^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 323^{\circ} 22' 0'', 91 \\ C = -12^{\circ} 48' 26'', 91 \end{array} \right]$$

d. Valt eindelijk de lijn BDE in den hoek QBC; dan is, voor de positieve waarde van c , $\gamma = 104^{\circ} 46' 47''$, $\alpha = 87^{\circ} 49' 59'', 37$; *Boog Sin. K* $= -7^{\circ} 39' 3'', 48$, $\chi = -95^{\circ} 29' 2'', 85$, of $\chi = 99^{\circ} 49' 4'', 11$, en hieruit volgt dan:

$$1^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 9^{\circ} 17' 44'', 15 \\ C = 200^{\circ} 15' 49'', 85 \end{array} \right] 2^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 204^{\circ} 35' 51'', 11 \\ C = 4^{\circ} 57' 42'', 89 \end{array} \right]$$

en, wanneer men c negatief stelt:

$$1^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 24^{\circ} 35' 51'', 11 \\ C = 184^{\circ} 57' 42'', 89 \end{array} \right] 2^{\circ} \left[\begin{array}{l} A = 189^{\circ} 17' 44'', 15 \\ C = 20^{\circ} 15' 49'', 85 \end{array} \right]$$

Om zich deze uitkomsten duidelijk voortestellen, moet men, met eene schaal en eenen transporteur, de figuur teekenen en de gevondene hoeken A en C in dezelve brengen: men zal dan bevinden:

1°. dat er, voor de positieve waarde van c , twee

standen van de punten D en E, in den hoek ABC, één stand in den hoek PRQ, en één in den hoek QBC aan de gegevens voldoen; dat, voor de negatieve waarde van c , één stand in den hoek ABP en één in den hoek PBR insgelijks aan de gegevens voldoen; er bestaan dus, in den volstrekten zin, vier oplossingen, en, wanneer men uit het vraagstuk het woord *achteruitgaan* weglaat, zes: en dat er geen meer zijn, hangt af van de bijzondere betrekking der gegevens; deze kan zoodanig bestaan, dat er, voor $-c$, insgelijks vier antwoorden plaats hebben. Maar men heeft zestien waarden voor A en C; wat kunnen de tien andere onbestaanbare waarden beteekenen? Is hier geene tegenstrijdigheid, daar men voor A en C wezenlijke en geene onbestaanbare uitdrukkingen verkrijgt? Doch, dit volgende zal de zaak ophelderen. In het algemeen zijn de gestelde gegevens onderling onbestaanbaar, wanneer, in het stelsel (I) $M > 1$, in het stelsel (II) $K > 1$, en in het stelsel (III) $L > 1$ is; want, daar, in dit geval, de eindvergelijking van het werkstuk niet bestaan kan, zoo zijn ook de gegevens onderling onbestaanbaar; maar, wanneer de eindvergelijking van een werkstuk bestaanbaar is, kan het werkstuk nogtans onbestaanbaar worden, wanneer andere vergelijkingen, welke met deze eindvergelijking in geen onmiddellijk verband staan, met de gevondene wezenlijke waarden, uit die eindvergelijking afgeleid, strijdig zijn. En dit is juist hier het geval; want, in het algemeen, moet 1°. $A + B + C + \alpha + \beta = 360^\circ$; 2°. in den eersten en vierden stand, $BAD + \alpha < 180^\circ$ en, in den tweeden en derden stand, $360^\circ - BAD + \alpha < 180^\circ$; nu zal men bevinden: dat alle de boven opgegevene waarden van A en C, welke geen bestaanbaar antwoord op het vraagstuk geven, aan deze vergelijkingen niet voldoen. Nu vraagt men: van waar zestien antwoorden, daar

daar er slechts ~~acht~~ mogelijk zijn? De zaak aandachtig overwegende zal men zien, dat ook de gevallen, waarin men, niet de hoeken ADB en BEC , maar wel derzelfver supplementen heeft waargenomen, in deze oplossingen mede begrepen zijn; en dit alzoo zijnde, dan bestaan er nog twee zoodanige antwoorden in den hoek ABC . Doch, de Lezer onderzoeke zelve; wij zouden verder gaande, oer eene verhandeling dan eene oplossing schrijven; bij eene andere gelegenheid meer hier van. Wij moeten echter, voor den eerstbeginnenden, nog dit weinige ter opheldering zeggen. De hoeken A en C komen, in de boven opgegevene antwoorden, in alle quadranten, *positief* en *negatief* voor; om deze nu met den transporteur te plaatsen, moet men de positieve en negatieve hoeken A en C , van de lijnen AB en CB beginnen te tellen, en wel in die richtingen, welke in de figuur met de teekens $+$ en $-$ aangewezen zijn, hetgeen, uit de voorgaande beschouwingen, duidelijk genoeg blijkt.

Ten slotte merken wij aan: 1°. dat dit voorstel een bijzonder geval schijnt te zijn van N°. 63 van dit Deel, door den Heer HUGUENIN opgegeven; maar de oplossingen, aldaar gegeven, worden, indien men, in *Fig. 44*, $BDE = \beta = 180^\circ$ en $BDE = \gamma = 0$, stelt, onbepaald. 2°. Dat het tegenwoordig voorstel, indien $C = 0$ wordt, in het bekende vraagstuk van SNELLIUS verandert, gelijk ook het stelsel der formules (II), indien men $M : N = \text{Tang. } \gamma$ stelt, in dat, hetwelk wij, in onze Beginselen, gegeven hebben, op de letters na, verandert.

N^o. 91. Door

U. HUGUENIN, en Jacob de Gelder. (*)

Daar de punten a , b en c (*Fig. 80.*) benevens de cirkel ABC in stand of stelling gegeven zijn, zoo zijn, (P het middelpunt des cirkels zijnde,) de lijnen $aP = a$, $bP = b$, $cP = c$, benevens de hoeken $aPb = \alpha$, $bPc = \beta$ en $cPa = \gamma$, gegeven, en, daar de cirkel ook in grootte gegeven is, is ook zijn straal $AP = BP = CP = r$ gegeven. Men stelde de onbekende hoeken $APa = \phi$, $BPb = \omega$ en $CPc = \zeta$; dan wordt $aPC = \gamma + \zeta$, $bPA = \alpha + \phi$ en $cPB = \beta + \omega$: men heeft dan, in den driehoek aPC , de bekende evenredigheid:

$$aP + CP : aP - CP = \text{Tang.} \frac{1}{2} (aCP + PaC) : \text{Tang.} \frac{1}{2} (aCP - PaC)$$

maar aangezien $aCP + PaC = 180^\circ - aPC = 180^\circ - (\gamma + \zeta)$, $aCP - PaC = CAP - CaP = APa = \phi$, en $\text{Tang.} \frac{1}{2} (aCP + PaC) = \text{Tang.} (90^\circ - \frac{1}{2} (\gamma + \zeta)) = \text{Cot.} \frac{1}{2} (\gamma + \zeta)$ is, zoo wordt de voorgaande evenredigheid:

$$a + r : a - r = \text{Cot.} \frac{1}{2} (\gamma + \zeta) : \text{Tang.} \frac{1}{2} \phi$$

waaruit (voor $\text{Cot.} \frac{1}{2} (\gamma + \zeta)$ hare waarde schrijvende,) volgt:

$$\text{Tang.} \frac{1}{2} \phi = \frac{a - r}{a + r} \times \frac{1 - \text{Tang.} \frac{1}{2} \gamma \text{Tang.} \frac{1}{2} \zeta}{\text{Tang.} \frac{1}{2} \gamma + \text{Tang.} \frac{1}{2} \zeta} \dots (1)$$

In den drieh. cPB , is hoek $cPB = \beta + \omega$ en dus $PBc + PcB = 180^\circ - (\beta + \omega)$; $PBc - PcB = PCB - PcB = CPc = \zeta$: insgelijks is, in den driehoek APb , $aPb = \alpha + \phi$, $PAb - PbA = PBA - PbB = BPb = \omega$ en $PAb + PbA = 180^\circ - (\alpha + \phi)$ en men vindt, op gelijke wijze, als boven,

Tang.

(*) Zie de oplossing van DE GELDER, in zijne *Meeth. Anal. Bladz. 155, en verv.*

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 235

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} \zeta = \frac{c-r}{c+r} \times \frac{1 - \text{Tang. } \frac{1}{2} \beta \text{Tang. } \frac{1}{2} \omega}{\text{Tang. } \frac{1}{2} \beta + \text{Tang. } \frac{1}{2} \omega} \dots (2)$$

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} \omega = \frac{b-r}{b+r} \times \frac{1 - \text{Tang. } \frac{1}{2} \alpha \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi}{\text{Tang. } \frac{1}{2} \alpha + \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi} \dots (3)$$

Men stelde nu, ter bekorting, $A = \frac{c-r}{c+r}$,

$$B = \frac{b-r}{b+r}, C = \frac{c-r}{c+r}, m = \text{Tang. } \frac{1}{2} \alpha, n =$$

$\text{Tang. } \frac{1}{2} \beta$ en $p = \text{Tang. } \frac{1}{2} \gamma$; dan verandert de

vergelijking (1) in $\text{Tang. } \frac{1}{2} \zeta = \frac{A - p \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi}{Ap + \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi}$

en deze met de vergelijking (2) vergeleken hebbende, zal men vinden:

$$\frac{A - p \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi}{Ap + \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi} = C \times \frac{1 - n \text{Tang. } \frac{1}{2} \omega}{n + \text{Tang. } \frac{1}{2} \omega}$$

en dezelve, ten opzichte van $\text{Tang. } \frac{1}{2} \omega$, oplos-

$$\text{Tang. } \frac{1}{2} \omega = \frac{ACp - An + (C + pn) \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi}{ACnp + A + (ACn - p) \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi}$$

en vergelijkt men eindelijk deze waarde van $\text{Tang. } \frac{1}{2} \omega$ met die van vergelijking (3), zoo verkrijgt men:

$$\frac{ACp - An + (C + pn) \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi}{ACnp + A + (ACn - p) \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi} = B \times \frac{1 - m \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi}{m + \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi}$$

in welke alleen de onbekende hoek ϕ voorkomt: deze vergelijking verder ontwikkelende en kortheidshalve

$$P = C + np + Bm(Cn - p)$$

$$Q = m(C + np) + A(Cp - n) + ABm(Cnp + 1) - B(Cn - p)$$

$$R = A[B(Cnp + 1) + mn - Cmp]$$

stellende, verkrijgt men de vierkants-eindvergelijking:

$$P \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi + Q \text{Tang. } \frac{1}{2} \phi = R$$

welke met behulp van de sinus-tafel, aldus kan worden opgelost. Men vermenigvuldige dezelve met den factor $\text{Cos. } \frac{1}{2} \phi$, dan wordt zij:

$$P \text{Sin. } \frac{1}{2} \phi + Q \text{Sin. } \frac{1}{2} \phi \text{Cos. } \frac{1}{2} \phi = R \text{Cos. } \frac{1}{2} \phi \text{ dat}$$

dat is, (zie DE OELDER, *Beg. der Meetk.* §. 546 en 547)

$P.(1 - \cos.\phi) + Q \sin.\phi = R(1 + \cos.\phi)$
of, na ontwikkeling en verschikking der termen,

$$\sin.\phi - \frac{P + R}{Q} \times \cos.\phi = \frac{R - P}{Q}$$

Men stelle, in deze, den coëfficient $\frac{P + R}{Q} =$
 $\text{Tang.} \varepsilon = \sin.\varepsilon : \cos.\varepsilon$; dan wordt (zie de
noot op *Bladz.* 83, hier boven, of de *Meetk.*
Anal. §. 347. *Bladz.* 265.)

$$\sin.(\phi - \varepsilon) = (R - P) \cos.\varepsilon : Q$$

$$\text{of } \sin.[180^\circ - (\phi - \varepsilon)] = (R - P) \cos.\varepsilon : Q$$

door welke de twee waarden, welke ϕ hebben
kan, in getallen berekend kunnen worden.

De oplossingswijze, waarvan ik mij hier be-
diend heb, is ontleend, uit de *Géométrie de*
position van CARNOT; zij is toepasselijk op alle
in den cirkel te beschrijvende veelhoeken, zonder
tot eene hoogere, dan tot eene vierkants-verge-
lijking op te klimmen, met deze uitzondering
echter, dat de coëfficienten ingewikkelder wor-
den, naarmate het aantal van de zijden des veel-
hoeks toeneemt.

CASTILLON heeft dit voorstel, volgens het
bericht van CARNOT, het eerst in den trant der
ouden opgelost, in de *Mémoires de l'Acad. de*
Berlin 1776; LA GRANGE gaf daarop dade-
lijk, in dit zelfde deel, eene analytische oplossing
van hetzelfde; terwijl LEXELL, in het IV *Deel*
der Petersburgsche Comment. de formule van LA
GRANGE construeerde. In het IV Deel van de
Memorie della Società Italiana is dit voorstel,
op eene sierlijke wijze, door den zestien jarigen
OLTAJANO, opgelost, en op alle veelhoeken
toegepast, en men vindt nog eene andere, in
denzelfden trant, door MALFATI, in dit zelf-
de deel geplaatst.

Ik heb geene dezer oplossingen of constructien
ge-

gezien; (*) doch, naar onze oplossing te besluiten, moet de constructie vermoedelijk zeer wijdloopig zijn; wij zullen daarom slechts onze vergelijking op het eenvoudigste geval toepassen en aannemen, dat de punten a , b en c de hoekpunten eens gelijkzijdigen driehoeks zijn en dat het middelpunt P des gegeven cirkels ABC tevens het middelpunt des cirkels zij, die om den driehoek abc kan beschreven worden. Voor dit geval, is nu $a = b = c$; hoek $a = A = \gamma = 120^\circ$; $m = n = p = \text{Tang. } 60^\circ$, $A = B = C = (a - r) : (a + r)$ en nu wordt:

$$\begin{aligned} P &= A + p^2 (A^2 - A + 1) \\ Q &= p (A + 1) [A + p^2 (A^2 - A + 1)] \\ R &= A \times [A + p^2 (A^2 - A + 1)] \\ \frac{P+R}{Q} &= \frac{(A+1) [A + p^2 (A^2 - A + 1)]}{p (A+1) [A + p^2 (A^2 - A + 1)]} = \frac{A}{p} = \text{Cos. } 60^\circ \\ \frac{P-R}{Q} &= \frac{(A-1) [A + p^2 (A^2 - A + 1)]}{p (A+1) [A + p^2 (A^2 - A + 1)]} = \frac{r}{a} \text{Cos. } 60^\circ \end{aligned}$$

Onze eindvergelijking verandert dan in deze:

$$\begin{aligned} \text{Sin. } \phi - \text{Cos. } \phi \cdot \text{Cos. } 60^\circ &= -\frac{r}{a} \text{Cos. } 60^\circ \\ \text{waaruit volgt: } \text{Cos. } 60^\circ \text{Cos. } \phi &= \text{Sin. } 60^\circ \text{Sin. } \phi \\ &= \frac{r}{a} \text{Cos. } 60^\circ; \text{ zijnde derhalve de twee wortels der vergelijking:} \end{aligned}$$

$$1^\circ \text{Cos. } (60^\circ + \phi) = \frac{r}{a} \text{Cos. } 60^\circ$$

$$2^\circ \text{Cos. } [360^\circ - (60^\circ + \phi)] = \frac{r}{a} \text{Cos. } 60^\circ$$

$$\text{Uit den eersten wortel volgt nu: } a \cdot \text{Cos. } (60^\circ + \phi) = r$$

(*) In de *Meetk. Anal.* zullen wij, volgens onze belofte, dit werkstuk nader behandelen; voor het tegenwoordige zou zulks meer plaats innemen, dan de veelheid van stof, voor dit deel voorhanden, gedooft. DE GELDER.

$= r \cos. 60^\circ$ en deze is ligt te construeren. Laten, (Fig. 81.) tot dat einde, de lijnen aP , bP en cP getrokken worden, snijdende den omtrek des gegebenen cirkels, in de punten, f , g en i ; voorts trekke men fg en late uit P de loodlijn Ph op dezelve vallen; dan is $fPh = hPg = 60^\circ$, en $Ph = r \cos. 60^\circ$. Men beschrijve dan op aP , als middellijn, eenen cirkel, en stelde in deszelfs omtrek, uit P , de lengte $Pi = Ph$; zoo zal, na ai getrokken te hebben, $aPi = 90^\circ$, en $iP = aP \times \cos. aPi = a \times \cos. aPi = Ph = r \times \cos. 60^\circ$ zijn, en aPi is derhalve $\pm 60^\circ \pm \phi$. Daar voorts de lijn ai den gegebenen cirkel in A , en, verlengd zijnde, in C snijdt; en bovendien hoek $AiP = 90^\circ$ is, waardoor $Ai = iC$ wordt, zoo is (AP getrokken hebbende,) $APi = 60^\circ$, en alzoo $aPA = \phi$.

Daar nu, volgens deze constructie, de gelijkbeenige driehoeken fPg en APC volmaakt gelijk en gelijkvormig zijn, zoo is het gemakkelijk te zien: dat hoek $gPC = APa$, of dat $\phi = \zeta$ is, en, wanneer men nu aC , tot aan den omtrek in B , verlengt, zal men ligtelijk bewijzen: dat ABC de begeerde driehoek is, welke gelijkzijdig zal zijn en dat de punten A , B en b in dezelfde rechte lijn liggen.

Bovendien is het zichtbaar; dat, makende $Ph = Pi = Pk$ en trekkende, door a en k , eene rechte lijn, den gegebenen cirkel in A' en B' snijdende, A' en B' twee punten eens tweeden driehoeks zullen zijn, welke aan den tweeden wortel der eindvergelijking beantwoorden; wordende het derde punt C' dezes tweeden driehoeks gevonden, wanneer men, door b en B' eene rechte lijn, tot aan den omtrek in C' , trekt; want het is zichtbaar, dat $aPk = aPi$ is, en dat de verheven hoek om aPk gelijk aan $360^\circ - (60^\circ + \phi)$ wordt.

Eindelijk moet ik nog aanmerken: dat, wanneer

reer a, b, c, d , enz. de punten eens regelmatig-
gen veelhoeks zijn en P het middelpunt des om-
geschrevenen cirkels, de hier opgegevene construc-
tie slechts behoort gevolgd te worden, om eenen
veelhoek, aan de vereischten der vraag voldoende,
in eenen gegebenen concentriecken cirkel fgh enz.
te beschrijven.

Nº. 92. Door

U. HUGUENIN, en Jacob de Gelder.

Zij, Fig. 82, MN de as of abscissen lijn der
kromme, waarvan $y = 864x - \frac{252x^2}{a} + \frac{28x^3}{a^2}$
 $-\frac{x^4}{a^3}$ de gegebene vergelijking is.

Om den oorsprong der ordinaten benevens de
punten, in welke de kromme lijn de as MN
snijdt, te bepalen, stelle men, in de gegebene
vergelijking, $y = 0$; dan heeft men, na alles
met a^3 vermenvuldigd te hebben, $x^4 - \dots$
 $28ax^3 + 252a^2x^2 - 864a^3x = 0$. In deze is
vooreerst $x = 0$; stelt men dus, dat het punt A
de oorsprong der abscissen is, dan zijn, voor dit
punt, x en y beide $= 0$, en de kromme lijn
gaat dan door hetzelfde; maar uit de laatste ver-
gelijking vindt men, na dezelve door $x = 0$
gedeeld te hebben

$x^3 - 28ax^2$
welke, daar zij
en dus ten minst
zal hebben, ons
ten minste nog
stelle, om de al
te vinden, $x =$

vergelijking: $x^3 - 14x^2 + 63x - 108 = 0$, en
stellende verder $x = r + \frac{1}{r}$; dan verandert de-

$x - 864a^3 = 0$
magts vergelijking is,
n bestaanbaren wortel
de kromme lijn de as
nt zal snijden. Men
dit punt behdorende,
wordt de laatste ver-

ze wederom in $y^3 - \frac{7}{3}y - \frac{466}{27} = 0$; welke, door $y = \frac{\omega}{3}$ aannemen, in $\omega^3 - 21\omega - 466 = 0$ verandert, waaruit, volgens den regel van CARDANUS, de eenige mogelijke wortel, $\omega = \sqrt[3]{[233 + \sqrt{(233^2 - 7^3)}]} + \sqrt[3]{[233 - \sqrt{(233^2 - 7^3)}]} = 8,65205$ gevonden wordt; $y = \frac{1}{3}\omega = 2,884016$; $z = y + 4\frac{2}{3} = 7,550683$; en $x = 2az = 15,101366a$. Maakt men dan $AB = x = 15,101366a$, zoo zal, daar voor deze waarde van x , de ordinaat $y = 0$ is, de kromme door het punt B gaan.

Om verder te onderzoeken, of de kromme zich veel of weinig boven de abscissen lijn MN verheffe, stelle men, in de gegevene vergelijking, $x = a$; dan verkrijgt men: $y = 864a - 252a + 28a - a = 639a$, bewijzende, dat de ordinaat y , voor $x = a$, meer dan zeshonderdmaal groter dan de absbis wordt. Daar zich dan de kromme lijn zoo aanmerkelijk ver boven de abscissen lijn MN verheft en dezelve, in zulk eene verhouding tusfchen de abscissen en ordinaten, bezwaarlijk in eene figuur te brengen zoude zijn, zullen wij de ordinaten, naar eene honderdmaal kleinere fchaal dan die der abscissen, in de figuur voorstellen. Wanneer men dan, volgens deze fchalen, $AC = a$ en $CL = 639a$ neemt, zal L het punt der kromme zijn, hetwelk tot de abscis, $x = a$, behoort

Het is uit de vergelijking zichtbaar, dat, aangezien hare termen, welke de evenen magten van x inhouden, negatief zijn, y , voor alle negatieve waarden van x , niet slechts negatief blijven; maar dat de

Waarde van x	Waarde van y
...	...
$6a$	$864a$
$5a$	$895a$
$4a$	$960a$
$3a$	$999a$
$2a$	$928a$
a	$639a$
$-a$	$-1145a$
$-2a$	$-2976a$
$-3a$	$-5697a$
$-4a$	$-9536a$
$-5a$	$-14745a$
$-6a$	$-21600a$
enz.	enz.

or-

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 541

ordinaten, beneden de as, veel sterker dan boven
dezelve zullen zijn; zoo als men ook uit
het nevenstaande berekeningetje duidelijk ziet,
uit hetwelk bovendien blijkt: dat de trommel
onder de as, met de bolle zijde naar de as ge-
keerd is, omdat de holle zijde, bij de eerste po-
ve abscissen ten minste, naar dezelve gelegen is.

Uit dit tafeltje blijkt al verder: dat, voor de positieve abscissen, de ordinaten beurtelings aangroeijen en afnemen en dat er diensvolgens ten minste eene grootste ordinat bestaat moet. Om nu deze te bepalen, differentieere men de gegevene vergelijking; dan heeft men:

$$\delta y = 864 \delta x - \frac{504 x \delta x}{a} + \frac{84 x^2 \delta x}{a^2} - \frac{4 x^3 \delta x}{a^3} \dots (A)$$

en hieruit :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -x^3 + 21ax^2 - 126a^2x + 216a^3 = 0$$

waarvan $x = 3a$, $x = 6a$ en $x = 12a$ de wortels zijn, welker overeenkomstige ordinaten, te weten, $y = 999a$, $y = 864a$ en $y = 1728a$, *maxima* of *minima* kunnen zijn.

Om dit nu te beslissen, differentieer men de vergelijking (A); dan is:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\frac{504 \partial x}{a} + \frac{168 x \partial x}{a^2} - \frac{12 x^2 \partial x}{a^3}$$

en hieruit' volgt dan verder:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{12}{a^3} \times [x^2 - 14ax + 42a^2] \dots (B)$$

stelt men nu in deze uitdrukking $x = 3a$; dan wordt derzelve waarde, of het rapport van $\partial^2 y : \partial x^2$ gelijk aan $-9a^2$, en dus negatief, verstrekkende ten bewijze, dat, voor de coördinaten, $x = 3a$, $y = 999a$, de ordinaat y eene grootste is. Stelt men voorts, in dezelfde uitdrukking (B), eerst $x = 6a$ en daarna $x = 12a$; dan wordt zij respectievelijk $+6a^2$ en $-18a^2$; waaruit gevolgelijk blijkt: dat $x = 6a$ de

Q. 2

over-

overeenkomstige ordinaat tot eene kleinste, en $x = 12a$ dezelve tot eene grootste maakt.

Maar het zou men kunnen zijn, dat de punten der kromme lijn, welke, door deze grootste en kleinste ordinaten, bepaald worden, tevens keerpunten (points de rebroussement) waren? Om in dezen te beslissen, moet men de algemeene uitdrukking voor de subtangens der kromme lijn, welke, (gelijk men weet,) door het berekenen

van de functie $y \times \frac{\partial x}{\partial y}$ gevonden wordt, en voor onze geëvene kromme lijn

$$\frac{y \partial x}{\partial y} = \frac{x}{4} \times \frac{x^3 - 28ax^2 + 252a^2x - 864a^3}{x^3 - 21ax^2 + 126a^2x - 216a^3} \quad (C)$$

is, in overweging nemen. Er kan geen keerpunt bestaan, of de twee takken AB en BC, (Fig. 83 en 84) welke door het keerpunt B vereenigd zijn, moeten, ten aanzien van de as MN, als in Fig. 83 liggen en dan behooren tot eenige abscis twee ordinaten; maar daar, in de geëvene vergelijking, y slechts tot de eerste magt opklimt, is zulk eene soort van keerpunt niet mogelijk; de takken AB en BC kunnen dan alleenlijk gelijk als in Fig. 84 liggen, en dan moet, buiten allen twijfel, de subtangens van dit keerpunt gelijk nul zijn: nu wordt, voor $x = 12a$, $x = 6a$ en $x = 3a$, de subtangens, respectievelijk $\frac{1768a}{0}$, $\frac{864a}{0}$ en $\frac{999a}{0}$, en dus, in alle deze

gevallen, oneindig groot en niet gelijk nul, zoo als behoorde plaats te hebben, wanneer de punten, tot de grootste of kleinste ordinaten behorende, keerpunten waren. Slechts, in twee gevallen, wordt de subtangens nul; te weten, wanneer $x = 0$ en (zie boven) $x = 15,101376a$ is; dat is in de twee punten A en B, (Fig. 82) in welke de kromme lijn de as MN snijdt.

De tangens van den hoek, onder welken de tan-

tangens van eenig punt eener kromme lijn hare as doorsnijdt, is, (gelijk elk weet) $= \delta y : \delta x$ en zij is, voor onze gegevene kromme lijn:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{4}{a^3} \times (x^3 - 21ax^2 + 126a^2x - 216a^3). \quad (D)$$

Stelt men, in deze uitdrukking, $x = 0$; dan wordt de tangens van den hoek, onder welke de kromme lijn de as, in den oorsprong A, doorsnijdt, gelijk aan $+ 864$, en de hoek zelve $= 89^\circ 56' 2'', 7$; maar stelt men $x = 15,101376a$; dan wordt de tangens van den hoek, onder welken de kromme de as in het punt B snijdt $= -1366,36$ en de hoek zelve $= -89^\circ 57' 28'', 9$; waaruit blijkt: dat de tangenten der punten A en B elkander, naar boven, onder eenen hoek van $0^\circ 6' 28'', 4$, snijden, binnen welken hoek gevolgelijk de geheele kromme lijn gelegen is.

Het buigpunt P (*Fig. 85,*) eener kromme lijn, heeft de eigenschap, dat de tangens PT van dat punt niet slechts de kromme lijn in hetzelfde aanraakt; maar ook doorsnijdt: het eene gedeelte PY der kromme is dan beneden en het ander gedeelte PX boven dezelve gelegen; of omgekeerd. Uit deze bepaling, kan nu gemakkelijk eenen regel, strekkende ter naarspeuring der buigpunten worden afgeleid. (*). Zij PM de ordinat van het buigpunt P, TP de tangens en TM de subtangens van hetzelfde: men neme, ter regter en linkerhand van P, de ordinaten P'M' en P'M'', op zekeren afstand $MM' = MM'' = i$; dan is
(in-

(*) Wij nemen deze gelegenheid waar, om het gebrekkige van de leerwijze der Engelschen, welke de Heer STRABBE, in de VIII *Afdcel.* zijner *Fluxte-Rekening*, gevolgd heeft, ten gebruike der Leden, te verbeteren. In onze *Differentiaal en Integraal-Rekening*, zullen wij dit Stuk nogtans nader en met meer klaarheid kunnen toelichten. DE. GELDER.

(indien men door het punt P de lijn RPR' evenwijdig aan de as getrokken heeft,) P'R of P'R' de verandering van de ordinaat, en, volgens het theorema van TAYLOR, zal

$$P'R = \frac{\partial y}{\partial x} \times i + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \times \frac{i^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \times \frac{i^3}{6} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \times \frac{i^4}{24} + \text{enz.}$$

zijn, in welke vergelijking i slechts negatief behoeft genomen te worden (hetgeen dan de teekens van de onevene magten van i verandert,) om de waarde van P'R' (met MM' overeenstemmende) te vinden. Nu is de subtangens TM van het

punt P gelijk aan $\frac{y \partial x}{\partial y}$ en, uit de gelijkvormige driehoeken, TMP en PRN, volgt: TM : PM =

PR : RN; dat is, $\frac{y \partial x}{\partial y} : y = i : RN$; dus RN

$= \frac{\partial y}{\partial x} \times i$; daar nu, in de figuur, P'N = P'R

— RN is, zal

$$P'N = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{6} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^4}{24} + \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} \cdot \frac{i^5}{120} + \text{enz.} \quad (E)$$

moeten zijn. Beschouwen wij nu, in de figuur, den toestand der lijn P'N ter regter en ter linkerzijde van het buigpunt P; dan ziet men: dat zij ter regterzijde van hetzelfde positief; maar ter linkerzijde negatief moet zijn, terwijl zij, in het buigpunt zelve, verdwijnt. Zulks dan buiten twijfel zijnde, zal men uit de gesteldheid van de vergelijking (E) kunnen opmaken, wat er, in de nabijheid van een buigpunt P, gebeuren zal en aan welk kenmerk derhalve deszelfs aanwezen, in eene gegevene kromme lijn zal kunnen herkend worden? Het is, uit het *Theorema* van TAYLOR, bekend, dat de letter i (welke hier niet als eene oneindige kleine; maar als eene eindige grootheid genomen wordt,) altijd zoo klein kan genomen worden, dat elke term, op zich zelve,

ven; grooter is dan de som van al de volgende (*); zulk eene waarde van $i = MM' = MM''$ dan aannemende, zal de term $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \times \frac{i^2}{2}$ (aangezien $i^2 = (-i)^2$ is,) altijd positief blijven; i derhalve zoodanig genomen hebbende, dat die term grooter dan de som van al de anderen wordt, zal onze vergelijking, voor de negatieve waarde van i , niet negatief kunnen worden, ten zij men de coëfficient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ gelijk nul aangenomen hebbe. Neemt men dan deze coëfficient gelijk nul aan, zoo zal (daar men voor i zulk eene waarde aangenomen heeft, dat $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \times \frac{i^3}{6}$ grooter is dan de som van al de volgende termen,) de vergelijking (E) aan de voorwaarde voldoen dat, voor $+i$ en $-i$, PN positief en negatief wordt. Men zal dus de vergelijking $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ moeten oplossen en deze zal de abscissen, tot de wezenlijk bestaande buigpunten behoorende, bepalen. Maar zulks is niet genoeg: wanneer men, uit geene bijzondere omstandigheden weet, dat er buigpunten bestaan, zou men zich zeer kunnen bedriegen, daar de wortels der vergelijking $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ niet altijd buigpunten geven; want, ingeval eenige wortel dezer vergelijking den volgenden term $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \times \frac{i^3}{6}$ nul maakt en tevens den onmiddellijk volgenden positief of negatief, strijdt zulk een wortel met de voornaame voorwaarde van een buigpunt en geeft er geen; doch wordt ook die term

(*) Dit te bewijzen zou ons te ver afleiden: men moet zulks hier, als bewezen, aannemen. DE GELDER.

term door de substitutie van dien wortel nul en de volgende positief of negatief; dan geeft hij een buigpunt; en op die wijze moet men met het onderzoek der volgende termen voortgaan, tot dat men de zaak geheel voldongen hebbe.

Passen wij nu dit verklaarde op onze gegevene kromme lijn toe. Wij hebben, zie boven:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{4}{a^3} \times (x^3 - 21ax^2 + 126a^2x - 216a^3)$$

en, door de volgende differentialen te zoeken, vindt men:

$$\frac{\delta \delta y}{\delta x^2} = -\frac{12}{a^3} \times (x^2 - 14ax + 42a^2)$$

$$\frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = -\frac{24}{a^3} \times (x - 7a)$$

Stellen wij dan, volgens de boven verklaarde theorie, $\delta \delta y : \delta x^2 = 0$; dan moet de vergelijking, $x^2 - 14ax + 42a^2 = 0$, opgelost worden en deze geeft: $x = 7a - a\sqrt{7}$ en $x = 7a + a\sqrt{7}$; men brenge nu deze waarden van x in de waarde van $\delta^3 y : \delta x^3$, dat is, in $x - 7a$; dan geeft de eerste substitutie, $+24\sqrt{7} : a^2$, en de tweede, $-24\sqrt{7} : a^2$. Deze waarden worden niet nul: het blijkt dan, dat de abscissen, $x = a(7 - \sqrt{7}) = 4,35425a$ en $x = (7 + \sqrt{7})a$, met welke de ordinaten, $y = a(1148 - 80\sqrt{7}) = 936,3399a$ en $y = a(1148 + 80\sqrt{7}) = 1359,6601a$ overeenstemmen, tot twee onderscheidene buigpunten der kromme lijn behooren, terwijl men, met behulp der vergelijking (D), vinden zal, dat de tangens dezer buigpunten de as van de kromme doorsnijden onder hoeken, welker tangenten respectievelijk zijn, $80 - 56\sqrt{7} = -48,162$; en $80 + 56\sqrt{7} \dots = 228,162$, behoorende tot $-88^\circ 48' 38''$ en $+89^\circ 44' 56''$.

Wanneer men eindelijk, in de vergelijking van de gegevene kromme lijn, de abscis x , aan de po-

positieve en negatieve zijde, zeer groot neemt, dan worden de termen $+ 28ax^3$, $- 252a^2x^2$ en $+ 864a^3x$, ten opzichte van x^4 , steeds kleiner, naarmate x grooter wordt; hier uit volgt dan, dat de kromme, voor de grootere waarden der abscissen, steeds naden met de kromme lijn, welke vergelijking $x^4 = - a^3y$ is en die haren oorsprong in A heeft, zal overeenkomen, en deze kromme, die zich geheel beneden A uitstrekt, en eene *parabola van de derde orde* is, wordt bij gevolg de *asymptota* der gegeven kromme lijn.

Voegt men bij dit alles de bijna regthoekige doorsnijding van de tangenten der punten A en B met de as MN, welke, aangezien zij in het punt B nog sterker dan in het punt A is, de tak BZ ook natuurlijk spoediger dan de tak AY van de as doet afwijken; derwijze, dat, met $x = 16a$ en $x = 20a$, de ordinaten $y = - 2536a$ en $y = - 19520a$, overeenstemmen, zoo zal men, dit alles met het voorgaande te zamen nemende, en in eene figuur (zie Fig. 82.)

$$\begin{aligned} AD &= 3a \dots \text{en } DE = 999a \\ AD' &= 4,3562a \dots D'E' = 936,340a \\ AF &= 6a \dots \dots \dots FG = 864a \\ AF' &= 9,6438a \dots F'G' = 1359,660a \\ AH &= 12a \dots \dots \dots HI = 1728a \\ AP &= 16a \dots \dots \dots PQ = -2536a \end{aligned}$$

makende, mits de ordinaten op eene honderdmaal kleinere schaal nemende, de kromme lijn $\dots \dots$ YUVALEE'GG'IBQZ verkrijgen, welke ordinaten honderdmaal grooter gedacht zijnde, de kromme lijn, door de gegeven vergelijking uitgedrukt, zal voorstellen, in welke DE en IH de grootste, FG de kleinste ordinaten, en E' en G' de buigpunten zullen zijn.

N^o. 93. Door

U. HUGUENIN, en Jacob de Gelder.

Volgens de opgave is (zie *Fig. 86.*) $AB = a$ en de hoek $BAG = 90^\circ$ en hoek $ABD = \alpha$; diensvolgens is $AD = a \text{ Tang. } \alpha$. Laat de kromme BM de weg zijn, welken het punt B , met eene eenparige beweging, in denzelfden tijd, dat het punt P , in de rigting van de lijn AC gelijkmatig DT is doorgelopen, heeft afgelegd; Mm de oneindig kleine aanwas der kromme lijn BM ; men late MP en mp loodregt op AG vallen; deze zijn dan de ordinaten der overeenkomstige abscissen AP en $A\rho$. Zij rm evenwijdig aan AG getrokken; daar dan, volgens het voorstel, het bewegend punt B steeds naar het bewegend punt D gerigt blijft, zal zich, in elk oogenblik des tijds, het bewegend punt D in T , dat is, in de raaklijn van het punt M der kromme BM moeten bevinden, of, met andere woorden, de lijn, MT welke, van oogenblik tot oogenblik, de bewegende punten M en T vereenigt, zal bestendig de raaklijn der kromme BM blijven, en wel van dat punt derzelve, waarin zich het bewegend punt M , van oogenblik tot oogenblik, bevindt. Deze verklaring van den aard van het vraagstuk en de verdere voorwaarden van hetzelfde zullen nu moeten dienen, om de vergelijking der kromme lijn, door het punt M beschreven, te vinden.

Men zal, op de volgende wijze, tot eene differentiaal-vergelijking tusschen de coördinaten der begeerde kromme lijn geraken. Men stelde de abscis $AP = x$, de ordinaat $PM = y$; (zijnde dus het punt A de oorsprong der coördinaten,) dan is $P\rho = rm = \delta x$ en $rM = -\delta y$; (men moet hier de differentiaal van y negatief stellen, om-

omdat uit de natuur der zaak volgt: dat, wanneer de abscis x aangroeit, de ordinaat y vermindert,) en dan is $Mm = \sqrt{(r m^2 + r M^2)} = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$

$$= \delta . BM, \text{ welke aldus } \delta BM = -\delta y \sqrt{1 + \frac{\delta x^2}{\delta y^2}}$$

kan voorgesteld worden. Uit de eerste beginselen der differentiaal-rekening weet men: dat de sub-

tangens $PT = -\frac{y\delta x}{\delta y}$ is, welke hier negatief moet

gesteld worden (*); en nu wordt $DT = AP +$

$$PT - AD = x - \frac{y\delta x}{\delta y} - a \text{ Tang. } a; \text{ en de}$$

differentiaal van DT wordt (de differentiaal van δx en δy beide als veranderlijk (†) aannemende,)

$$\delta . DT = \delta x - \frac{\delta y \delta x}{\delta y} - \frac{y \delta \delta x}{\delta y} + \frac{y \delta x \delta \delta y}{\delta y^2} =$$

$$y \times \frac{\delta x \delta \delta y - \delta y \delta \delta x}{\delta y^2}.$$

Wij kennen dus de differentiaal, zoo wel van den boog BM als van de lijn DT ; dat is van de wegen, welke beide punten M en T , in denzelfden tijd, hebben afgehoopen; daar nu beide bewegingen gelijkmatig ondersteld worden, en wel $BM : DT = m : n$; waardoor $nBM = mDT$ is, zoo is ook $n\delta . BM = m\delta . DT$; of $\delta . BM =$
 m

(*) De welbekende algemeene uitdrukking van de subtangens der kromme lijnen is genomen, in de onderstelling, dat de kromme met haren hollen kant naar de as ligt, in welk geval de subtangens, van de ordinaat PM , links af, gerekend wordt: in het tegengestelde geval, (gelijk hier,) is derhalve de subtangens natuurlijk negatief. DE GELDER.

(†) Men kan ook δx of δy als standvastig aannemen; de uitkomsten zullen dezelve zijn. DE GELDER.

$\frac{m}{n} \delta$. DT en wij verkrijgen diensvolgens de differentiaal-vergelijking:

$$\frac{my}{n} \times \frac{\delta x \delta \delta y - \delta y \delta \delta x}{\delta y^2} = -\delta y \sqrt{1 + \frac{\delta x^2}{\delta y^2}}. \quad (A)$$

welke de natuur van de kromme lijn uitdrukt, en (vermits er tweede differentiaten in voorkomen) van de tweede order is. Er blijft thans alleen over, dat wij uit deze differentiaal-vergelijking de eindige, dat is van differentiaten bevrijd zijnde vergelijking, waarvan (A) de tweede differentiaal is, ontdekken, hetgeen door twee achter een volgende integreringen moet volbragt worden.

Men stelde, om uit (A) de differentiaal van de eerste orde te vinden, $\delta x : -\delta y$ gelijk aan

de veranderlijke functie p ; dan is $\delta p = -\delta \cdot \frac{\delta x}{\delta y}$

$$= \frac{\delta x \delta \delta y - \delta y \delta \delta x}{\delta y^2}; \quad (\text{nemende namelijk } \delta x \text{ en}$$

δy , ten einde in de boven aangenomene onderstelling te blijven, beide veranderlijk,) brengt men nu deze waarde van δp en p in vergelijking (A) over, dan wordt zij:

$$-\delta y \sqrt{1 + p^2} = \frac{my \delta p}{n}$$

in welke de veranderlijke grootheden y en p , zonder behulp van eenige kunstgreep, terstond afscheidbaar zijn, en, na afscheiding, de vergelijking:

$$\frac{\delta p}{\sqrt{1 + p^2}} = -\frac{n}{m} \times \frac{\delta y}{y}$$

in staat van integreerbaarheid stellen; waarvan de integraal, gelijk bekend is, wordt:

$$\text{Log.}[p + \sqrt{1 + p^2}] = -\frac{n}{m} \text{Log.} y + \text{Log.} C. \quad (B)$$

zijnde in dezelve $\text{Log.} C$ de onbepaalde standvastig-

eige grootheid, naar welgevallen aangenomen, om de integraal op de algemeenste wijze voorstelt, en welke straks nader zal bepaald worden. (*)

Uit deze vergelijking moet p weggemaakt worden. Men stelle, om te bekotten, $n : m = r$; dan wordt de vergelijking (B) $\text{Log} \cdot [p + \sqrt{(1+p^2)}]$

$= -r \text{Log} \cdot y + \text{Log} \cdot C = \text{Log} \cdot Cy^{-r}$ en, van de logarithmen tot de getallen, waarvan zij logarithmen zijn, overgaande, $p + \sqrt{(1+p^2)} =$

Cy^{-r} ; waaruit, na, op de gewone wijze, de wortel-uitdrukking weggemaakt te hebben, volgt:

$p = \sqrt[2]{Cy^{-r} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} C^{-\frac{1}{2}r} y^{-\frac{1}{2}r}$ in deze stelle men nu voor p hare waarde $\frac{\partial x}{\partial y}$; dan verkrijgt men, na alles met ∂y vermenigvuldigd te hebben, voor de differentiaal-vergelijking van de eerste orde:

$$\partial x = \frac{y \partial y}{2C} - \frac{C \partial y}{2y}$$

waarvan de integraal is

$$x = \frac{y^{1+r}}{2(1+r)C} - \frac{C y^{1-r}}{2(1-r)} + C' \dots (D)$$

zijnde in deze C' wederom eene nieuwe onbepaalde standvastige grootheid, welke, te gelijk met C , zoo dadelijk zal bepaald worden.

De

(*) Aan zulk eene onbepaalde standvastige grootheid, bij eene integraal te voegen, kan men, daar zij, in het afgetrokkene en op zich zelve genomen, onbepaald is, zulk eene gedaante geven, welke het best met den aard der zake overeenstemt; men heeft dan, daar elke grootheid de logarithmus van eene andere zijn kan, voor de standvastige grootheid $\text{Log} \cdot E$ genomen. DE GELDER.

Deze vergelijking (D) is nu de vergelijking der begeerde kromme lijn, in welke de standvastige grootheden, overeenkomstig den aard van het werkstuk, aldus bepaald worden.

Wanneer de ordinaat $PM = y$ gelijk aan AB of a wordt, als dan verandert de hoek PMT in

$ABD = \alpha$; diensvolgens wordt $\rho = -\frac{\delta r}{\delta y} =$

$Tang. PMT = Tang. \alpha$. Stelt men dan deze waarde in de verg. (B), zoo verkrijgt men:

$Tang. \alpha + \sqrt{1 + Tang^2 \alpha} = Ca^r$; derhal-

ve zal $C = a^r [Tang. \alpha + Sec. \alpha] = a^r \times [Cot. (90^\circ - \alpha) + Cos. (90^\circ - \alpha)] =$ (zie

DE GELDER, *Beg. der Meetk.* §. 559) $a^r Tang. (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha)$ zijn.

Voor $AP = x = 0$, wordt $P = y = a$; de vergelijking (D) verandert hier door in de volgende:

$$0 = \frac{a^{1+r}}{2(1+r)C} - \frac{Ca^{1-r}}{2(1-r)} + C'$$

en hieruit volgt dan eindelijk:

$$C' = -\frac{a^{1+r}}{2(1+r)C} + \frac{Ca^{1-r}}{2(1-r)}$$

stelt men nu deze waarden der standvastige grootheden C en C' in de vergelijking (D); dan verkrijgt men voor de vergelijking der kromme lijn, door het punt B beschreven,

$$x = \frac{Cot. (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha)}{2(1+r)a^r} \times [y^{1+r} - a^{1+r}] \dots$$

$$- \frac{a^r Tang. (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha)}{2(1-r)} \times [y^{1-r} - a^{1-r}] \quad (I)$$

en uit deze de ordinaat y afgezonderd hebbende,

y

$$y^{1+r} - \frac{1+r}{1-r} \cdot a^{2r} \text{Tang}^2 \cdot (45^\circ + \frac{1}{2}a) \times y^{1-r} = \dots$$

$$\dots a^{1+r} \times \left[1 - \frac{1+r}{1-r} \text{Tang}^2 \cdot (45^\circ + \frac{1}{2}a) \right] \dots$$

$\dots + (1+r) \times a \times \text{Tang} \cdot (45^\circ + \frac{1}{2}a) \times x \dots (2)$
 strekkende de eerste dezer twee vergelijkingen, om x , voor elke gegebene waarde van y , en de tweede, om y , voor elke gegebene waarde van x , te berekenen. (*)

AANMERKINGEN. De vergelijkingen (1) en (2) der kromme lijn, door het punt B beschreven, geven aanleiding tot zeer vele gewigtige aanmerkingen en leerzame onderzoekingen, waarvan wij, wegens de bekrompenheid van plaats, slechts eenige der voornaamste kunnen opgeven. (†)

1°. Ziet men, dat de graad der vergelijking, de natuur der kromme lijn uitdrukkende, ofschoon zij altijd, (hoewel zij slechts in één geval (zie N°. 2. hier onder) transcendentaal wordt,) *algebraisch* is, alle mogelijke variatiën van r hebben kan, en dus, om zoo te spreken, begrepen kan worden, tot de geheele oneindigheid der moge-

(*) De Heer DUBOIS-AYMÉ, Oud-eleve van de polytechnische school, heeft onlangs, in de *Correspondance sur l'école militaire polytechnique*, Tom. II. pag. 275, zonder oplossing, eene vergelijking voor onze kromme lijn medegedeeld, welke veel naar de onze lijkt, doch, in de teekens en de standvastige coëfficiënten, van dezelve onderscheiden is; maar hij moet zich bedrogen hebben, omdat zijne vergelijking tot de onze niet kan gebragt worden: althans is het bezijden de waarheid, dat, zoo als hij zegt, de kromte-stralen evenredig aan de abscissen zouden zijn. DE GELDER.

(†) Deze aanmerkingen zijn van de Heeren HUGUENIN en DE GELDER, wordende, door de Letters H en G, aangewezen van wien dezelve zijn.

gelijke orden van kromme lijnen te behooften; want, naar mate de betrekking van de snelheden der bewegende punten M en T verandert, verandert ook $n : m = r$. De vergelijking verkrijgt de eenvoudigste vormen indien x een geheel getal is; is r een gebroken, dan is y met gebrokene exponenten aangedaan; en wanneer de betrekking van n tot m onmeetbaar is, gaat de kromme lijn over in die soort van krommen, waaraan de beroemde LEIBNITZ den naam van *intersecedentale lijnen* gegeven heeft. Alle deze hebben, op de exponenten van y na, denzelfden vorm, en worden, door r als veranderlijk te beschouwen, en door alle mogelijke waarden te doen variëren, met elkander in vergelijking gebragt. [G en H.]

2°. Wanneer $r = 0$, dat is, indien $\frac{n}{m} = 0$ of $n = 0$ is, het geen plaats heeft, wanneer het punt T in rust is, dan verandert de vergelijking (1) in deze meer eenvoudige:

$x = \frac{1}{2} [\text{Cot.} (45^\circ + \frac{1}{2}a) - \text{Tang.} (45^\circ + \frac{1}{2}a)] \times (y - a)$
 maar nu is (zie Beg. Aank. §. 350 en §. 560.)
 $\frac{1}{2} \text{Cot.} (45^\circ + \frac{1}{2}a) - \frac{1}{2} \text{Tang.} (45^\circ + \frac{1}{2}a) =$
 $\frac{1}{2} \text{Tang.} (45^\circ - \frac{1}{2}a) - \frac{1}{2} \text{Cot.} (45^\circ - \frac{1}{2}a) =$
 $= \text{Cot.} (90^\circ - a) = - \text{Tang.} a$; de vergelijking wordt derhalve, bij nadere herleiding,

$$x + y \times \text{Tang.} a = a \times \text{Tang.} a$$

zijnde dus eene vergelijking tot de rechte lijn en wel tot de lijn BD van Fig. 86; want, stelt men in dezelve $x = 0$; dan wordt $y = a = AB$; en stelt men $y = 0$; dan wordt $x = a \text{ Tang.} a = AD$; en zulk's verstrekt tevens tot eene proef van de waarheid onzer uitgebragte vergelijking (1); daar de vergelijking, door den Heer DUBOIS-ARMÉ (zie noot Bladz. 253.) uitgebragt, wel eene rechte lijn; maar niet de lijn AD geeft. Dat intusschen, wanneer het punt T rust, de weg, welken het punt B aflegt, de rechte lijn AD zijn moet, behoeft wel niet betoogd te worden voor die

die genen, welke in staat zijn, om de oplossing van ons werkstuk te volgen. [G].

3°. Bij aldien wij $r = 1$ onderstellen, dat is $m = n$ nemen, en bij gevolg de snelheden der beide lichamen gelijk stellen, heeft er in de vergelijking (1) een zonderling verschijnsel plaats; te weten, de tweede term van het voorste lid, zijnde

$$\frac{a \text{ Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}a)}{2(1-r)} \times \left[\frac{y^{1-r} - a^{1-r}}{1-r} \right]$$

wordt, omdat $1 - r = 0$, en $y^0 - a^0 =$

$1 - 1 = 0$ is, gelijk aan $\frac{a \text{ Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}a)}{2}$

$\times \frac{0}{0}$ en verandert dus in eene uitdrukking, welke in den staat, waarin zich onze vergelijking opdoet, onbepaald schijnt te zijn; doch op deze wijze bepaald kan worden.

Men stelle $y = a - z$ en ontwikkelte, volgens de bekende formule van NEWTON, de

breuk $\frac{y}{1-r} = \frac{a-z}{1-r}$, welker teller en noemer,

na de ontwikkeling, door $1 - r$ deelbaar wordt.

Na deze deeling volbragt te hebben, stelle men

$r = 1$ en wederom $a - z = y$; dan vindt

men, voor de vergelijking van de kromme lijn,

in dit geval, $x = \dots (\mu)$

$\frac{\text{Cot.}(45^\circ + \frac{1}{2}a)}{4a} (y^2 - a^2) = \frac{1}{2}a \text{ Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}a) \text{ Log.} \frac{y}{a}$

welke men ook vinden zal, indien men, in de

vergelijking $\delta x = \frac{y \delta y}{2C} - \frac{Cy \delta y}{2}$, $r = 1$ stelt

en dezelve in die onderstelling integreert, hetgeen

eigenlijk wel de kortste weg is. [G.]

4°. Maakt men, in de laatst verkregene verge-

lij-

R.

lijking (μ) , $Cot.(45^\circ + \frac{1}{2}a) : 4a = A$, en $\frac{1}{2}a \times Tang.(45^\circ + \frac{1}{2}a) = B$, en verder:

$$u = A(y^2 - a^2)$$

$$t = B \text{ Log.}(y : a)$$

dan is $x = u - t$. De eerste dezer vergelijking is eene vergelijking tot de gewone parabola en de tweede eene transcendentale lijn, welke, met behulp der bekende *Logarithmica* gemakkelijk wordt geconstrueerd: deze twee kromme lijnen dan geconstrueerd hebbende, zal men, met behulp van dezelve en de vergelijking $x = u - t$, voor elke waarde van y , de abscis vinden en aldus de kromme lijn door punten construeren. Naauwkeuriger zal het nogtans zijn, wanneer men, voor eene aanmerkelijke reeks van waarden van y , de overeenkomstige waarden van x berekent. Zoo gemakkelijk zal het nogtans niet flagen om, voor elke waarde van x , de overeenkomstige waarde van y te vinden. [G].

5°. Stelt men in de vergelijking (μ) de ordinaat $y = 0$; dan is, omdat $\text{Log. } 0 = -\infty$ is, $x = \frac{1}{2}a \text{ Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}a) \times 0 - \frac{1}{4}a \text{ Cot.}(45^\circ + \frac{1}{2}a) = 0$ de kromme lijn zal dus den as der abscissen niet eer doorsnijden, dan, naar den positieven kant van de as der abscissen, en op eenen oneindig verren afstand van den oorsprong der coördinaten; de as AK is diensvolgens de *asymptota* der kromme lijn. [G]

6°. Om, in de algemeene vergelijking (1) het punt G te bepalen, alwaar zich de beide punten in de lijn AC vereenigen, stelle men in dezelve $y = 0$, dan verandert x in AG en wij hebben dus:

$$AG = x \left[\frac{Tang.(45^\circ + \frac{1}{2}a)}{2(1 - r)} - \frac{Cot.(45^\circ + \frac{1}{2}a)}{2(1 + r)} \right]$$

welke, met behulp van de bekende goniometrische formules, deze meer eenvoudige gedaante verkrijgt:

AG

stelt, door $BM = \dots\dots\dots$

$$C.(a^{1-r} - ry^{1-r}) - D.(ry^{1-r} + a^{1-r}) - \frac{a}{r} \text{Tang. } a$$

wordt voorgesteld, welke, door nu dezelve $y = 0$ te stellen, in de vergelijking (ω) verandert. (H)

10°. Het blijkt, uit de hoofdvergelijkingen (1) en (2), dat, voor elke waarde van y , gemakkelijk x gevonden wordt; maar dat men, ten einde y voor eene gegeeene waarde van x te vinden, eene vergelijking van den graad $\frac{m+n}{m}$ zal moeten oplossen, of liever, men zal

$y = z^{\frac{m}{m+n}}$, en korthedshalve,

$$\frac{m+n}{m-n} \times a^{\frac{2n}{m}} \text{Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}a) = K$$

$$a^{\frac{m+p}{m}} \times \left[1 - \frac{m+n}{m-n} \times \text{Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}a) \right] = L$$

$$\text{en } \frac{2(m+n)}{m} \times a^{\frac{n}{m}} \text{Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}a) = M$$

stellende, de vergelijking:

$$z^{\frac{m+n}{m}} - K z^{\frac{m-n}{m}} = L + M z$$

en dus een $(m+n)$ graads vergelijking moeten oplossen, om z en voorts $y = z^{\frac{m}{m+n}}$ te verkrijgen. Bijaldien nu m en n beide onevene getallen zijn, worden de exponenten $\frac{m+n}{m}$ en $\frac{m-n}{m}$ even, en de vergelijking zal, in dit geval, ten minste twee mogelijke wortels hebben. Van de evene waarden van m en n geldt hetzelfde. Zijn de getallen m en n het eene even en het ander oneven, dan zijn $\frac{m+n}{m}$ en $\frac{m-n}{m}$ beide onevene getallen en de vergelijking is eene onevene magtsvergelijking, welke één, drie, vijf, enz.

WOR-

wortels hebben kan, in welk geval, de kromme lijn ook even zoo vele takken hebben kan; er bestaan dan twee zeer onderscheidene hoofdgevallen, naar dat $m + n$ en $m - n$ even of oneven zijn; zijnde, in het eerste, het aantal der mogelijke takken even en in het tweede oneven; doch de wezenlijke bestaanbaarheid dezer takken zou, in elk bijzonder geval, een nader onderzoek vereischen. (H en G.)

11°. Wanneer de twee bewegende punten, na elkander in G achterhaald te hebben, volgens dezelfde wet blijven voortgaan; te weten het punt T in de lijn AD en het punt M zoodanig in het vervolg der kromme, dat, van oogenblik tot oogenblik, het verlangde van de rigting van deszelfs beweging bestendig naar het punt T gerigt blijve; dan is het zichtbaar, dat beide punten onophoudelijk verder van elkander afnemen; de negatieve ordinaten worden als dan steeds grooter; maar het verdient een nader onderzoek, of de abscissen x , in het positieve van de as, onophoudelijk grooten worden?

Men differentiere, om dit nategaan, de vergelijking (1) der kromme lijn; dan verkrijgen wij,

na kortheidshalve $a \times \text{Tang} . (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha) = c$ gesteld te hebben, voor de vergelijking (1):

$$x = \frac{1}{2(1+r)c} [x^{1+r} - a^{1+r}] - \frac{c}{2(1-r)} [y^{1-r} - a^{1-r}]$$

en houden wij nu onder het oog, dat, in het geval,

dat wij beschouwen, $r = \frac{n}{m} < 1$ is, dan

zijn de eerste en tweede differentialen dezer vergelijking:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{2c} \times y^r - \frac{1}{2} c \times \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = + \frac{r}{2c} \times \frac{1}{1-r} + \frac{1}{2} r c \times \frac{1}{y^{1+r}}$$

R 3

Om

Om nu te onderzoeken, of x een maximum of minimum kan worden, moet men $\delta x : \delta y = 0$

stellen; dit doende, vinden wij : $y^r = \pm c$ of $y^{\frac{n}{m}} = \pm c$

wel, voor r hare waarde $n:m$ stellende, $y^{\frac{n}{m}} = \pm c$.

Hier zijn nu twee hoofd-gevallen te overwegen:
1^o. Zijn m en n beide onevene getallen, dan

is $y^{\frac{n}{m}} = \pm c$ en dan wordt $y = \pm c^{\frac{m}{n}} = \pm i$. Men stelle elke dezer twee waarden in $\delta\delta x : \delta y^2$; daar dan m en n beide onevene getallen zijn, zijn $m - n$ en $m + n$ evene en m is een oneven getal; het zij men dan de positieve of de negatieve waarde van y in $\delta\delta x : \delta y^2$ overbrengt; de mag-

ten van $y^{\frac{1-r}{1+r}}$ en $y^{\frac{1-r}{1+r}}$ worden in beide gevallen positief en $\delta\delta x : \delta x^2$ kan niet anders dan positief worden. 2^o. Is n een even en m een oneven getal, of omgekeerd n een oneven en m een even getal, zal men, naar de theorie van de teekens,

uit $y = \pm i$ niets anders dan $y = + \sqrt[n]{i}$ vinden en $\delta\delta y : \delta x^2$ zal in beide deze gevallen nog positief blijven. In het eerste geval, schijnen $+ i$ en $- i$ beide een *minimum* en, in het tweede, insgelijks een *minimum* te geven; wanneer men intusschen de figuur met oplettendheid beschouwt, bestaat er buiten allen twijfel een *maximum* en *minimum*. De volkomen verklaring van dit, in den eersten opslag, vreemde verschijnsel zou ons hier te ver afleiden: het is in de veranderlijkheid van den exponent r gelegen, welke, door slechts eene oneindig kleine verandering in dezelve te onderstellen, de exponent r onmeetbaar maakt, en strikt genomen, buiten het gebied der teekens brengt. Dit dan aannemende wordt:

$$y = -a \text{ Tang} \cdot (45^\circ + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{r}} \dots \text{voor het max.}$$

$$y = + a \operatorname{Tang} . (45^{\circ} + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{r}} \dots \text{voor het } \textit{min}.$$

Stelt men nu deze waarden, in de verg. (1); dan wordt, voor het maximum:

$$x = \frac{ar \operatorname{Tang} . (45^{\circ} + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{r}}}{1 - r^2} + AG$$

en, voor het minimum:

$$x = AG - \frac{ar \operatorname{Tang} . (45^{\circ} + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{r}}}{1 - r^2}$$

Neemt men nu in de figuur $AK = x$, en, op de overeenkomstige negatieve ordinaat, KI gelijk aan de waarde van y , voor het maximum gevonden, dan zal I het punt zijn, in hetwelk de kromme omwendt en naar de as y terug keert; de ordinaat KI wordt, in dit geval, eene raaklijn en ten bewijze daarvan zal strekken, dat de subtangens voor dit punt, gelijk uit de berekening blijken zal, nul wordt. Eindelijk bestaat er een minimum van x , welke de kromme lijn, boven die as, eenen loop geeft, met den loop, beneden dezelve, veel overeenkomst hebbende. (*H* en *G*.)

Substitueert men in de vergelijking (2) de waarde van AG uit verg. (4); dan vindt men:

$$y^{\frac{1+r}{r}} - \frac{1+r}{1-r} a^{2r} \operatorname{Tang}^2 . (45^{\circ} + \frac{1}{2} a) y^{\frac{1-r}{r}} = 0$$

waaruit volgt voor eerst, zoo als het behoort, $y = 0$; en ten anderen:

$$y = \pm a \operatorname{Tang} . (45^{\circ} + \frac{1}{2} a)^{\frac{1}{r}} \times \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$$

omdat nu r eene eigenlijke breuk is, is de grootheid onder het wortelteeken > 1 : neemt men derhalve de negatieve waarde $= GN$, ziet men

duidelijk dat zich de kromme lijn steeds verder van de as van x verwijderen zal; hetwelk derhalve tot eene bevestiging van het reeds boven aangemerkte verstoren moet. Wij laten de verdere onderzoekingen over den aard dezer kromme lijn, welke nog zeer vele bijzonderheden oplevert, aan den jongen beoefenaar over (H).

Nº. 94. Door

J. R. S C H M I D T.

Laten de algemeene termen der gevraagde arithmetische progressien zijn: $a + bx$, $a' + b'x$ en $a'' + b''x$; dan wordt hun product $(a + bx)(a' + b'x)(a'' + b''x)$ de algemeene term der reeks, welke uit de producten van de overeenkomstige termen dezer arithmetische reeksen ontstaat. De algemeene term dezer reeks zal klaarblijkelijk tot de derde magt van x opklimmen; bijaldien wij dan dien algemeenen term $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ stellen, zullen wij, op eene zeer gemakkelijke wijze, de coëfficiënten A , B , C en D kunnen bepalen, waardoor de factoren van $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ en bijgevolg de algemeene termen der gevraagde arithmetische progressien, benevens deze progressien selve, bekend zullen worden.

Het blijkt uit de voorwaarden van het voorstel, dat de sommen van de x en $(x + 2)$, min de $(x + 1)$ term der reeks, waarvan $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ de algemeene term is, zullen zijn:

30, 71, 150, 279, 470, enz.
waarin men, voor de eerste en volgende verschillen, vindt:

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 263

41, 79, 129, 191, enz. . . . 1^e verschillen
 38, 50, 62, enz. . . . 2^e verschillen
 12, 12, enz. . . . 3^e verschillen
 daar dan de derde verschillen standvastig of ge-
 den

lijk zijn, hebben wij, om den x of algemeenen
 term dezer reeks nittedrukken, door de bekende
 formule, (zie DE GELDER, II *Cursf. Bladz.* 432.)

$$30 + 41(x-1) + \frac{38(x-1)(x-2)}{2} + \frac{12(x-1)(x-2)(x-3)}{2 \cdot 3}$$

of, na verdere herleiding,

$$15 + 6x + 7x^2 + 2x^3$$

Deze uitdrukking moet nu, gelijk gezegd is,
 gelijk zijn aan de som van de x^m en $(x+2)^m$
 min de $(x+1)^m$ term der reeks, welker alge-
 meene term is $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$; en wij
 hebben dus de vergelijking:

$$[A + Bx + Cx^2 + Dx^3] + [A + B(x+2) + C(x+2)^2 + D(x+2)^3] - [A + B(x+1) + C(x+1)^2 + D(x+1)^3] \\ \dots = 15 + 6x + 7x^2 + 2x^3$$

of wel, na ontwikkeling,

$$[A + B + 3C + 7D] + [B + 2C + 9D]x + [C + 9D]x^2 + \\ \dots + Dx^3 = 15 + 6x + 7x^2 + 2x^3$$

Weshalve $D = 2$; $C = 7 - 3D = 1$, $B = 6 - 2C - 9D = -14$ en $A = 15 - B - 3C - 7D = 12$. De algemeene term
 van de reeks, ontstaande uit de volgreks van de
 producten der drie arithmetische reeksen, is der-
 halve $2x^3 + x^2 - 14x + 12$. Zoekt men nu
 de factoren dezer formules; dan vinden wij:

$$2x^3 + x^2 - 14x + 12 = [2x - 3][x + 1 - \sqrt{5}][x + 1 + \sqrt{5}]$$

De algemeene termen der gevraagde progressien
 zijn derhalve: $2x - 3$, $x + 1 - \sqrt{5}$ en
 $x + 1 + \sqrt{5}$, en de progressien zelve:

— 1, + 1, + 3, + 5 tot $2x - 3$
 $2 - \sqrt{5}$, $3 - \sqrt{5}$, $4 - \sqrt{5}$, $5 - \sqrt{5}$ tot $x + 1 - \sqrt{5}$
 $2 + \sqrt{5}$, $3 + \sqrt{5}$, $4 + \sqrt{5}$, $5 + \sqrt{5}$ tot $x + 1 + \sqrt{5}$
 want, vermenigvuldigt men derzelver overeen-

komstige termen met elkander, dan verkrijgt men de reeks:

1, 4, 33, 100....., $2x^3 + x^2 - 14x + 12$ welke behandeld zijnde, zoo als het voorstel voorschrijft, geven zal: 30, 71, 150, 279, 470, enz., en algemeen, $15 + 6x + 7x^2 + 2x^3$.

Nº. 95. Door

J. R. S C H M I D T.

De gegevene sommen bestaan uit de reeks van de volgende getallen:

50, 98, 179, 311, 512, enz. . . reeks

48, 81, 132, 201, enz. . . 1^e versch.

33, 51, 69, enz. . . 2^e versch.

18, 18, enz. . . 3^e versch.

welker derde verschillen gelijk zijn: wij vinden

dus voor den algemeenen of x^{en} term, (zie DE GELDER, II *Cursf. Bladz.* 437) de uitdrukking

$$50 + 48(x - 1) + 33 \times \frac{(x - 1)(x - 2)}{1, 2}$$

$$+ 18 \times \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{1, 2, 3} \text{ of wel,}$$

(deze ontwikkeld en naar de magten van x geordend hebbende,)

$$\frac{1}{2}(6x^3 - 3x^2 + 63x + 34)$$

Nu is het, uit de voorwaarden van het vraagstuk, duidelijk te zien, dat de hier gevondene

x^{de} term gelijk moet zijn aan de som van den

x^{en} , den $(x + 2)^{en}$ en den $(x + 4)^{en}$ term der gezochte reeks: men stelde dan den algemeenen

of x^{en} term der gezochte reeks $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$; dan verkrijgen wij de vergelijking:

[A

$[A + Bx + Cx^2 + Dx^3] + [A + B(x+2) + C(x+2)^2 + D(x+2)^3] + [A + B(x+4) + C(x+4)^2 + D(x+4)^3]$
 $\dots = \frac{1}{2}[6x^3 - 3x^2 + 63x + 34]$
 of, alles naar de afmetingen van x schikkende,
 $[3A + 6B + 20C + 72D] + [3B + 12C + 60D]x + ..$
 $[3C + 18D]x^2 + 3Dx^3 = 17 + 31\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}x^2 + 3x^3$
 waaruit men, door term voor term aan elkander
 gelijk te stellen, vinden zal: $D = 1$, $C = -6\frac{1}{2}$,
 $B = 16\frac{1}{2}$ en $A = -8$; zoodat de begeerde al-
 gemeene term wordt $\frac{1}{2}(2x^3 - 13x^2 + 33x - 16)$
 en de gezochte reeks zelve: 3, 7, 10, 18, 37,
 73, enz.

AANMERKING. De grootheden A , B , C
 en D , kunnen nog op eene andere wijze gevon-
 den worden. Men geve namelijk in den algemee-
 nen term $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, aan de groot-
 heid x bij opvolging de waarden 1, 2, 3 enz.;
 dan hebben wij, voor de acht eerste termen:

$$1^{\circ} \dots A + B + C + D \quad 5^{\circ} \dots A + 5B + 25C + 125D$$

$$2^{\circ} \dots A + 2B + 4C + 8D \quad 6^{\circ} \dots A + 6B + 36C + 216D$$

$$3^{\circ} \dots A + 3B + 9C + 27D \quad 7^{\circ} \dots A + 7B + 49C + 343D$$

$$4^{\circ} \dots A + 4B + 16C + 64D \quad 8^{\circ} \dots A + 8B + 64C + 512D$$

en hier uit voor de sommen der,

$$1^{\circ}, 3^{\circ} \text{ en } 5^{\circ} \text{ term} \dots 3A + 9B + 35C + 153D = 50$$

$$2^{\circ}, 4^{\circ} \text{ en } 6^{\circ} \text{ term} \dots 3A + 12B + 56C + 288D = 98$$

$$3^{\circ}, 5^{\circ} \text{ en } 7^{\circ} \text{ term} \dots 3A + 15B + 83C + 495D = 179$$

$$4^{\circ}, 6^{\circ} \text{ en } 8^{\circ} \text{ term} \dots 3A + 18B + 116C + 729D = 311$$

De eerste verschillen dezer sommen zijn:

$$3B + 21C + 135D = 48$$

$$3B + 27C + 207D = 81$$

$$3B + 33C + 297D = 132$$

de tweede verschillen worden:

$$6C + 72D = 33$$

$$6C + 90D = 51$$

en de derde verschillen, die standvastig zijn,
 $18D = 18$. Hier uit vindt men dan; $D = 1$,
 $C = -6\frac{1}{2}$; $B = 16\frac{1}{2}$ en $A = -8$, het geen
 met

met de bovenstaande oplossing overeenkomt. Men kan ook het voorgaande voorstel langs dien weg oplossen.

N^o. 96. Doer

JACOB DE GELDER, U. Huguenin, waas mede P. van Eeghen gedeeltelijk overeenkomt.

Men stelle, zegt de Heer HUGUENIN, Fig. 87. hoek $ACB = \phi$ en hoek $ABC = 2\phi$, dan is $BAC = 180^\circ - 3\phi$; voorts trekke men de stralen AP en BP, welke $= \frac{1}{2}a$ gegeven zijn; dan is $APB = 2ACB = 2\phi$; en, wanneer men nu DP loodrecht op AB getrokken heeft, is $AD = BD = \frac{1}{2}a \cos.(90^\circ - \phi) = \frac{1}{2}a \sin.\phi$. Nu is $\sin.BCA : \sin.BAC = AB : BC$; of $\sin.\phi : \sin.3\phi = a \sin.\phi : BC$; derhalve is $BC = a \sin.3\phi$; en de inhoud des driehoeks ABC wordt nu $= \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin.ABC = \frac{1}{2}a^2 \sin.\phi \times \sin.2\phi \times \sin.3\phi$, zijnde in dezen ϕ de kleinste van de twee hoeken des driehoeks, welke zich tot elkander als *een tot twee* verhouden.

DE GELDER redeneert, om de uitdrukking voor den inhoud te vinden (en hier mede komt VAN EEGHEN het naast overeen,) aldus. Zij Fig. 88, (welke figuur wij in het vervolg dezer oplossing blijven gebruiken,) ABC de gevraagde driehoek, wiens hoek A gelijk is aan het dubbel van den hoek B: laat de middellijn CD benevens de koorden AD en BD getrokken worden. Stel $CD = a$, de hoek $B = D = \phi$; dan is $A = CDB = 2\phi$ en $C = 180^\circ - 3\phi$. Men heeft dan, in de rechthoekige driehoeken DAC en BDC,

$AC = a \sin.\phi$; en $BC = a \sin.2\phi$
en de inhoud van den driehoek ABC wordt dan
(zie *Beg. der Meetk.* IX Spel. IX B.) $= \frac{1}{2}AB \times BC$

$BC \times \sin : C$; dat is, dien inhoud $\equiv y$ stellende, omdat $\sin.(180^\circ - 3\phi) \equiv \sin.3\phi$ is:

$$y \equiv \frac{1}{2} a^2 \sin.\phi \times \sin.2\phi \times \sin.3\phi \dots (1)$$

Om nu de maxima of minima dezer functie te onderzoeken, kan men onderscheidene wegen inslaan.

1°. Volgens de *Meeth. Analyse*, Bladz. 191, is $\sin.2\phi \equiv 2\cos.\phi \times \sin.\phi$ en $\sin.3\phi \equiv (4\cos^2.\phi - 1) \times \sin.\phi$. Stelt men dan deze waarden in de vergelijking (1); dan wordt dezelve:

$y \equiv a^2 \times [4\cos^3.\phi \sin^2.\phi - \cos.\phi \sin^3.\phi]$
en hare eerste en tweede differentiaal worden, de bekende regels in acht nemende:

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} \equiv -a^2 \times [24\cos^6.\phi - 40\cos^4.\phi + 17\cos^2.\phi - 1] \equiv$$

$$-a^2 \times [24\cos^4.\phi - 16\cos^2.\phi + 1] \times [\cos^3.\phi - 1]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} \equiv +a^2 [144\cos^6.\phi \sin.\phi - 160\cos^4.\phi \sin.\phi \dots$$

$$\dots + 34] \cos.\phi \times \sin.\phi \equiv \dots$$

$$+ a^2 \times [144\cos^4.\phi - 160\cos^2.\phi + 34] \sin.\phi \times \cos.\phi$$

Stellende nu, volgens de theorie der maxima en minima, $\partial y : \partial \phi \equiv 0$; dan heeft men:

$$1^\circ. \cos^2.\phi - 1 \equiv 0$$

$$2^\circ. 24\cos^4.\phi - 16\cos^2.\phi + 1 \equiv 0$$

De eerste dezer vergelijkingen geeft twee waarden te weten:

$$\cos.\phi \equiv +1 \text{ en } \cos.\phi \equiv -1$$

de tweede, zijnde eene vierde magts-vergelijking van den tweede magts-vorm, geeft vier waarden, begrepen in de uitdrukking:

$$\cos.\phi \equiv \pm \sqrt{+\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}} \equiv \pm \frac{1}{2}\sqrt{[12 \pm 3\sqrt{10}]}$$

of wel men heeft voor $\cos.\phi$ en $\sin.\phi$ de vier volgende waarden:

$$\begin{array}{l|l} 1^\circ \cos.\phi \equiv +\frac{1}{2}\sqrt{(12+3\sqrt{10})} & \sin.\phi \equiv \pm\sqrt{(24-3\sqrt{10})} \\ 2^\circ \cos.\phi \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{(12+3\sqrt{10})} & \sin.\phi \equiv \pm\sqrt{(24-3\sqrt{10})} \\ 3^\circ \cos.\phi \equiv +\frac{1}{2}\sqrt{(12-3\sqrt{10})} & \sin.\phi \equiv \pm\sqrt{(24+3\sqrt{10})} \\ 4^\circ \cos.\phi \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{(12-3\sqrt{10})} & \sin.\phi \equiv \pm\sqrt{(24+3\sqrt{10})} \end{array}$$

De-

Deze waarden van $\text{Cos. } \phi$ en $\text{Sin. } \phi$ moeten nu in de verkennings-vergelijking, dat is, in de functie $\frac{\partial \partial x}{\partial \phi^2}$ overgebracht worden; en om zulks met meer gemak te volbrengen, merken wij op: dat, voor de vier waarden van $\text{Cos. } \phi$, de overeenstemmende waarden van den factor $\text{Sin. } \phi \times \text{Cos. } \phi$ worden:

$$1^{\circ} \text{ Sin. } \phi \times \text{Cos. } \phi = \pm \frac{1}{12} \sqrt{(22 + 4\sqrt{10})}$$

$$2^{\circ} \text{ Sin. } \phi \times \text{Cos. } \phi = \mp \frac{1}{12} \sqrt{(22 + 4\sqrt{10})}$$

$$3^{\circ} \text{ Sin. } \phi \times \text{Cos. } \phi = \pm \frac{1}{12} \sqrt{(22 - 4\sqrt{10})}$$

$$4^{\circ} \text{ Sin. } \phi \times \text{Cos. } \phi = \mp \frac{1}{12} \sqrt{(22 - 4\sqrt{10})}$$

dat al verder, voor de twee eerste waarden van $\text{Cos. } \phi$, gevonden wordt:

$$\text{Cos}^4 \phi = \frac{1}{144} (26 + 8\sqrt{10}), \text{ en } \text{Cos}^2 \phi = \frac{1}{12} (4 + \sqrt{10})$$

en voor de twee laatste waarden van dien zelfden hoek:

$$\text{Cos}^4 \phi = \frac{1}{144} (26 - 8\sqrt{10}), \text{ en } \text{Cos}^2 \phi = \frac{1}{12} (4 - \sqrt{10})$$

waardoor de factor van de verkennings-vergelijking, $\frac{\partial \partial y}{\partial \phi^2}$, namelijk de functie, $144 \text{Cos}^4 \phi - 160 \text{Cos}^2 \phi + 34$, voor de twee eerste waarden van $\text{Cos. } \phi$, wordt:

$$+ 6\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3} \sqrt{10} \dots \dots \dots \text{negatief}$$

en, voor de twee laatste waarden van $\text{Cos. } \phi$,

$$+ 6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} \sqrt{10} \dots \dots \dots \text{positief.}$$

Onderzoeken wij nu elke waarde van $\text{Cos. } \phi$. De eerste waarde positief zijnde, geeft ook een positieve sinus; het product $\text{Sin. } \phi \times \text{Cos. } \phi$ is derhalve positief en,

$$\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = [6\frac{2}{3} - 5\frac{1}{3} \sqrt{10}] \times + \frac{1}{12} [22 + 4\sqrt{10}], \text{negatief}$$

bijgevolg maakt $\text{Cos. } \phi = \frac{1}{2} \sqrt{(12 + 3\sqrt{10})}$ de waarde van y , in de vergelijking (1), tot een *maximum*: maar de eerste waarde van $\text{Cos. } \phi$ kan ook tot den boog $360^{\circ} - \phi$ behooren; (want $\text{Cos. } \phi = \text{Cos. } [360^{\circ} - \phi]$) maar dan wordt $\text{Sin. } (360^{\circ} - \phi)$ negatief en $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}$ wordt bijgevolg *min* vermenigv. met *min*; dat is, positief, en geeft derhalve voor y een *minimum*.

Op

Op deze wijze voortgaande, zal men vinden:
 1°. Dat $\text{Cos. } \phi = -\frac{1}{2} \sqrt{(12 + 3 \sqrt{10})}$ de functie y tot een *minimum* of *maximum* maakt, naar dat men voor den boog, tot die Cofinus behorende, ϕ of $360^\circ - \phi$ neemt. 2°. Dat $\text{Cos. } \phi = \frac{1}{2} \sqrt{(12 - 3 \sqrt{10})}$ de functie y tot een *maximum* of *minimum* maakt, naar dat men voor den boog, behorende tot $\text{Cos. } \phi$, aanneemt ϕ of $360^\circ - \phi$; en 3°. dat $\text{Cos. } \phi = -\frac{1}{2} \sqrt{(12 - 3 \sqrt{10})}$ de functie y tot een *minimum* of *maximum* maakt, naar dat men voor den boog ϕ of $360^\circ - \phi$ hebbe aangenomen.

Om nu de hoeken te vinden, welke tot de vier cofinusfen behooren, werke men in Logarithmen, aldus:

$\text{Log. } 10 = 1,00000000$ $\text{Log. } \sqrt{10} = 0,50000000$ $\text{Log. } 3 = 0,47712125$ $\text{som} = 0,97712125$ $3 \sqrt{10} = 9,4868332$	$12 + 3 \sqrt{10} = 21,4868332 = m$ $12 - 3 \sqrt{10} = 2,5131668 = n$ $\text{Log. } m = 1,3321725$ $\text{Log. } \sqrt{m} = 0,6660862$ $\text{Log. } 6 = 0,7781513$ af $\text{Log. Cos. } \phi = \text{Log. } \frac{1}{2} \sqrt{(12 + 3 \sqrt{10})} = 9,8879349$ <div style="text-align: right;"><i>derhalve</i> $\phi = 39^\circ 24' 54'', 85$</div>
--	---

Met $\text{Cos. } \phi = +\frac{1}{2} \sqrt{(12 - 3 \sqrt{10})}$ vindt men, op dezelfde wijze werkende, $\phi = \dots$
 $74^\circ 40' 46'', 61$, en men heeft derhalve, voor de acht waarden van ϕ , de volgende hoeken:

$1^\circ \phi = 39^\circ 24' 54'', 85$ $2^\circ \phi = 140^\circ 35' 5'', 15$ $3^\circ \phi = 74^\circ 40' 46'', 61$ $4^\circ \phi = 105^\circ 19' 33'', 39$	$360^\circ - \phi = 320^\circ 35' 5'', 15$ $360^\circ - \phi = 219^\circ 24' 54'', 85$ $360^\circ - \phi = 285^\circ 19' 13'', 39$ $360^\circ - \phi = 254^\circ 40' 46'', 61$
---	---

De vier eerste waarden, in de eerste kolom geplaatst, geven beurteling een *max.*, *min.*, *max.* en *min.*; de vier overeenstemmende waarden, in de tweede kolom, maken y beurtelings *min.* *max.* *min.* en *max.* verkrijgende y , voor elk *maximum* of *minimum*, uit de tweede kolom genomen, dezelfde waarde, als voor het overeenkomstig *maximum*

um of minimum, uit de tweede; doch met een tegengesteld teeken. Er bestaan dus in de daad voor de vergelijking, $y = \frac{1}{4} a^2 \times \sin.\phi \times \dots \sin.2\phi \times \sin.3\phi$, vier maxima en vier minima, welke men zich ook zichtbaar zal kunnen voorstellen; wanneer men de transcendentale kromme lijn, door de vergelijking, $y = \frac{1}{4} a^2 \sin.\phi \times \sin.2\phi \times \sin.3\phi$ uitgedrukt, construeert.

Maar de oplossing der vergelijking $\delta y : \delta \phi = 0$ heeft nog twee andere wortels; namelijk $\cos.\phi = +1$ en $\cos.\phi = -1$ voortgebracht, en tot deze behooren de hoeken $\phi = 0^\circ$ en $\phi = 180^\circ$, zijnde de overeenkomstige Sinussen dezer hoeken, beide gelijk nul; dan, deze geven noch maxima noch minima; omdat wegens $\sin.\phi = 0$, de tweede en volgende differentialen, in beide gevallen, verdwijnen.

Alhoewel nu alle deze gevondene maxima en minima, in de vergelijking $y = \frac{1}{4} a^2 \sin.\phi \times \sin.2\phi \times \sin.3\phi$, in de daad voorhanden zijn, volgt daarom hier, dat onze gevraagde driehoek er even zoo vele zal hebben. Hier geldt wederom dezelfde aanmerking, welke wij, in de oplossing van voorstel 90 hier boven, *Bladz. 232*, gemaakt hebben. Ons vraagstuk is tot een ander gebracht, om namelijk zulk eenen boog ϕ te vinden, dat $\sin.\phi \times \sin.2\phi \times \sin.3\phi$ een maximum worde? De oplossing heeft ook de minima leeren kennen: doch in deze eind-vergelijking is de voorwaarde, welke de natuur des driehoeks medebrengt, dat namelijk $\phi + 2\phi = 3\phi < 180^\circ$ moet zijn, nitt meer opgesloten. Het voorgestelde werkstuk is dus uit zijnen aard aan eene voorwaarde verbonden, waaraan het werkstuk, om $\sin.\phi \times \sin.2\phi \times \sin.3\phi$ tot een maximum te maken, niet meer onderworpen blijft, onder alle de gevondene waarden van ϕ kan derhalve slechts alleen die voldoen, wiens drievoud kleiner dan 180° is, en deze is

$\phi =$

$\phi = 39^{\circ} 24' 54'',85$, welke y , en bijgevolg den inhoud des driehoeks, tot een *maximum* maakt.

Met deze waarde van ϕ vindt men nu, voor de zijden, (zie *Fig. 88.*)

$$AC = a \sin. \phi = \frac{1}{8} a \sqrt{(24 - 3 \sqrt{10})}$$

$$BC = a \sin. 2\phi = \frac{1}{8} a \sqrt{(22 + 4 \sqrt{10})}$$

$$AB = a \sin. 3\phi = \frac{1}{8} a \sqrt{(204 + 15 \sqrt{10})}$$

en voor den inhoud des driehoeks of voor y :

$$y = \frac{a^2 \times [34 \sqrt{2} + 5 \sqrt{5}]}{216}$$

of deze wortel-uitdrukking nader ontwikkeld hebbende,

$$y = 0,274368523 a^2$$

welke uitdrukking, die de betrekking van den inhoud des grootsten driehoeks tot het vierkant van de middellijn des cirkels, waarin hij beschreven is, uitdrukt, ook door middel van de *Log. Sin. Tafel* (zoo als de Heer HUGUENIN in zijne oplossing gedaan heeft,) kan gevonden worden.

2°. Wanneer men niet onmiddellijk de vergelijking (1), *Bladz. 267*, de waarde van y uitdrukkende, in eene functie van den enkelden boog ϕ verkiest te herleiden, kan men dezelve in haren oorspronkelijken toestand differentieren, en men vindt dan:

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{1}{8} a^2 \times [3 \sin. \phi \times \sin. 2\phi \times \cos. 3\phi + 2 \sin. \phi \times \sin. 3\phi \times \cos. 2\phi + \sin. 2\phi \times \sin. 3\phi \times \cos. \phi] \quad (\beta)$$

maar dan moet men toch, om tot eene welgeordende vergelijking te komen, dezelfde substitutie maken, welke dan wederom de vergelijking . . . $[24 \cos^4. \phi - 16 \cos^2. \phi + 1] \times [\cos^2. \phi - 1]$ zal te voorschijn brengen.

3°. De Heer HUGUENIN schrijft, in de vergelijking $24 \cos^4. \phi - 16 \cos^2. \phi + 1$, voor $\cos^2. \phi$ derzelver bekende waarde $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2\phi$, verkrijgt dan de vierkants vergelijking:

$$6 \cos^2. 2\phi + 4 \cos. 2\phi - 1 = 0$$

S

en

en hieruit $\text{Cos. } 2\phi = \frac{1}{2}[-2 \pm \sqrt{10}]$, — met welke waarde hij dezelfde uitkomsten, als boven, verkrijgt.

4°. De Heeren HUGUENIN en VAN EEGHEN komen, doch langs onderscheidene wegen, de eerste, door de vergelijking (B), door $\text{Cos. } \phi \times \text{Cos. } 2\phi \times \text{Cos. } 3\phi$ te deelen, en de ander, door, in de vergelijking, $24 \text{Cos}^4 \phi - 16 \text{Cos}^2 \phi + 1$, te stellen, $\text{Cos}^2 \phi = 1 : \text{Sec}^2 \phi = 1 : [1 + \text{Tang}^2 \phi]$, tot de vergelijking:

$\text{Tang}^4 \phi - 14 \text{Tang}^2 \phi + 9 = 0$
 waaruit $\text{Tang. } \phi = \sqrt{5} \pm \sqrt{2}$ gevonden wordt.

Apdex, door JACOB DE GELDER.

Het kan nuttig zijn den jongen beoefenaar aan te toonen, dat dit werkstuk ook nog anders kan opgelost worden. Zij *Fig. 89.* (*) ABC de begeerde driehoek, beschreven in den eirkel, wiens middellijn $CD = a$ is, zijnde hoek $A = 2$ hoek B . Men stelle het punt C aan den omtrek standvastig en neme het punt a oneindig dicht bij A : voorts $Bb = 2 Aa$, (zijnde namelijk wegens de gegevene eigenschap des driehoeks boog $BC = 2$ boog AC .) Men trekke de lijnen Ca , Cb , ab en Ab ; dan is het verschil der driehoeken ABC en abC klaarblijkelijk gelijk aan:

$\Delta ABb + \Delta Aab - \Delta ACa - \Delta BCb$
 en dit verschil wordt, aangezien Aa oneindig klein is, de differentiaal van den inhoud en deze moet, omdat hij een *maximum* moet zijn, gelijk nul gesteld worden. (†) Uit de vergelijking:

Δ

(*) In plaat VI staat *Fig. 98.* moet zijn *Fig. 89.* Trek ook Ab in plaats van aB .

(†) Dat hij een maximum kan worden, blijkt uit de beschouwing der figuur genoegzaam: in elk geval, daar zulks niet bleek, zou men zulk eene gevolgtrekking moeten wanhouwen. DE GELDER.

$\Delta ABb + \Delta Aab - \Delta ACa - \Delta BCb = 0 \dots (1)$
 kan men gemakkelijk eene eigenschap des driehoeks ABC, welke aan denzelfden, in het geval van een *maximum*, bijzonder eigen moet zijn, afleiden.

De inhoud $\Delta ABb = \frac{1}{2} AB \times Ab \times \sin. BAb$ zijnde en AB van Ab slechts eene oneindig kleine grootheid verschillende, zoo zal, daar *koorde* $Bb = CD \times \sin. BAb$ en *koorde* $Bb = \text{boog}$ Bb is, $\sin. BAb = Bb : CD$ zijn en derhalve zal

$$\text{Inh. } \Delta ABb = \frac{1}{2} AB^2 \times Bb : CD$$

worden. Op dezelfde wijze zal men vinden:

$$\text{Inh. } \Delta Aab = \frac{1}{2} AB^2 \times Aa : CD$$

$$\text{Inh. } \Delta ACa = \frac{1}{2} AC^2 \times Aa : CD$$

$$\text{Inh. } \Delta BCb = \frac{1}{2} BC^2 \times Bb : CD$$

deze waarden van de inhouden der driehoeken dan, in de vergelijking (1), overbrengende, zal men, na behoorlijke herleiding, vinden:

$$3 AB^2 = AC^2 + 2 BC^2 \dots (2)$$

en deze vergelijking bevat dan de betrekking, welke er tusſchen de zijden des driehoeks, op het oogenblik, dat zijn inhoud een *maximum* wordt, bestaan moet.

De voorwaarde, bij welke $A = 2B$ moet zijn, geeft nog eene tweede vergelijking tusſchen de zijden. Laat de lijn AE den hoek BAC midden door deelen; dan is hoek BAE = B en $AE = BE$. Volgens de bekende eigenschap, (*Beg. IV Stell. IV B.*) is nu:

$$AC : AB = CE : BE$$

$$AC + AB : BC = AB : BE$$

$$BE = \frac{AB \times BC}{AB + AC}$$

maar, volgens *Beg. XXV Stell. V B.* is:

$$AC \times AB = AE^2 + BE \times EC = BE^2 + BE \times EC \dots$$

$$\dots = BE \times BC$$

dat is, voor BE hare waarde stellende,

$$AC^2 + AC \times AB = BG^2 \dots (3)$$

Stellen wij nu, om te bekorten, $AC = x$.

$AB = y$ en $BC = z$; dan veranderen de vergelijkingen (2) en (3) in de twee volgende:

$$3y^2 = x^2 + 2z^2 \text{ en } x^2 + xy = z^2$$

uit welke de betrekking der grootheden x , y en z gemakkelijk gevonden wordt; want men heeft:

$$2z^2 = 3y^2 - x^2 = 2x^2 + 2xy$$

of $2xy = 3y^2 - 3x^2$ (h)

Deze laatste in het vierkant gebragt, en aan beide zijden $36x^2y^2$ bijgeteld hebbende, wordt, uit de som den vierkants-wortel trekkende,

$$2xy \sqrt{10} = 3y^2 + 3x^2$$

deze met vergel. (h) optellende, en (h) van de zelve aftrekkende, vindt men, na door de gelijke factoren gedeeld te hebben:

$$6x = [2\sqrt{10} - 2]y; \text{ en } 6y = [2\sqrt{10} + 2]x$$

Men stelde nu $x = 6u$; dan wordt $y = \dots$
 $(2 + 2\sqrt{10})u$, en $z^2 = x^2 + xy = \dots$
 $(48 + 12\sqrt{10})u^2$. Men verkrijgt dan:

$$x^2 = 36u^2; y^2 = [44 + 8\sqrt{10}]u^2, z^2 = [48 + 12\sqrt{10}]u^2$$

Er blijft dan niets anders over, dan de waarde van u te vinden. Volgens *Beg. XXVIII St. V B.* is, de inhoud des driehoeks $= I$ stellende,

$$a^2 = x^2 y^2 z^2 : 4 I^2$$

en volgens *Bijv. XIX St. III B.* is verder,

$$16 I^2 = 4x^2 y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$$

en diensvolgens:

$$a^2 = \frac{4x^2 y^2 z^2}{4x^2 y^2 - [x^2 + y^2 - z^2]^2}$$

Men stelde nu in deze vergelijking, voor x^2 , y^2 en z^2 , de waarden hier boven gevonden; dan heeft men:

$$a^2 = \frac{4 \cdot 36 \cdot [44 + 8\sqrt{10}] \times [48 + 12\sqrt{10}] u^6}{4 \cdot 36 \cdot [44 + 8\sqrt{10}] u^4 - [32 - 4\sqrt{10}]^2 u^4}$$

of na behoorlijke herleiding,

$$a^2 = 72 \times \frac{192 + 57\sqrt{10}}{161 + 44\sqrt{10}} \times u^2$$

$$u = \frac{1}{18} \cdot \sqrt{[24 - 3\sqrt{10}]} a$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{[24 - 3\sqrt{10}]} a$$

$$y =$$

$$y = \frac{1}{18} \cdot \sqrt{[204 + 15 \sqrt{10}] a}$$

$$z = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{[22 + 4 \sqrt{10}] a}$$

hetwelk alles met de eerste oplossing overeenstemt.

Nº. 97. Door

JACOB DE GELDER, U. Huguenin, en P. van Eeghen, Chz.

Doorgaands vergenoegt men zich, met de differentiaal der functie, waarvan men het *maximum* of *minimum* zoekt, gelijk nul te stellen, zonder de wortels der vergelijking, daaruit ontstaande, aan de verkenning-vergelijking, welke de tweede differentiaal dezer functie is, te toetsen. Dit gaat nu wel aan, indien het van elders blijkbaar is, dat er een *maximum* bestaat en de vergelijking, die men oplost, slechts eenen wortel heeft; maar wanneer zulks, gelijk hier het geval is, twijfelachtig wordt, en zoo gemakkelijk, door de beschouwing der figuur of der vergelijking, niet kan bevestigd worden, moet de zaak regelmatig en naar behooren onderzocht worden; waarom wij niet gevraagd hebben naar het *maximum* van den omtrek; maar te onderzoeken of er een driehoek besta, wiens omtrek een *maximum* of *minimum* mogte zijn?

Men stelle, Fig. 88, $B = \phi$ en $A = 2\phi$; dan is, zie de oplossing van het voorgaande vraagstuk, $AC = a \sin \phi$; $BC = a \sin 2\phi$ en $AB = a \sin 3\phi$. Stellen wij dan den omtrek des driehoeks $= z$, dan is:

$$z = a \sin \phi + a \sin 2\phi + a \sin 3\phi$$

Om dan ons vraagstuk op te lossen, moet:

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = a \times [\cos \phi + 2 \cos 2\phi + 3 \cos 3\phi]$$

gelijk nul gesteld worden en de waarden van ϕ ,
S 3
uit

uit die vergelijking ontstaande, in de verkennings-vergelijking,

$$\frac{\partial \delta z}{\partial \varphi^2} = -a \times [\sin. \varphi + 4 \sin. 2 \varphi + 9 \sin. 3 \varphi]$$

worden overgebracht, om, naar mate $\partial \delta z : \partial \varphi^2$ negatief of positief wordt, tot het dadelijk bestaan van een *maximum* of *minimum* te mogen besluiten. Men heeft derhalve:

$$3 \cos. 3 \varphi + 2 \cos. 2 \varphi + \cos. \varphi = 0$$

nu is (zie DE GELDER'S, *Meetk. Anal. Bladz. 191. I Deel.*) $\cos. 3 \varphi = 4 \cos^3. \varphi - 3 \cos. \varphi$ en $\cos. 2 \varphi = 2 \cos^2. \varphi - 1$, en onze vergelijking wordt dus, door de substitutie dezer waarden,

$$\cos^3. \varphi + \frac{1}{2} \cos^2. \varphi - \frac{3}{2} \cos. \varphi - \frac{1}{2} = 0 \quad (A)$$

Na dat men nu, uit deze vergelijking, de drie waarden, welke $\cos. \varphi$ verkrijgen kan, heeft opgelost, zal men die waarden, elk afzonderlijk, in de verkennings-vergelijking $\partial \delta z : \partial \varphi^2$, moeten overbrengen, om te beoordeelen welke waarden van $\cos. \varphi$ de functie $a \times [\sin. \varphi + \sin. 2 \varphi + \sin. 3 \varphi]$ tot een *maximum* of *minimum* zullen maken? dan, om dit overbrengen met meer gemak te kunnen uitvoeren, zoo stelde men (zie *Meetk. Anal. I. D. Bladz. 191.*) $\sin. 3 \varphi = [4 \cos^2. \varphi - 1] \times \sin. \varphi$ en $\sin. 2 \varphi = 2 \cos. \varphi \sin. \varphi$; dan verkrijgt de verkennings-vergelijking deze geschiktere gedaante:

$$\frac{\partial \delta z}{\partial \varphi^2} = -4 a \times [9 \cos^2. \varphi + 2 \cos. \varphi - 2] \times \sin. \varphi \quad (B)$$

Het komt er dan alleen maar op aan, om de vergelijking (A) op te lossen. Stelt men in deze $6 \cos. \varphi = u$; dan wordt $\cos. \varphi = \frac{1}{6} u$ $\cos^2. \varphi = \frac{1}{36} u^2$ en $\cos^3. \varphi = \frac{1}{216} u^3$, en zij verandert in:

$$u^3 + 2 u^2 - 24 u - 36 = 0 \dots (C)$$

Door de Leerwijze van BUDAN (zie DE GELDER'S *Wisk. Lessen, II Gurs, XLIX Les.*) vindt men: dat er een positieve wortel, tusschen + 4

en $+5$; een negative tusschen -1 en -2 , en nog een negative, tusschen -5 en -6 bestaat; en deze wortel-grenzen zijn reeds voldoende, om, uit de verkennings-vergelijking (B), optemaken, wat elk dezer wortels geven zal; want, voor den eersten, is $\text{Cos. } \phi > \frac{1}{2}$ en $< \frac{1}{2}$, en de onderstelling van $\text{Cos. } \phi = \frac{1}{2}$ en $\text{Cos. } \phi = -\frac{1}{2}$ maakt, indien men met deze positive cosinus eene positive sinus laat overeenstemmen, dat is, ϕ in het eerste quadrant neemt, (B) negatief en de eerste wortel geeft derhalve een *maximum*; maar laat men ϕ in het vierde quadrant vallen en wordt bijgevolg $\text{Sin. } \phi$ negatief; dan zal die eerste wortel een *minimum* geven. Uit de limieten der twee andere negatieve wortels, zal het ook blijken: dat de wortel, tusschen -1 en -2 , een *minimum* of *maximum* geeft, naar dat de hoek met $\text{Cos. } \phi$, in dit geval, overeenkomende, in het tweede of derde quadrant genomen wordt; en dat eindelijk de laatste wortel, tusschen -5 en -6 , een *maximum* of *minimum* geeft, naar dat men de hoek, welke met dien wortel overeenstemt, in het tweede of derde quadrant neemt. Het blijkt derhalve uit dit alles, dat er, in den ruimten zin genomen, drie *maxima* en drie *minima* bestaan.

Nu moeten nog de drie waarden van $\text{Cos. } \phi$, het zij door de vergelijking (A), het zij door de vergelijking (C) op te lossen, benaderd worden. Onder de zoo vele verschillende handelwijzen daartoe voorhanden, heeft DE GELDER, volgens de leerwijze van BUDAN, elken wortel van de vergelijking (C) afzonderlijk benaderd en gevonden:

$$u = + 4,71300597; u = - 1,45185732 \\ \text{en } u = - 5,26114865$$

zijnde deze wortels, tot in het laatste cijfer, nauwkeurig; daar nu $\text{Cos. } \phi = \frac{1}{2}u$ is, zoo

worden de wortels van de vergelijking (A) deze volgende:

$$\cos . \varphi = + 0,7855010; \cos . \varphi = - 0,2419762 \\ \text{en } \cos . \varphi = - 0,8768581$$

wordende hier door de waarden van φ in rangorde de volgende:

$$\varphi = 38^{\circ}13'59'',95, \text{ of } 321^{\circ}46'0'',05$$

$$\varphi = 104^{\circ}0'10'',25 \dots 255^{\circ}59'49'',75$$

$$\varphi = 151^{\circ}15'56'',35 \dots 208^{\circ}44'3'',65$$

omtrent welke hoeken hetzelfde geldt, wat in het voorgaande vraagstuk is aangemerkt geworden.

De Heer HUGUENIN den jongen beoefenaar een voorbeeld willende geven, hoe de cubische vergelijkingen, drie bestaanbare wortels hebbende, (in welk geval de Cardanische oplossing tot het onherleidbaar geval brengt,) met behulp der goniometrische lijnen, regstreeks en zonder benadering, kan opgelost worden, gaat tot dat einde op deze wijze te werk. (*) Hij stelt in de vergelijking, $\cos^3 . \varphi + \frac{1}{2} \cos^2 . \varphi - \frac{2}{3} \cos . \varphi - \frac{1}{3} = 0$, $\cos . \varphi = \frac{1}{3} (x - 1)$ en verkrijgt alzoo de herleide vergelijking:

$$x^3 - 57x - 65\frac{1}{2} = 0$$

welke geenen tweeden term meer heeft en bijgevolg in staat gebragt is, om door den Cardanischen regel opgelost te worden. Uit de vergelijkingen, in Tafel N van de *Meetk. Anal. Bladz. 191*, voorkomende, neemt hij de vergelijking $\sin . 3\omega = [4 \cos^2 . \omega - 1] \times \sin . \omega$ en verkrijgt, na in dezelve $\cos^2 . \omega = 1 - \sin^2 . \omega$ gesteld te hebben,

$$\sin^3 . \omega \pm 0 - \frac{1}{2} \sin . \omega + \frac{1}{4} \sin . 3\omega = 0 \quad (1)$$

welke eene der bekende vergelijkingen is, om

eenen

(*) Men leze hier de *fraaije Verhandeling van den Heer O. S. BANGMA, over eenige voorstellen den cirkel betreffende*, in het II Deel *Mengelwerk van Wiskundige Verhandelingen*, *Bladz. 73* en inzonderheid het laatste gedeelte, van *Bladz. 86—91. DE GELDER.*

eenen cirkelboog in drie gelijke deelen te ver-
deelen, wordende in deze $\text{Sin. } 3\omega$, als bekend en
gegeven, aangenomen. (*)

Men stelle $x = p \text{ Sin. } \omega$; dan verandert deze
vergelijking (1) in de volgende:

$$x^3 - \frac{3}{4} p^3 x + \frac{1}{4} p^3 \text{Sin. } 3\omega = 0 \dots (2)$$

vergelijkt men nu deze, term voor term, met
eene algemeen gegevene cubische vergelijking,

$$x^3 - ax + b = 0 \dots (3)$$

dan vindt men:

$$p = \frac{2}{3} \sqrt{3a}, \text{ en } \text{Sin. } 3\omega = -\frac{9b}{2a\sqrt{3a}}$$

de coëfficienten der vergelijking (2) worden der-
halve bekend, en $\text{Sin. } 3\omega$ is positief of negatief,
naar dat b negatief of positief is.

Men zal aldus, door middel van de coëfficien-
ten, a en b , der vergelijking (3), de waarde van
 p en $\text{Sin. } 3\omega$ vinden; maar de sinus welke tot
den boog 3ω behoort, behoort ook tevens tot
 $180^\circ - 3\omega$ en tot $-(180^\circ + 3\omega)$; de sinus van ω
heeft dus drie waarden, te weten: $\text{Sin. } \omega$, . . .
 $\text{Sin. } (60^\circ - \omega)$ en $\text{Sin. } (60^\circ + \omega)$; gevende
de overige bogen dezelfde waarden: de verge-
lijking (3) zal gevolgelyk deze drie wortels
hebben: $x = p \text{ Sin. } \omega$, $x = p \text{ Sin. } (60^\circ - \omega)$
en $x = -p \text{ Sin. } (60^\circ + \omega)$, en deze gevon-
den hebbende, zal $\text{Cos. } \phi = \frac{1}{3} (x - 1)$ voor
elk dezer drie waarden van x moeten berekend
worden, om de wortels der vergelijking (A) te
vinden.

Om echter van deze handelwijze gebruik te
kunnen maken, moet: 1^o de tweede term van
verg. (3) met het negatieve teeken zijn aange-
daan, wijl anders $p = \frac{2}{3} \sqrt{3a}$ eene onbestaan-
ba-

(*) Men zou ook van de formule $\text{Cos. } 3\omega = 4 \text{ Cos}^3 \omega - 3 \text{ Cos. } \omega$ zie *Meeth. Anal. Bladz. 191*, tot dat zelfde
einde, gebruik kunnen maken. DE GELDERA

bare grootheid zou worden: 2° moet $9b < 2a\sqrt{3a}$ zijn; want ontbrak dit vereischte, dan zou $\sin. 3\omega > 1$ en onbestaanbaar zijn; maar hierin kan nimmer eene hindernis gelegen zijn; want, ingeval de drie wortels eener cubische vergelijking bestaanbaar zijn, bestaan ook tevens deze twee vereischten (*) en deze leerwijze is derhalve altijd op het onherleidbaar geval toepasfelijk.

In ons bijzonder voorbeeld; is $a = 57$, $b = -65\frac{1}{2}$; derhalve $p = \frac{2}{3}\sqrt{3a} = 2\sqrt{19}$ en $\sin. \omega = -\frac{131}{76\sqrt{19}}$. In Logarithmen werken

(*) Dat de coëfficient van den derden term eener cubische vergelijking, uit welke de tweede term is uitgroeid, en welker wortelen alle bestaanbaar zijn, altijd negatief is, wordt aldus bewezen. De som der wortels is, in dien toestand der vergelijking, altijd nul; er bestaan dus altijd twee positieve of twee negatieve wortels, welker som aan den derden negatieven of positieven wortel gelijk is; men kan derhalve deze wortels, of door $2a$, $-a + b$ en $-a - b$; of door $-2a$, $+a + b$ en $+a - b$ (altijd $a > b$ zijnde) voorstellen; daar nu de coëfficient van den derden term uit de som van de producten der wortels, twee aan twee genomen, bestaat, is die coëfficient, in beide gevallen, $-3a^2 - b^2$ negatief. Voorts is, zie II *Cursus*, § 894, indien de wortels der vergelijking $x^3 - ax + b = 0$ alle bestaanbaar zijn, $\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3$ altijd negatief; derhalve (deze uitdrukking met $+ 324$ vermenigvuldigende,) is $81b^2 - 12a^3$ insgelijk negatief, $12a^3$ is dus grooter dan $81b^2$ en $\frac{81b^2}{12a^3}$ is derhalve kleiner dan de

éénheid, bijgevolg is ook $\sqrt{\frac{81b^2}{12a^3}} < 1$; of $\frac{9b}{2a\sqrt{3a}} < 1$;

deze breuk kan gevolgelijk altijd door de sinus van eenigen boog worden voorgesteld en de voorgedragene leerwijze is dan, in het onherleidbaar geval, altijd toepasfelijk. DE GELDER.

kende, vindt men: $\text{Log. Sin. } 3\omega = 9,5970809$; derhalve is de boog, uit de tafel genomen, tot die sinus behoorende, $\omega = 23^\circ 17' 36'', 36$; maar aangezien de sinus negatief is, moet men den boog uit het derde quadrant nemen, en dan is
 $3\omega = 203^\circ 17' 36'', 36$; derhalve is $\omega = 67^\circ 45' 52'', 12$
 $60^\circ - \omega = -7^\circ 45' 52'', 12$ en $60^\circ + \omega = 127^\circ 45' 52'', 12$,
 waarvan de Log. Sin. zijn: $9,9664403$; $9,1306595$;
 $9,8979210$; voorts is $\text{Log. } p = \text{Log. } 2 + \frac{1}{2} \times$
 $\text{Log. } 19 = 0,9404068$ en hier mede vindt men
 de waarden van x , als volgt:

$8,0695100$; — $1,1777857$, en — $6,8917216$.

en door deze eindelijk de waarden van $\text{Cos. } \phi = \frac{1}{3}$
 $(x - 1)$, in rangorde, $0,7855011$; — $0,2419762$
 en — $0,9768579$, zijnde deze dezelfde, welke de
 Budanische benadering heeft opgeleverd.

Hier geldt nu wederom dezelfde aanmerking,
 welke wij in de oplossing van het voorgaande
 vraagstuk gemaakt hebben: de gevondene waarden
 van ϕ voldoen wel alle aan de uitdrukking
 $a \times [\text{Sin. } \phi + \text{Sin. } 2\phi + \text{Sin. } 3\phi]$; maar slechts
 ééne uit deze, namelijk $\phi = 38^\circ 13' 59'', 95$, is
 alleen op den driehoek toepasselijk. Nemende dus
 $B = 38^\circ 13' 59'', 95$ en $A = 2B$, zal de omtrek
 des driehoeks, welke, zoo als men, door bereke-
 ning, ligtelijk vinden zal, aan $2,6663105 \times a$
 gelijk wordt, een *maximum* zijn.

Nº. 98. Door

JACOB DE GELDER, U. Huguenin, en P.
 van Eeghen, Chz.

De oplosfers hebben, langs onderscheidene we-
 gen, eene uitdrukking voor de middellijn des in-
 geschrevenen cirkels gevonden.

De Heer DE GELDER gaat aldus te werk:
 men stelle zegt hij, zie (*Fig. 88.*) de middellijn
 des gegebenen cirkels = a , $B = \phi$ en $A = 2\phi$;
 dan

dan is. (zie de oplossingen van N^o. 96 en 97 hier boven.)

$$\text{Inh. ABC} = \frac{1}{2} a^2 \sin. \phi \times \sin. 2\phi \times \sin. 3\phi$$

$$\text{Omtrek} = a \times [\sin. \phi + \sin. 2\phi + \sin. 3\phi]$$

Nu is (zie *Beg. der Meetk.* XXVI *Stell.* V B.) de inhoud van eenen driehoek gelijk aan deszelfs omtrek, vermenigvuldigd met de halve straal des ingeschreven cirkels stellende dan die straal $= y$ dan is, volgens dit beginsel,

$$y = a \times \frac{\sin. \phi \times \sin. 2\phi \times \sin. 3\phi}{\sin. \phi + \sin. 2\phi + \sin. 3\phi}$$

en men moet nu onderzoeken, in welke gevallen, deze functie een *maximum* of *minimum* worden kan?

Men stelle wederom $\sin. 2\phi = 2 \sin. \phi \times \cos. \phi$ en $\sin. 3\phi = [4 \cos^2. \phi - 1] \times \sin. \phi$ (zie *Meetk. Anal. Bladz.* 191) dan wordt onze vergelijking,

$$y = a \times \frac{\sin. \phi \times 2 \sin. \phi \times \cos. \phi \times [4 \cos^2. \phi - 1] \times \sin. \phi}{\sin. \phi + 2 \sin. \phi \times \cos. \phi + [4 \cos^2. \phi - 1] \times \sin. \phi}$$

of, teller en noemer door $\sin. \phi$ deelende,

$$y = a \times \frac{2 \cos. \phi \times \sin^2. \phi \times [4 \cos^2. \phi - 1]}{2 \times [2 \cos. \phi + 1] \times \cos. \phi}$$

en teller en noemer nogmaals door $2 \cos. \phi \times [2 \cos. \phi + 1]$ deelende, en voor $\sin^2. \phi$ hare waarde $1 - \cos^2. \phi$ schrijvende, vindt men:

$$y = a \times [1 - \cos^2. \phi] \times [2 \cos. \phi - 1]$$

en door ontwikkeling der aangewezenen producten, $y = -a \times [2 \cos^3. \phi - \cos^2. \phi - 2 \cos. \phi + 1] \dots (A)$ deze is nu de eenvoudigste uitdrukking voor de straal des ingeschrevenen cirkels. Het blijkt nu wel uit de figuur, dat deze straal een *maximum* moet worden; doch om in dezen zoo als het behoort te werk te gaan, zoek men de eerste en tweede differentiaal dezer vergelijking, en dan vindt men:

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = 2 a \times [3 \cos^2. \phi - \cos. \phi - 1] \times \sin. \phi$$

$\partial^2 y$

$$\frac{\partial \delta y}{\partial \phi^2} = 2a \times [9 \cos^3 \phi - 2 \cos^2 \phi - 7 \cos \phi + 1]$$

stelt men nu de waarde van $\delta y : \delta \phi$ gelijk nul, dan vindt men:

$$\sin \phi = 0; \text{ en } 3 \cos^2 \phi - \cos \phi - 1 = 0$$

uit welke laatste vergelijking $\cos \phi = \frac{1}{2} [1 + \sqrt{13}]$ en $\cos \phi = \frac{1}{2} [1 - \sqrt{13}]$, of $\cos \phi = 0,76759188$ en $\cos \phi = -0,41325855$ gevonden wordt; de bogen, welke aan deze waarden voldoen, zijn, voor $\sin \phi = 0$, $\phi = 0^\circ$ en $\phi = 180^\circ$, waarvan de cosinusfen zijn $+1$ en -1 ; en, voor de tweede vergelijking, $\phi = 39^\circ 51' 42'', 73$ en $\phi = 115^\circ 44' 17'', 23$. Nu maakt $\phi = 0^\circ$ de tweede differentiaal $+1$; de waarde $\phi = 180^\circ$ maakt dezelve -3 ; de derde waarde maakt dezelve $13 - 11 \sqrt{13}$ negatief en de vierde maakt dezelve $13 + 11 \sqrt{13}$ positief $\phi = 180^\circ$ en $\phi = 39^\circ 51' 42'', 73$ behooren derhalve tot *maxima* en de twee andere waarden, $\phi = 0^\circ$ en $\phi = 115^\circ 44' 17'', 23$ tot *minima*. Van alle dezen is slechts de waarde $\phi = 39^\circ 51' 42'', 73$ op den driehoek toepasfelijk, en men vindt, de berekening verder opmakende:

$$AC = a \times \frac{1}{2} \sqrt{22 - 2\sqrt{13}}; BC = a \times \frac{1}{2} \sqrt{39 + 4\sqrt{13}}$$

$$AB = a \times \frac{1}{24} [1174 + 286 \sqrt{13}]$$

en voor de middellijn des ingefchrevenen cirkels,

$$ay = \frac{1}{17} a \times [13 \sqrt{13} - 35] = 0,4394876 a$$

De Heer HUGUENIN, neemt, om het vraagstuk in vergelijking te brengen, de formule van DE GELDER (zie *Meerk. Anal. Bladz. 95*) te baat. Indien R en r de stralen der *om* en *ingefchrevene* cirkels zijn en α en β twee hoeken des driehoeks beteekenen, is aldaar bewezen dat

$$r = 4 R \times \sin \alpha \times \sin \beta \times \cos (\alpha + \beta) \dots (P)$$

wezen zal. Om deze formule (vervolgt hij) tot ons oogmerk bekwaam te maken, fchrijf ik voor $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$ en verkrijg $\sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha + \beta) = \dots$
 $\frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta) - \cos^2 (\alpha + \beta)];$
 maar

maar aangezien $\text{Cos.}(a - \beta) \text{Cos.}x(a + \beta) = \frac{1}{2} [\text{Cos.}2\beta + \text{Cos.}2a]$, en $\text{Cos.}^2(a + \beta) = \frac{1}{2} [1 + \text{Cos.}2(a + \beta)]$ is, wordt $\text{Sin.}a \text{Sin.}\beta \text{Cos.}(a + \beta) = \frac{1}{4} [\text{Cos.}2a + \text{Cos.}2\beta - \text{Cos.}2(a + \beta) - 1]$, welke waarde in de vergelijking (P) overgebracht zijnde, en daarna $2a = A$, $2\beta = B$ en $C = 180^\circ - 2(a + \beta)$ gesteld hebbende, dezelve worden zal:

$r = R \times [\text{Cos.}A + \text{Cos.}B + \text{Cos.}C - 1] \dots (Q)$
welke vergelijking ons leert: dat de som van de cosinussen van de hoeken eens driehoeks gelijk is aan de som van de stralen der in en omgeschrevene cirkels, gedeeld door de straal des cirkels, die om denzelfven beschreven is.

Men stelle nu in de vergelijking (Q) $B = 0$ en $A = 2\phi$; dan is $C = 180^\circ - 3\phi$, en dus $\text{Cos.}C = -\text{Cos.}3\phi$, en

$r = R \times [\text{Cos.}\phi + \text{Cos.}2\phi - \text{Cos.}3\phi - 1]$
moet bijgevolg een *maximum* zijn.

Stelt men in deze $\text{Cos.}3\phi = 4 \text{Cos}^3.\phi - 3 \text{Cos.}\phi$, en $\text{Cos.}2\phi = 2 \text{Cos}^2.\phi - 1$; dan komt men tot de formule:

$r = -2R \times [2 \text{Cos}^3.\phi - \text{Cos}^2.\phi - 2 \text{Cos.}\phi + 1]$
zijnde deze (wanneer men $r = y$ en $2R = a$ neemt,) dezelfde formule (A), welke DE GELDER gevonden heeft.

De Heer VAN ECKEN maakt met den Heer HUGUENIN van hetzelfde beginsel gebruik; maar de uitvoering der oplossing neemt bij hem eene geheel andere wending. Stel (zegt hij,) $B = \phi$, $A = 2\phi$ en $C = 180^\circ - 3\phi$; dan is (de middellijn des omgeschrevenen cirkels $= a$ zijnde,) $AC = a \text{Sin.}\phi$, $BC = a \text{Sin.}2\phi$ en $AB = a \times \text{Sin.}3\phi$, en, volgens DE GELDER's, *Meerk. Anal. Bladz. 95*, is, de straal des ingeschrevenen cirkels $= y$ stellende,

$y = 4a \text{Sin.}\frac{1}{2}\phi \times \text{Sin.}\phi \times \text{Cos.}1\frac{1}{2}\phi$
of, $\phi = 2\psi$ stellende,

$y = 4a \times \text{Sin.}\psi \times \text{Sin.}2\psi \times \text{Cos.}3\psi$
nu

nu is (zie DE GELDERS, *Beg. der Meetk. Bladz.* 569, *form.* 29, aldaar $a = b = c$ stellende,) $\text{Cos. } 3\psi = \text{Cos}^3 \psi - 3 \text{Cos. } \psi \times \text{Sin}^2 \psi$ en $\text{Sin. } 2\psi = 2 \text{Sin. } \psi \text{ Cos. } \psi$ en diensvolgens,

$$y = 4a \times [\text{Sin}^2 \psi \text{ Cos}^4 \psi - 3 \text{Sin}^4 \psi \text{ Cos}^2 \psi]$$

derhalve,

$$\frac{\delta y}{\delta \psi} = 8a \times [\text{Cos}^4 \psi - 8 \text{Cos}^2 \psi \times \text{Sin}^2 \psi + 3 \text{Sin}^4 \psi]$$

$\dots \times \text{Sin. } \psi \text{ Cos. } \psi$
 stelt men deze $= 0$; dan is $\text{Sin. } \psi \times \text{Cos. } \psi = \frac{1}{2} \text{Sin. } 2\psi = 0$, en bovendien

$\text{Cos}^4 \psi - 8 \text{Sin}^2 \psi \text{ Cos}^2 \psi + 3 \text{Sin}^4 \psi = 0$
 deelt men eindelijk deze vergelijking door $3 \text{Cos}^4 \psi$, dan verkrijgt men:

$$\text{Tang}^4 \psi - \frac{8}{3} \text{Tang}^2 \psi + \frac{1}{3} = 0 \dots (R)$$

derhalve $\text{Tang}^2 \psi = \text{Tang}^2 \frac{1}{2} \phi = \frac{1}{3} [4 \pm \sqrt{13}]$
 en $\text{Tang. } \frac{1}{2} \phi = \pm \sqrt{\frac{1}{3} (4 \pm \sqrt{13})}$. Maar

men vindt hieruit ook onmiddellijk $\text{Cos. } \phi$; want

$$\frac{1 - \text{Cos. } \phi}{1 + \text{Cos. } \phi} = \text{Tang}^2 \frac{1}{2} \phi = \frac{1}{3} [4 \pm \sqrt{13}] \text{ zijn}$$

de, zie DE GELDER, *Beg. der Meetk.* §. 561,

is $\text{Cos. } \phi = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{7 \pm \sqrt{13}} = \frac{1}{8} (1 \pm \sqrt{13})$,

zoo als boven gevonden is. Stelt men in de ver-

gelijking (R) $\text{Tang}^2 \psi = \text{Tang}^2 \frac{1}{2} \phi = \frac{1 - \text{Cos. } \phi}{1 + \text{Cos. } \phi}$

dan verkrijgt men de verg. (A) van de oplossing door DE GELDER hier boven opgegeven.

Nº. 99. Door

JACOB DE GELDER.

Zij AB (*Fig. 92.*) de middellijn des gegebenen cirkels $= 13$ decimeters, M zijn middelpunt, MP $= 3$ decimeters en bijgevolg P het gegeven punt buiten het middelpunt; dan is AM $=$ MC

$MC = MD = MB$ de straal en $AM : MP = \frac{1}{2} \times 13 : 3 = 1 : \frac{6}{13} = 1 : 0,4615384615384$ enz. men neme dus (het geen meer gemak in de berekening zal aanbrengen) de straal $AM = 1$ en $MP = 0,461538$ enz.

Stellen wij, dat PC en PD de twee elkander regthoekig snijdende lijnen zijn, en dat het gedeelte, dat zij van den cirkel afsnijden, één-vierde van deszelfs inhoud evenare, dan is het klaar, dat, wanneer men den hoek APC , dien wij $= \phi$ stellen, vinden kunnen, het werkstuk zal opgelost zijn.

Men trekke uit het middelpunt M , de stralen MC en MD , benevens MF aan PC en MG aan PD evenwijdig, dan is hoek $GMF =$ hoek $CPD = 90^\circ$: de sector $GDFEM$ is dan één-vierde van den inhoud des cirkels en het uitgesneden stuk $DEFCP$ moet dan gelijk aan dien sector zijn; dit dan alzoo zijnde, zal (indien men hier van aftrekt het stuk $DEFI$), *Fig.* $GDIM =$ *Fig.* $FCPI$ zijn; verlengt men nu voorts de lijnen GM en CP tot in H , dan zal $GDIM + MIPH = FCPI + MIPH$, dat is, $GDIM + MIPH = FCMH$ moeten zijn.

Deze laatste gelijkheid of eigenschap der figuur kan ons nu dienen, om tot de noodige vergelijkingen te komen. Omdat hoek $CPD = 90^\circ$ is, is hoek $BPD = \text{Compl. } APC$; en daar $APC = \phi$ is, is hoek $BPD = 90^\circ - \phi$ en $\text{Sin. } BPD = \text{Cos. } APC$. Nu is, in de driehoeken MPC en MPD , volgens den bekenden regel:

$$MC : MP = \text{Sin. } APC : \text{Sin. } MCH$$

$$MD : MP = \text{Sin. } BPD : \text{Sin. } PDM$$

dat is, de waarden in plaats stellende,

$$1 : \text{Sin. } \phi = a : \text{Sin. } MCH = a \times \text{Sin. } \phi$$

$$1 : \text{Cos. } \phi = a : \text{Sin. } MDP = a \times \text{Cos. } \phi$$

stellen wij dan, om te bekorten, $MCH = CMF = \chi$ en $PDM = GMD = \psi$; dan is $\text{Sin. } \chi = a \times \text{Sin. } \phi$ en $\text{Sin. } \psi = a \times \text{Cos. } \phi$ en nu is het

het gemakkelijk, om de straks gevondene vergelijking,

..... $GDIM + MIPH = FCMH \dots (A)$
 in stelkundige karaters uit te drukken; want het is zichtbaar, dat $GDIM = Sect. GDM + Drieh. MID$, en $FCMH = Sect. MFC + Drieh. MCH$ zijnde, (wegens $MG = MD = MF = MC = 1$,) $1^\circ.$) $GDIM = \frac{1}{2} \psi + \frac{1}{2} Sin. \psi \times Cos. \psi$; $2^\circ.$) $MIPH = Sin. \chi \times Sin. \psi$ en $3^\circ.$) $FCMH = \frac{1}{2} \chi + \frac{1}{2} Sin. \chi \times Cos. \chi$ zal zijn en dat gevolgelyk de voorname vergelijking (A) worden zal:
 $\frac{1}{2} \psi + \frac{1}{2} Sin. \psi Cos. \psi + Sin. \chi Sin. \psi = \frac{1}{2} \chi + \dots \frac{1}{2} Sin. \chi Cos. \chi \dots (1)$
 moerende in deze $\frac{1}{2} \psi$ en $\frac{1}{2} \chi$ in deelen van de straal en niet in graden zijn uitgedrukt. Deze vergelijking zal nu met behulp der vergelijkingen: $Sin. \chi = a Sin. \phi \dots (2)$ en $Sin. \psi = a Cos. \phi \dots (3)$ moeten worden opgelost.

De eerste vergelijking is, daar de sinusen, te gelijk met hare bogen, in dezelve voorkomen, transcendentaal en kan gevolgelyk niet anders, dan door de reeksen of langs den weg van benadering, opgelost worden. Stellen wij haar onder deze gedaante:

$$\frac{1}{2} [\chi - \psi] + \frac{1}{2} Sin. \chi Cos. \chi - \frac{1}{2} Sin. \psi Cos. \psi \\ \dots - Sin. \chi Sin. \psi = 0$$

dan zal men dezelve, met behulp der vergelijkingen $Sin. \chi = a Sin. \phi$, $Cos. \chi = \sqrt{1 - a^2 Sin^2 \phi}$, $Sin. \psi = a Cos. \phi$ en $Cos. \psi = \sqrt{1 - a^2 Cos^2 \phi}$, onder deze gedaante;

$$\frac{1}{2} \times [Boog. Sin. (a Sin. \phi) - Boog. Sin. (a Cos. \phi)] \\ + \frac{1}{2} a Sin. \phi \sqrt{1 - a^2 Sin^2 \phi} \dots \\ - \frac{1}{2} a Cos. \phi \sqrt{1 - a^2 Cos^2 \phi} \dots \\ + a^2 Sin. \phi \times Cos. \phi = 0$$

kunnen brengen; welke op geene andere wijze, dan door eene oneindig voortlopende reeks, inhoudende de magten, het zij van $Sin. \phi$ of $Cos. \phi$, ontwikkeld en door benadering kan opgelost worden: dit voorstel behoort derhalve tot die soort

T.

van

van voorstellen, waarvan EULER, in zijne *Mem. ad Anal. Infin. Vol. II Cap. XXII*, verscheidene voorbeelden gegeven heeft, en tot welke ook N^o. 201, 202, 203 en 204 van het voorgaande Deel der *Verz. van Voorst.* behooren.

De hier aangewezen herleiding der eindvergelijking, welke meer langwijlig dan moeilijk is, zou ons weinig helpen, daar men geen stap nader dan tot eene nieuwe in te rigten benadering zou gevorderd zijn. Het is dan beter de benadering regtsstreeks aan te vatten, dat is voor ϕ eene gegiste waarde aan te nemen, $\sin \chi$ en $\sin \psi$ door de vergelijkingen:

$\sin \chi = a \sin \phi$ en $\sin \psi = a \cos \phi$ te bepalen en hi te gaan, in hoe verre de onderstelde waarde aan vergelijking (1), welke wij nu onder deze gedaante stellen,

$\frac{1}{2}(\chi - \psi) + \sin 2\chi - \sin 2\psi - \sin \chi \times \sin \psi = 0$ (B) voldoet. Het is hier, dat de Leer der valsche Positiën, welke men verkeerdelijk bij het oplossen, van eenvoudige werktukken pleegt te gebruiken, eene wezenlijke en nuttige toepassing heeft.

Nemen wij, dat voor, gelijkmatige en geringe veranderingen van ϕ , het voorste lid der vergelijking (B) insgelijks gelijkmatig verandere, en dat, voor $\phi = A$, de waarde van het voorste lid der vergelijking niet veel van nul verschille; indien dan, voor $\phi = A$, en $\phi = A + p$, het voorste lid der waarden B en $B + q$ verkrijgt; dan zal, indien de waarde van ϕ genomen wordt,

$A, A + p, A + 2p, A + 3p$, enz. $A + np$ het voorste lid der vergelijking worden,

$B, B + q, B + 2q, B + 3q$ enz. $B + nq$. Indien dan $B + nq = 0$ gesteld wordt; dan is

$$n = -\frac{B}{q}; np = -\frac{pB}{q}, \text{ en } \phi = A + np = A$$

$\equiv A + \frac{p}{q} B$; en deze vergelijking zal dan zoo veel te nader bij de waarheid komen, naar gelang, dat B minder van het verschil en de grootheden p en q kleiner vallen.

Het is uit de vergelijking (B) duidelijk te zien dat $x > \phi$ en gevolgelyk $\sin. x > \sin. \phi$ en dat bijgevolg $\sin. \phi > \cos. \phi$ moet zijn.

Neemt men $\phi \equiv 45^\circ$, dan is $\sin. \phi \equiv \cos. \phi \equiv \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin. x \equiv \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\sin. \phi \equiv \frac{1}{2}\sqrt{2}$; derhalve $x \equiv \phi$, $\frac{1}{2}(x - \phi) \equiv 0$, $\sin. \phi \equiv \sin. \phi$ en het voorste lid der vergelijking wordt derhalve $\equiv \sin. x \times \sin. \phi \equiv \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{4} \equiv 0,25$.

Neemt men $A \equiv 49^\circ 12'$ en $A + p \equiv 49^\circ 13'$, en dus $p \equiv 1'$; dan vindt men, in Logarithmen werkende, $B \equiv 0,00030469$; $B + q \equiv 0,00026249$ en $q \equiv + 0,00004220$; derhalve is

$n \equiv \frac{B}{q} \equiv + \frac{0,00030469}{0,00004220} \equiv + 7,2$ en $\phi \equiv A + np \equiv 49^\circ 12' + 7,2' \equiv 49^\circ 19,2'$ zeer nabij?

Stelt men, om tot eene tweede benadering te komen, $A \equiv 49^\circ 19'$, $A + p' \equiv 49^\circ 20'$; dan is $p' \equiv 60''$, en men vindt: $B \equiv 0,0000831$ en $B + q \equiv + 0,0003522$, en hier uit . . . $\phi \equiv 49^\circ 19' 11,45''$. Tot eene nauwkeuriger benadering zou men zich van eene sinus tafel moeten bedienen, welke verder dan tot zeven cijfers in de tiendeeligen ginge.

Nº. 163. Door

JACOB DE GELDER, C. J. van Bruijsel, P. van Eeghen, Chr., L. C. Mazel, N. Bondt, Mozes Lemans, J. C. van Sitsen, A. van der Swan, Achiel Lobatto, Jan Paauw, S. J. Mulder, en C. Lantz, Jr.

Het zou, zonder enige toevallige overeenkomst tusschen de gegeven vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 - 5x + 9y = 968 \dots (1)$$

$$8y^2 - xy - 30x + 54y = 5808 \dots (2)$$

niet mogelijk zijn om dezelve tot eene vierkants-
aandvergelijking te brengen; zulk eene toevallige
overeenkomst heeft hier plaats; want, wanneer
men het zesvoud van de eerste vergelijking van
de tweede afrekt, dan heeft het verschil:

$$2y^2 + xy - 6x^2 = 0$$

de twee factoren $y + 2x = 0$ en $2y - 3x = 0$,
welke ook gevonden worden, wanneer men, in
deze vergelijking, x als bekend beschouwt en y
uit dezelve oplost. Uit deze twee factoren volgt
nu $y = 1\frac{1}{2}x$ en $y = -2x$.

Elke dezer twee vergelijkingen ($y = 1\frac{1}{2}x$ en
 $y = -2x$), kan met eene der twee gegevene
(1) en (2), vereenigd worden; men zal, dan
twee onderscheidene stelsels van twee vergelijkin-
gen tot twee onbekenden hebben, welke, elk op
zich zelve, aan het stelsel der twee gegevene ver-
gelijkingen zullen voldoen. Het eerste stelsel
geeft:

$$x^2 + y^2 - 5x + 9y = 968$$

$$\text{en } y = 1\frac{1}{2}x$$

stelt men in de eerste van deze voor y hare waar-
de uit de tweede genomen, dan heeft men:

$$x^2 + \frac{9}{4}x^2 - 5x + 13\frac{1}{2}x = 968$$

$$\text{of } x^2 + \frac{34}{4}x - \frac{3872}{4} = 0$$

welke geeft $x = 16$, of, $x = -\frac{242}{13}$; en $y = 24$,
of $y = -\frac{363}{13}$.

Het tweede stelsel bestaat uit de vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 - 5x + 9y = 968$$

$$\text{en } y = -2x$$

welke geven $x = \frac{2}{18} \pm \frac{1}{18} \sqrt{19889}$ of $= \frac{2}{18}$
 $= \frac{1}{9} \sqrt{19889}$ en $y = -\frac{4}{9} \pm \frac{1}{9} \sqrt{19889}$
of $= -\frac{4}{9} + \frac{1}{9} \sqrt{19889}$.

Men vindt hetzelfde, indien men $y = 1\frac{1}{2}x$
en $y = -2x$ met de vergelijking (2) vereenigt.
Elke der vier gevondene waarden voor x en y
voldoen aan beide de gegevene vergelijkingen;

zoo als bij de proef blijken zal; en er bestaan bij gevolg vier waarden of wortels.

N^o. 101. Door

C. J. van Brussel, J. C. van Setten, C. Lantz, Jr.,
L. van Heusden, N. Bondt, P. van Eeghen, Cha.,
en JAN PAUW.

De schepen A en B liggen, Fig. 90, Zuid en Noord van elkander. A zeilt O. Z. O.; dus is hoek BAC $= \frac{3}{4} \times 90^\circ = 67^\circ 30'$. B zeilt N. N. O., dus is hoek ABC $= \frac{1}{4} \times 90^\circ = 22^\circ 30'$, en de driehoek ABC is derhalve in C regthoekig: stellende dan AC $= x$, dan is BC $= x + 6$ en wij hebben derhalve:

$$\sin. BAC : \sin. ABC = BC : AC$$

of, $\sin. 67^\circ 30' : \sin. 22^\circ 30' = x + 6 : x$
waar uit gemaakt wordt de evenredigheid,

$\sin. 67^\circ 30' - \sin. 22^\circ 30' : \sin. 22^\circ 30' = 6 : x$
en hier uit volgt dan eindelijk:

$$x = 6 \times \frac{\sin. 22^\circ 30'}{\sin. 67^\circ 30' - \sin. 22^\circ 30'} = AC$$

maar $\sin. 22^\circ 30' = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ en . . .
 $\sin. 67^\circ 30' = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$; derhalve:

$$x = \frac{6 \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}} = AC$$

vermenigvuldigt men teller en noemer dezer breuk met $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ en $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ en naderhand nog met $\sqrt{2}$, dan vindt men:

$$x = 3 \sqrt{2} = 4,24264 = AC$$

$$x + 6 = 6 + 3 \sqrt{2} = 10,24264 = AC$$

$$\text{en eindelijk } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 6 \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 11,087.$$

N^o. 102. Door

C. J. van Brussel, J. C. van Setten, P. van Eeghen, Chz., N. Bondt, JAN PAUW, en L. van Heusden.

A en B liggen, Fig. 91, Oost en West van elkander. A zeilt ten zuiden, dus hoek BAC = 90°, B zeilt Z. O. ten O. - dus hoek ABC = $\frac{1}{2} \times 90^\circ = 33^\circ 45'$. Stellende nu AC = x dan is BC = $x + 8$ en

$$\sin. BAC : \sin. ABC = BC : AC$$

$$1 : \sin. 33^\circ 45' = x + 8 : x$$

$$1 - \sin. 33^\circ 45' : \sin. 33^\circ 45' = 8 : x$$

$$x = 8 \times \frac{\sin. 33^\circ 45'}{1 - \sin. 33^\circ 45'} = AC$$

of, omdat $\sin. 33^\circ 45' = \cos. 56^\circ 15'$ is

$$x = 8 \times \frac{\sin. 33^\circ 45'}{1 - \cos. 56^\circ 15'} = 4 \times \frac{\sin. 33^\circ 45'}{\sin^2. 28^\circ 7' 30''}$$

In Logarithmen werkende, heeft men

$$\begin{aligned} \text{Log. } 4 &= 0,6020600 \\ L. \sin. 28^\circ 7' 30'' &= 9,6733866 \quad L. \sin. 33^\circ 45' = 9,7447390 \\ L. \sin^2. 28^\circ 7' 30'' &= 9,3467732 \quad \text{Compl. } = 0,6532268 \end{aligned}$$

$$\text{Log. } x = \text{Log. } AC = 1,0009258$$

$$\text{Dus } x = 10 \text{ nagenoeg} = AC$$

$$x + 8 = 18 = BC$$

$$\text{en } \sqrt{(BC^2 - AC^2)} = 15 = AB$$

N^o. 103. Door

JAN PAUW, P. van Eeghen, Chz., N. Bondt, J. C. van Setten, A. van der Swan, C. J. van Brussel, en C. Lantz, Jr.

Stel de som Dukaten, die hij schuldig is = x , het geen hij na de eerste betaling schuldig blijft = y Dukaten; dan betaalt hij $7y + 5$ Dukaten, dat is (omdat een Dukaton = $\frac{1}{2}$ Dukaat is)

$$\frac{1}{2} \times$$

$\frac{3}{2} \times (7y + 5) = 4\frac{1}{2}y + 3$ Dukaten en de geheele schuld is derhalve $y + 4\frac{1}{2}y + 3 = 5\frac{1}{2}y + 3 = x$ Dukaten.

Van de y Dukaten, die hij, na de eerste betaling, was schuldig gebleven, betaalt hij een zeker aantal Dukaten en blijft nog een zeker aantal Dukaten schuldig. Stel dit aantal Dukaten $= z$, dan betaalde hij, volgens de vraag, $3z$ Dukaten $= \frac{3}{2} \times 3z = 1\frac{1}{2}z$ Dukaten, en dus is $y = z + 1\frac{1}{2}z = 2\frac{1}{2}z$.

Brengt men deze waarde van y in de geheele schuld over, dan wordt $x = 5\frac{1}{2}y + 3 = 5\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}z + 3 = \frac{364}{23}z + 3$; zal nu alles in de kleinste heele getallen bepaald worden, (*) moet z een veelvoud van 23 zijn; om dus alles in de kleinste heele getallen te vinden, neme men $z = 23$, de laatst schuldig geblevene Dukaten; dan is $y = 2\frac{1}{2}z = 70$, de eerst schuldig geblevene Dukaten, en $x = \frac{364}{23}z + 3 = 367$ Dukaten de eerste schuld, waar op hij eerst $7y + 5 = 495$ Dukaten $= 297$ Dukaten, en daar na $3z = 75$ Dukaten $= 45$ Dukaten betaald heeft.

Nº. 104. Loos

J. C. VAN SETTEN, A. van der Swan, N. Bondt, P. van Eeghen, Chz., H. van Wessem, en C. J. van Brussel.

Stel de lengte van den langsten arm der balans $= r$, die des kortsten arms $= s$.

Het

(*) Het geen echter uit de wijze van de voorstelling der vraag niet volgt, welke alleen schijnt te vorderen, dat de laatst schuldig geblevene Dukaten een heel getal zijn, als wanneer uit $y = 2\frac{1}{2}z$ volgt, dat z op zijn kleinste $= 5$ genomen kan worden, als wanneer $y = 14$ en $x = 75\frac{1}{2}$ wordt. (Wet. Comm.)

Het gewigt der doos, in de schaal van den langsten arm gewogen, namelijk 100 Engels trooisch, (zijnde volgens J. H. VAN SWINDEN, *over volmaakte Maten en Gewigten*; 153,8024 grammes,) gelijk aan a grammes.

Het gewigt der doos, in de schaal van den kortsten arm gewogen, het welk 65,0185 grammes bevonden is, gelijk b grammes.

Het onbekende gewigt van de doos $= x$ grammes.

Volgens de gelijkheid der momentkragten, bij het evenwigt der balans, is, bij de eerste weging van de doos, aan de schaal van den langsten arm,

$$r \times x = s \times a$$

en bij de tweede weging, aan den kortsten arm,

$$s \times x = r \times b$$

vermenigvuldigt men deze twee vergelijkingen en deelt men het product door rs , dan is

$$x^2 = ab, \text{ en } x = \sqrt{ab}$$

en dit leert ons; *dat het ware gewigt van eenig voorwerp, aan eene valsche balans gewogen, gelijk is aan den vierkants-wortel uit het product der gewigten, welke dit voorwerp, aan elk der twee armen, gewogen heeft.*

Men heeft dan $x = \sqrt{ab} = \sqrt{153,8024 \times 65,0185} = 100$ grammes $= 6$ lood 5 engels 0,6 azen nagenoeg.

N^o. 105. Door

J. R. Schmidt, H. van Wessem, A. van der Swan, J. C. VAN SETTEN, P. van Eeghen; Chz., Moses Lemans, Rehuel Lobatto, en L. van Heusden.

Laat ABC, Fig. 93. de gegevene gelijkbeennige driehoek zijn en G het middelpunt van den ingeschrevenen cirkel. Laat de middellijn AGD getrokken worden, en uit D de tangenten DE en DF aan den ingeschrevenen cirkel, ontmoeten-

tende den omtrek des omgeschrevenen cirkels in E en F, dan zal DEF de begeerde driehoek zijn, het geen wij op de volgende wijze kunnen be-
toogen.

Dat DEF een gelijkbeenige driehoek is, blijkt klaar, omdat, daar de hoeken EDA en FDA gelijk zijn, de koorden DE en DF evenlang zijn, en wij behoeven dus alleen aan te toonen, dat de lijn EF, welke noodzakelijk parallel aan BC en dus loodregt op AD is, den kleinen cirkel zal aanraken en dus door het punt K zal gaan; dat is: wij moeten aantoonen, dat $ID = DK$ zal zijn.

Daar de Opgever te gelijker tijd vraagt de zijden van dezen nieuwen driehoek te berekenen, wanneer die van den eersten driehoek gegeven zijn, zoo stellen wij $AB = a$ en $BH = \frac{1}{2} BC = b$; dan is $AH = \sqrt{[AB^2 - BH^2]} = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Trekkende nu BD, dan is

$$AH : AB = AB : AD = \frac{AB^2}{AH} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$$

$$AH : HB = HB : HD = \frac{HB^2}{AH} = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$$

$$\text{en } DH : DB = DB : AD, \dots \dots \dots \frac{ab}{ab}$$

$$\text{dus } DB = \sqrt{AD \times DH} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$$

Laat nu BG getrokken worden, dan is $\angle BGD = \angle BAD + \angle ABG = \angle DBH + \angle GBH = \angle GBD$, zoo dat $\triangle GBD$ gelijk-

$$\text{beenig is, } DG = DB = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}, \text{ GK} =$$

$$GH = GL = GD - DH = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$$

$$- \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} = \frac{b(a - b)}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} = b\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$$

$$\text{en dus } DK = DG + GH = \frac{2ab - b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{ is.}$$

Om nu DI te berekenen hebben wij, na AE, welke parallel aan GL is, getrokken te hebben, $DE : DL = DA : DG = DA : DB = DB :$

HD ; dus $DE = \frac{BD \times DL}{HD}$; maar nu is $DL =$

$\sqrt{[DG^2 - GL^2]} = b \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$; dus DE

$= a \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$; en $AD : DE = DE : DI$,

dus $DI = \frac{DE^2}{AD} = \frac{2ab - b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$.

Daar wij deze zelfde waarde voor DK gevonden hebben, zoo volgt $DI = DK$; de lijn EF maakt dus den kleinen cirkel in I, waar door het gezegde bewezen is.

Wij hebben nu reeds $DE = DF = a \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$

voor de zijden des nieuwen driehoeks gevonden, en om de basis EF te vinden, is $EI = EL =$

$ED - DL = (a - b) \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$; derhal-

ve $EF = 2 EI = 2 (a - b) \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}}$.

I. AANMERKING. Op dezelfde wijze, als wij bewezen hebben, dat $BD = GD$ is, bewijst men ook, dat $AE = AG$ is, en bijgevolg hebben wij $AE + BD = AD$. Hieruit volgt dan eene gemakkelijke Constructie, om in eenen gegebenen cirkel twee gelijkbeenige driehoeken te beschrijven, die denzelfden ingeschrevenen cirkel hebben, zoodanig dat het middelpunt dezes ingeschreven cirkels gegeven zij? want laat G dit gegeven middelpunt zijn; dan behoeven wij, na de middellijn AGD getrokken te hebben, slechts uit en A met DG en AG als radiën, cirkelbogen

gen te beschrijven, en hier door ontstaan de punten B, C, E, F en dus de driehoeken: (*)

H. AANMERKING. In het opgegeven Voorstel geeft de Opgever $a = 13$ en $b = 5$; in dit bijzonder geval worden dan de zijden van den nieuwen driehoek:

$$DE = DF = a \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}} = \frac{13}{12} \sqrt{105}$$

$$EF = 2(a - b) \sqrt{\frac{2ab - b^2}{a^2 - b^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{105}.$$

Nº. 106. Door

Jacob de Gelder, A. van der Swan, L. van Heusden, en J. O. van Satten. (†)

Volgens de opgave, heeft het bovenwiel 57 kam-

(*) Deze Constructie heeft niet alleen plaats voor twee gelijkbenige driehoeken, maar ook voor twee driehoeken zonder onderscheid; want als er in en om eenen driehoek een cirkel beschreven is, bestaat er tuschen de stralen dezer cirkels en den afstand hunner middelpunten eene zekere betrekking, die van de hoeken en zijden des driehoeks geheel onafhankelijk is (zie DE GELDER *Metk. Analysis* §. 186. *Bladz.* 96), wanneer derhalve de omgeschrevene cirkel en het middelpunt des ingeschrevenen cirkels gegeven zijn, is de afstand der middelpunten en gevolgelyk de straal des ingeschreven cirkels bepaald; maar door deze dingen kan men geenszins den driehoek bepalen; er bestaan derhalve een oneindig aantal driehoeken, die denzelfden in en omgeschrevenen cirkel hebben. Hoe deze driehoeken gevonden of geconstrueerd kunnen worden, heeft ons medelid, BANGMA, reeds getoond, in de *Wisk. Oefeningen* I D. *Voorst.* 59. (*Wetensch. Commissie*)

(†) Leet in het Voorstel, in plaats van *spoorwiel*, benedenste schiffloop. De Heer L. VAN HEUSDEN heeft ons

kammen, de schijfloop boven aan de spil 31 staven: zoo dra de molen in beweging komt, drijven elke 31 kammen van het bovenwiel den schijfloop en bijgevolg de staande spil eens om. Om nu zich duidelijk voor te stellen, hoedanig het zich, van het oogenblik dat de molen is begonnen te malen, toedraagt, zoo laat ons de kammen van het bovenwiel, door de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, enz. 55, 56 en 57; en de staven van den schijfloop door 1, 2, 3, 4, 5, enz. 28, 29, 30 en 31-beteecken, en nemen wij aan, dat de kam 1 de staaf 1, de kam 2 de staaf 2, voortdrijft, dan drijft eindelijk de kam 31 de staaf 31, en, na dat de spil of schijfloop éénmaal is om geweest, de kam 32 wederom de staaf 1. Wanneer, men nu, aan het bovenwiel, de staven verscheidene malen rondtelt, dan ziet men duidelijk, dat de kammen, welke, bij het begin van elke volgende omwenteling van den schijfloop, de staaf 1 voortdrijven, de termen van de rekenkundige reeks 1, 32, 63, 94, 125, 156, enz. zijn; maar er zijn niet meer dan 57 kammen; derhalve, om te vinden de hoeveelste kam, bij elke volgende omwenteling, de staaf 1 voortdrijft, moet men de getallen dezer rekenkundige reeks, elk zoo menigmaal met 57 vermindern, tot dat het overblijvend getal kleiner dan 57 wordt: dit dan doende, blijkt het, dat, bij het begin der eerste, tweede, derde, en volgende omwentelingen, de staaf 1 door de kammen 1, 32, 6, 37, 11, 42, 16, 47, 21, 52, 26, 57, 31, 5, 36, 10, enz. wordt voortgedreven. Het bovenwiel en de schijfloop zullen dan voor het eerst wederom in denzelfden stand komen, als toen de molen begon te malen, wanneer voor de tweede-
maal

ons op deze verziinning, bij het overschrijven der kopij veroorzaakt, opmerkzaam gemaakt. Ook zal aan zijn verzoek voldaan worden. (Het. Cammelfte.)

maal de kam 1 de staaf 7 voortdrijft. Stel het aantal omwentelingen van het bovenwiel daar toe vereischt wordende $= p$; dan moet de $(p+1)^{\text{de}}$ term der reeks 1, 32, 63, 94, enz., dat is $1 + p \times 31$, door 57 gedeeld zijnde, één in de deeling overlaten: dit kan nu niet geschieden, ten zij p een veelvoud van 57 zij, en dus zal zulks voor de eerste maal plaats hebben, wanneer het bovenwiel zoo veel maalt is omgeweest, als er staven in den schijfloop zijn; dat is na 94 omwentelingen van het bovenwiel, en bijgevolg na 57 omwentelingen van de spil of den schijfloop.

Dit zal zich nogtans niet altijd alzoo verhouden. Stellen wij $57 = a$ en $31 = b$; dan zal $1 + p \times b$, door a gedeeld zijnde, één in de deeling moeten overlaten, dat is $\frac{p \times b}{a}$ zal een geheel getal moeten zijn. Laat nu $b = nb'$ en $a = na'$ zijn; dan zal $\frac{p \times b'n}{a'n} = \frac{pb'}{a'}$ een geheel getal moeten zijn, en hier uit volgt dan, dat wanneer a en b eenen gemeenen deeler hebben, het bovenwiel en de schijfloop voor het eerst wederom in den eersten stand zullen komen, als het bovenwiel b' maal en de schijfloop a' maal is rond geweest. Daar dan $p = a'$ is, is $pb' = a'b'$ en $a'b'n$ het kleinste gemeene veelvoud van $a'n$ en $b'n$, of van a en b en $p = \frac{a'b'n}{b'n} = \frac{a'b'n}{b}$. Hier volgt dat dezen regel. Men zoekt

het kleinste gemeen veelvoud van het getal staven en kammen en deelt hetzelfde door het aantal staven of kammen en dan zullen de quotienten te kennen geven, na hoe vele omwentelingen van het bovenwiel of den schijfloop, beide wederom voor het eerst in den oorspronkelijken stand zullen komen.

De

Deze regel is algemeen voor elke twee raderen, die onmiddellijk op elkander werken. Alzoo zal, daar er 25 staven in den benedensten schijfloop en 81 kammen in het wiel van de wateras en de getallen 25 en 81 onderling ondeelbaar zijn, de benedenste schijfloop 81 tegen het waterrad 25 maal omgaan, en, na 81 omwentelingen van den benedensten schijfloop, zullen beide raderen wederom voor het eerst in denzelfden stand komen.

Het blijkt dan: 1^o. dat, wanneer het bovenwiel 31 maal is rond geweest, de spil 57 maal is rond gegaan, en het bovenwiel en de bovenste schijfloop voor het eerst in denzelfden stand komen; 2^o. dat, wanneer de benedenste schijfloop of de staande spil 81 maal is rond geweest, het waterrad 25 maal rondgaat en alzoo deze twee laatste wielen voor het eerst in denzelfden stand komen. Om nu hier uit te vinden, wanneer alle de deelen van het loopend werk, wederom, voor het eerst, denzelfden stand verkrijgen als toen de molen begon te malen, redeneer men als volgt. Laat r een geheel getal zijn; dan zal na $31r$ omwentelingen van het bovenwiel de bovenste schijfloop $57r$ maal rondgaan, en beide wielen zullen, voor elke geheele waarde van r , wederom op nieuw denzelfden stand verkrijgen: insgelijks zal, s een geheel getal zijnde, na $81s$ omwentelingen van den benedensten schijfloop, het waterrad $25s$ maal zijn omgegaan en beide deze raderen zullen, voor elke waarde van s , ten opzichte van elkander, denzelfden stand als bij het begin der beweging verkregen hebben, om dat nu de spil met de beide schijfloopen te gelijk, als één vast ligchaam, omdraait, moeten natuurlijk r en s in geheele getallen zoodanig bepaald worden, dat $57r = 81s$, of (om dat 81 en 57 het getal 3 tot gemeenen deeler hebben) $19r = 27s$ zij: in de kleinste getallen is dan $r = 27$ en $s = 19$. Het blijkt dan hier uit: dat

dat na $31 \times 27 = 837$ omwentelingen van de as of het bovenwiel, de schijfloop $57 \times 27 = 1539$ maal omgaat; en dat, na den afloop van dit getal omgangen, het bovenwiel en de bovenste schijfloop op nieuw in denzelfden stand komen, als bij het begin der beweging; dat al verder, na $81 \times 19 = 1539$ omwentelingen van den benedensten en bijgevolg ook van den bovensten schijfloop, de wateras $25 \times 19 = 475$ maal omwentelt, en dat, na afloop van dit aantal omwentelingen, de benedenste schijfloop en het wiel aan de wateras op nieuw in denzelfden stand komen, als bij het begin der beweging; gevolgelyk gaat het bovenwiel 837 maal tegen de spil 1539, en het wiel aan de wateras 475 maal rond, en het loopend werk van den molen zal, na dit getal omwentelingen, op nieuw in denzelfden stand komen, als toen hij begon te malen.

Nu gaan volgens de vraag de wieken in één minnnt of 60 secunden 15 maal om; dus in 4 secunden eenmaal: tot 837 omgangen van het bovenwiel of de wieken wordt derhalve een tijd van $837 \text{ maal } 4 \text{ secunden} = 3348 \text{ secunden}$ dat is 55 minuten 48 secunden vereischt.

AANMERKING. Daar verscheide Leden den aard van dit vraagstuk niet duidelyk begrepen hebben, hebben wij noodig geoordeeld de Oplossing ten hunnen gevalle wat uitvoeriger mede te deelen. Wij zullen nu nog dezelve in een beknopt bestek algemeen voordragen. Zij het aantal kammen in het bovenwiel $= a$, het aantal staven in den bovensten en ondersten schijfloop respectively $= b$ en c en het aantal kammen in het waterrad $= d$. Stel, dat het bovenwiel in den tijd, noodig zijnde om alles wederom in denzelfden stand te brengen, x omwentelingen, de staande spil met de schijfloopen y omwentelingen, en het wiel aan het waterrad z omwentelingen volbren-

brenge, daar dan uit de bovenstaande betoogmatige Oplossing gebleken is, dat b maal het bovenwiel in denzelfden tijd tegen a maal de bovenste schijfloop of de spil omwentelt en in verschillende tijden de hoeveelheden van volbragte omwentelingen aan elkander evenredig zijn; zal $x : y = b : a$, of $ax = by$ zijn; om dezelfde rede zal $y : z = d : c$, of $cy = dz$ zijn. Uit deze twee vergelijkingen volgt nu $y = \frac{ax}{b} = \frac{dz}{c}$, of $acx = bdz$. Indien nu de getallen ac en bd geenen gemeenen deeler hebben, zal, in de kleinste getallen, $x = bd$, $z = ac$, en $y = \frac{ax}{b} = \frac{dz}{c} = ad$ zijn, en hier uit zal dan volgen; dat de getallen der omwentelingen van bovenwiel, staande spil en waterwiel, welke het loopend raderwerk op nieuw en voor de eerste maal, wederom in dezelfde stelling brengen, tot elkander zullen staan als het product van de staven van den bovenschijfloop met de kammen van het waterwiel, het product van de kammen van bovenwiel en waterwiel en het product van de kammen van het bovenwiel met de staven van den bovenschijfloop.

Dan, wanneer de coëfficiënten der vergelijking $acx = bdz$ eenen gemeenen deeler hebben, vindt men, door dien regel, wel een getal omwentelingen, welke het loopend werk op nieuw in denzelfden stand, als bij het begin der beweging, brengen moet, maar niet het kleinste. Men zoek, om dit kleinste getal te vinden, den gemeenen deeler der producten bd , ad en ac , door den zoo even gegeven regel gevonden, dan zullen (n die gemeene deeler zijnde,) de omwentelingen van bovenwiel spil en waterwiel respectievelijk zijn als $\frac{bd}{n}$, $\frac{ad}{n}$ en $\frac{ac}{n}$. Wij gelooven niet, dat er eeni-

eenige duisterheid meer zal overgebleven zijn, zoo dat men, na deze verklaring, het vraagstuk op meer zamengestelde werktuigen zal kunnen toepassen.

Nº. 107. Door

N. Bondt, L. C. Mazel, P. van Eeghen, Chz., C. Lantz, Jr., F. J. Méan, L. van Heusden, J. C. van Setten, R. Lobatto, Moses Lemans, H. F. Fynje, A. van der Swan, C. J. van Brusfel, en Jan Pauw.

Stel voor de termen der rekenkundige reeks, $x, x + y, x + 2y, x + 3y$ en $x + 4y$, dan is, volgens de eerste voorwaarde der vraag $\frac{x + 4y}{x + 1} = 4$. De som der twee eerste termen min 3 $= 2x + y - 3$ en de som der twee laatste termen min 5 $= 2x + 7y - 5$ zijnde, zoo is, volgens de tweede voorwaarde, $\frac{2x + 7y - 5}{2x + y - 3} = 3$. Na uit deze twee vergelijkingen de breuken weggemaakt te hebben, is

$$x + 4y = 4x + 4$$

$$2x + 7y - 5 = 6x + 3y - 3$$

en dan volgt uit de eerste vergelijking

$$y = 1 + \frac{3}{4}x$$

en uit de tweede $y = x - 1$

derhalve $x - 1 = 1 + \frac{3}{4}x$

$$4x - 4 = 4 + 3x$$

en eindelijk $x = 8$, waar uit $y = x - 1 = 7$; gevolgelyk is de gevraagde rekenkundige reeks 8, 15, 22, 29 en 36.

N^o. 108. Door

*L. C. Mazel, C. Lantz, Jr. P. van Eeghen, Chz.,
H. F. Fynje, C. J. van Brussel, Jan Pauw,
L. van Heusden, N. Bondt, F. J. Méan,
Moses Lemans, S. J. Mulder, R. Lobatto,
J. C. van Setten, en A. van der Swan.*

Blijkbaar staat hier het onbekende tot het bekende getal francs in gelijke reden, als het bekende tot het onbekende getal guldens. Dit zeker onbekende getal guldens dan $= x$ gesteld hebbende, is $x : 176,4 = 40 : x$; derhalve $x^2 = 7056$ en $x = 84$; dus 84 Francs $= 40$ Guldens en 1 Gulden $= 2$ Francs 10 Centimes.

N^o. 109 Door

C. Lantz, Jr., L. C. Mazel, C. J. van Brussel, H. F. Fynje, Moses Lemans, S. J. Mulder, N. Bondt, P. van Eeghen, Chz., A. van der Swan, J. C. van Setten, L. van Heusden, R. Lobatto, Jan Pauw, en F. J. Méan.

Stel, dat men met x zesthalven, y dertiendhalven en z Zeeuwsche Rijkdaalders de 100 guldens betalen kan; dan is vooreerst $x + y + z = 100$. Voorts heeft men, elke specie tot stuivers herleidende, $5\frac{1}{2}x + 12\frac{1}{2}y + 52z = 2000$ stuivers. Na de tweede vergelijking met 2 en de eerste met 11 vermenigvuldigd en de producten van elkander afgetrokken te hebben heeft men de vergelijking:

$$14y + 93z = 2000$$

uit welke, y afgezonderd hebbende, volgt:

$$y = 207 - 7z + \frac{2 + 5z}{14}$$

Stel, ten einde de waarden van y en z in heele

le getallen te bepalen, $\frac{2 + 5z}{14} = p$; dan wordt

$$z = 3p - \frac{p + 2}{5}; \text{ stel al verder } \frac{p + 2}{5} = q$$

dan wordt $p = 5q - 2$; derhalve $z = 14q - 6$,
 $y = -93q + 247$ en $x = 79q - 141$. Uit
 de waarde van y blijkt nu: dat q niet grooter en
 uit die van x dat q niet kleiner dan 2 kan zijn:
 er bestaat dus slechts eene oplossing in geheele
 getallen, namelijk $x = 17$ zesthalven, $y = 16$
 dertiendhalven en $z = 22$ Zeeuwsche Rijksdaal-
 ders, welke, zoo als bij de proef blijken zal, aan
 de voorwaarde der vraag voldoet.

Nº. 110. Loos

*H. F. Fynje, A. van der Swan, N. Bondt,
 J. C. van Setten, P. van Eeghen, Chz.,
 L. C. Mazel, C. J. van Brussel, Moses Le-
 mans, S. J. Mulder, C. Lantz, Jr., R.
 Lobatto, L. van Heusden, Jan Pauw, en
 F. J. Méan.*

Stel het eerste deel $= x$, dan is het tweede $=$
 $112 - x$, en het verschil $2x - 112$, of
 $112 - 2x$; derhalve moet, volgens de vraag,

$(2x - 112)^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}(112 - x) = 210$
 zijn, welke vergelijking, verder ontwikkeld zijnde,
 geven zal:

$4x^2 - 448x + 12544 - \frac{1}{2}x + 16 - \frac{1}{7}x = 210$
 en, de breuken weggemaakt hebbende,
 $952x^2 - 28224x + 790272 + 7x + 1008 - 9x = 13230$
 of eindelijk, na de gelijksoortige termen vereenigd
 te hebben:

$$252x^2 - 28226x = -778050$$

$$x^2 - \frac{28226}{252}x = -\frac{778050}{252} = -\frac{196068600}{(252)^2}$$

V 2

tel

tel bij $\left(\frac{14113}{252}\right)^2 = \dots\dots\dots \frac{199176769}{(252)^2}$

dan is $x^2 - \frac{28226}{252}x + \left(\frac{14113}{252}\right)^2 = \frac{5108169}{(252)^2}$

en hier uit den vierkants wortel trekkende, is eindelijk

$$x - \frac{14113}{252} = \pm \frac{1763}{252}$$

derhalve is $x = \frac{14113 \pm 1763}{252} = 63$ of $= 49\frac{1}{2}$

en $112 - x = 49$ of $= 62\frac{1}{2}$

welke antwoorden, bij de proef, aan de voorwaarden der vraag voldoen.

Nº. III. Door

H. F. Fynje, L. C. Mazel, C. Lantz, Jr., N. Bondt, P. van Eeghen, Chz., C. J. van Brusfel, Mozes Lemans, R. Lobatto, en L. van Heusden.

Laat, *Fig. 94*, P eenig punt in de basis zijn en laat uit dit punt P de loodlijnen PD en PE op de beenen BC en AC vallen; als mede uit het punt A de loodlijn AF op de zijde BC; dan moet bewezen worden: *dat de afstand AF gelijk is aan de som der afstanden PD en PE.*

Men trekke PG evenwijdig aan BC, dan is (zie DE GELDER, *Beg. der Meetk.* 24 St. I B.) $\angle APG = \angle ABC$, en volgens de onderstelling $= \angle PAE$; daar voorts de driehoeken APG en APE in G en E regthoekig zijn, is de hoek $PAG = \angle APC$, en daar beide driehoeken dezelfde zijde AP gemeen hebben, is (13 St. I B.) $PE = AG$. Voorts is, wegens de evenwijdigheid der lijnen, PDEG een parallelogram en volgens (1 St. III B.) $GF = PD$. De som der

lij-

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 307

lijnen AG en GF, dat is de afstand AF is dan gelijk aan de som der afstanden PD en PE. (*)

AANMERKING. Wanneer men, op het verlengde van de basis een punt p neemt, en voorts uit dit punt p de loodlijnen pd en pe op de zijde BC en AC, of op derzelver verlengde, laat vallen, dan zal men, pg evenwijdig aan BC trekkende, op dezelfde wijze betoogen: dat $pe = Ag$ is, en $pd = Fg$; waar uit dan volgt, dat $Ag = AF + Fg = AF + pd$, en blijkevol $pe - pd = AF$, en in dit geval wordt het verschil der afstanden van het punt p tot de beenen AC en BC gelijk aan den afstand van het hoekpunt des driehoeks tot een der beenen. Doch, wanneer men in aanmerking neemt, dat de afstanden der punten p in het verlengde van de basis genomen tot de zijde BC, in vergelijking van de afstanden van de punten P, in de basis zelve, tot diezelfde zijde, negatief zijn, indien de laatste positief is, dan zal men de stelling niet slechts tot punten in de basis, maar ook tot punten, buiten de basis genomen, kunnen uitspreken. Wanneer, voegt de Heer LOBATO er bij, het punt P nader bij het punt A komt, wordt PG steeds kleiner en PD grooter en valt P in A, dan wordt $PG = 0$ en $PD = AF$.

N°. 112.

(*) De Heer MAZEL merkt te regt aan, dat deze stelling in drie onderscheidene gevallen, naar dat hoek C scherp, regt of stomp is, kan betoogd worden, in het tweede geval, valt de lijn AF op AC; in het derde buiten den driehoek, op het verlengde van BC: de loop van het bewijs verandert voor het overige niets. (*Met. Comm.*)

Nº. 112. Door

Jacob de Golder, M. J. ZUIDHOF, P. van Eeghen, Chz.

Zij, Fig. 95, ABCD de ongelijkzijdige vierhoek, zijnde beschreven in eenen cirkel, wiens middellijn, uit het punt O getrokken, de lijn CE is. Men stelde $AB = a = 120$; $BC = b = 66$; $CD = c = 50$ en $AD = d = 32$ en de hoekpuntslijnen $AC = p$ en $DB = q$; dan is, wanneer men $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d) = \frac{1}{2}(120 + 66 + 50 + 32) = 134$ stelt, volgens de *Meetk. Anal. Bladz. 99. form. (6)*, $s - a = 14$; $s - b = 68$, $s - c = 84$ en $s - d = 102$ en de inhoud van den vierhoek ABCD.

$$I = \sqrt{[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]} \\ = \sqrt{[14 \cdot 68 \cdot 84 \cdot 102]} = 2856$$

Die vierhoek moet nu, volgens het voorstel, in reden van 33 tot 16 verdeeld worden, derhalve is
het grootste deel $= \frac{33}{49} \times 2856 = 1923\frac{3}{4}$
het kleinste deel $= \frac{16}{49} \times 2856 = 932\frac{1}{4}$
en de inhouden dezer deelen zijn gevolgelyk bekend.

Het blijkt, uit de beschouwing der Figuur, dat het mogelijk kan zijn, de begeerde deellijn EM op tweeërlei wijze te trekken; want, indien de inhoud van den driehoek BCF grooter dan de inhoud van het kleinste deel $932\frac{1}{4}$ is, dan zal de deellijn EHNM ter regterhand van de middellijn EC vallen en het zal als dan mogelijk zijn, nog eene andere deellijn EH'N'M' te trekken, welke den vierhoek in dezelfde reden verdeelt, zullende, in het eerste geval, $HBN : HNCDAH = 16 : 33$ en in het tweede geval, $BCN'H' : H'N'DA = 33 : 16$ zijn, welke beide oplossingen, aangezien in het voorstel niet bepaald wordt, in welk eene rangorde de deelen tot elkander de ge-

gegevene reden moeten hebben, (indien namelijk beide oplossingen mogelijk zijn) even goed aan de voorwaarden der vraag zullen voldoen. (*)

Om zulks nu te beoordeelen en in beide gevallen tot eene oplossing te komen, zal het vooraf noodig zijn, na te gaan, welke lijnen en hoeken in de figuur gegeven zijn.

Volgens *form. (11) Bladz. 100. Meetk. Anal.* is, wanneer men in dezelve $a + b + c - d = a + b + c + d - 2d = 2(s - d)$;
 $a + b - c + d = 2(s - c)$; $a - b + c + d = 2(s - b)$ en $-a + b + c + d = 2(s - a)$ stelt, als wanneer $(a + b + c - d) \times (a + b - c + d) \times (a - b + c + d) \times (-a + b + c + d) = 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) = 16$ ll wordt,

$$CE = \frac{\sqrt{[(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)]}}{2}$$

Maar nu is gegeven $ac + bd = 120 \times 50 + 66 \times 32 = 8112$; $ad + bc = 7140$ en $ab + cd = 9520$ en men heeft gevolgelijk:

$$CE = \frac{\sqrt{(8112 \times 7140 \times 9520)}}{2 \times 2856} = 130$$

eindelijk vindt men, volgens *form. (7) en (8)*, aldaar voorkomende,

$$p = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{(ab + cd)}} = \sqrt{\frac{7140 \times 8112}{9520}} = 78$$

$$q = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{(ad + bc)}} = \sqrt{\frac{9520 \times 8112}{7140}} = 104$$

Wanneer men nu verder de lijnen BE en AE trekt,

(*) De Heer VAN EEGHEN heeft het vraagstuk in de eerste en de Heer ZUIDHOF in de tweede meening opgelost: de eerste heeft nogtans niet verzuimd die aanmerking te maken, ofschoon bij de oplossing van ZUIDHOF, welke van achteren blijkt de meening van MEISZNER geweest te zijn, niet heeft uitgewerkt. (*Wet. Comm.*)

trekt, zal uit de regthoekige driehoeken CBE en CAE volgen:

$$BE = \sqrt{(CE^2 - BC^2)} = 112, AE = \sqrt{(CE^2 - AC^2)} = 104$$

Omdat de koorden eens cirkels, door zijne middellijn gedeeld zijnde, gelijk zijn aan de sinus-ten der hoeken, welke aan den omtrek op die koorden staan, zoo heeft men:

$$\sin. ABC = AC:CE = 78:130 = \frac{3}{5}$$

$$\cos. ABC = AE:CE = 104:130 = \frac{4}{5} (*)$$

$$\sin. DCB = BD:CE = 104:130 = \frac{4}{5}$$

$$\cos. DCB = \sqrt{(1 - \frac{16}{25})} = \frac{3}{5}$$

$$\sin. BCE = BE:CE = 112:130 = \frac{56}{65} = \cos. BEC$$

$$\cos. BCE = BC:CE = 66:130 = \frac{33}{65} = \sin. BEC$$

en volgens de bekende formule is $\sin. BFC =$

$$\sin. (ABC + BCE) = \sin. ABC \times \cos. BCE +$$

$$\sin. BCE \times \cos. ABC = \frac{3}{5} \times \frac{33}{65} + \frac{56}{65} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{323}{325} \text{ en hier uit } \cos. BFC = \frac{30}{325}. \text{ Voorts is}$$

$$\sin. DCE = \sin. [DCB - ECB] = \frac{4}{5} \times \frac{33}{65} + \frac{3}{5}$$

$$\times \frac{56}{65} = \frac{12}{13} \text{ en } \cos. DCE = \frac{5}{13}.$$

Met deze bekende hoeken kunnen nu de lijnen CF, BF en AF gevonden worden. In den driehoek BCF is $\sin. BFC : \sin. ABC = BC : CF = \frac{30}{325} : \frac{3}{5}$ en $\sin. BFC : \sin. BCF = BC : BF = \frac{30}{325} : \frac{12}{13}$; waaruit dan volgt: $AF = AB - BF = \frac{2028}{325}$ en $EF = EC - CF = \frac{2912}{325}$.

Deze lijnen bekend zijnde, vindt men: $\text{Inh. BCF} = \frac{1}{2} BC \times BF \times \sin. ABC = \frac{1}{2} \times 66 \times \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = 1132\frac{268}{325}$; $\text{Inh. ADCF} = 2856 - 1132\frac{268}{325} = 1723\frac{55}{325}$.

Vermits nu de driehoek BCF $\approx 1132\frac{268}{325} > 932\frac{4}{5}$ is, blijkt het, dat, zoo wel ter regter als ter linkerhand van EC, eene lijn EM of EM' kan getrokken worden, welke den gegebenen vierhoek in de gegebene reden verdeelt. Elk dezer twee mogelijke gevallen moet derhalve afzonderlijk onderzocht worden.

I.

(*) Want hoek ABC = hoek AEC zijnde, zoo is, wegens den rechten hoek CAE, $\sin. ACE = \cos. AEC = \cos. ABC$.

I. Stel, om het vraagstuk in het eerste geval op te lossen, hoek $ABC = \alpha$, $ABE = \beta$ en $BEM = \phi$; dan heeft men in den driehoek BEN ,
 $\sin. BEN : \cos. BEN = \sin. \phi : \cos. \phi = BE : BN$
 en $BN = 112 \times \sin. \phi : \cos. \phi$

$\sin. BHE$, of $\sin. (BEH + ABE) : \sin. BEF = BE : BH$
 of $\sin. (\phi + \beta) : \sin. \phi = 112 : BH$

$BH = 112 \times \sin. \phi : \sin. (\phi + \beta)$

Nu is, (volgens de IX Stell. IX B.) $\text{Inh. BHN} = \frac{1}{2} \sin. ABC \times BH \times BN = \frac{1}{2} \sin. \alpha \times 112^2 \times \frac{\sin. \phi}{\cos. \phi} \times \frac{\sin. \phi}{\sin. (\phi + \beta)}$ en wij hebben derhalve (zie boven) de vergelijking,

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times 112^2 \times \frac{\sin^2 \phi}{\sin. (\phi + \beta) \times \cos. \phi} = \frac{6528}{7} \dots (A)$$

Stellende in deze vergelijking $\sin. (\phi + \beta) = \sin. \phi \times \cos. \beta + \cos. \phi \times \sin. \beta$ en $\sin. \beta = \sin. ABE = \sin. ACE = 104 : 130 = \frac{4}{5}$ en $\cos. \beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$, dan verandert zij in:

$343 \sin^4 \phi = 51 \sin. \phi \cos. \phi + 68 \cos^2 \phi \dots (B)$
 en stelt men nu in deze $\cos. \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi}$, dan heeft men, na het wortel-teeken weggemaakt te hebben:

$171522 \sin^4 \phi - 58497 \sin^2 \phi = -4624 \dots (*)$
 en hier uit volgt dan eindelijk:

$\sin.$

(*) Deze vierde magts-vergelijking van de tweede magts vorm kan hier ontweken worden. Men stelle in (A) $2 \sin. \phi \cos. \phi = \sin. 2\phi$; $2 \sin^2 \phi = 1 - \cos. 2\phi$ en $2 \cos^2 \phi = 1 + \cos. 2\phi$, dan verkrijgt (A) deze gedaante $411 \cos. 2\phi + 51 \sin. 2\phi = 275$; waaruit, $\cos. 2\phi = \sqrt{1 - \sin. 2\phi}$ stellende, volgt:

$$\sin. 2\phi = \frac{9350 \pm 274 \sqrt{95897}}{12 \times 9529}$$

zijnde in deze alleen het teeken + in ons geval toepasselijk.

V 5

Men

$$\sin. \phi = \pm \sqrt{\frac{19499 \pm 17 \sqrt{95897}}{12 \times 9529}}$$

Men heeft alzoo vier waarden voor $\sin. \phi$, welke alle, zonder onderscheid, aan de eindvergelijking (B) voldoen; echter kan die waarde van $\sin. \phi$, welke aan (A) voldoet, in den bepaalden zin, waarin het voorstel voorkomt, hier alleen gelden; deze blijkt bij beproeving te zijn:

$$\sin. \phi = \sqrt{\frac{19499 + 17 \sqrt{95897}}{12 \times 9529}} = \sin. \text{BEM}$$

$$\cos. \phi = \sqrt{\frac{94849 - 17 \sqrt{95897}}{12 \times 9529}} = \cos. \text{BEM}$$

Men zal nu de lengte der gevraagde deellijn gemakkelijk vinden; want, in den regthoekigen driehoek ECM is $EM = CE \times \cos. \text{CEM} = CE \times \cos. (\text{CEB} - \text{MEB})$, of $\text{CEB} = \gamma$ stellende, $= CE \times (\cos. \gamma \cdot \cos. \phi + \sin. \gamma \cdot \sin. \phi)$, in welke slechts de bekende waarden van CE, γ en ϕ behoeven overgebracht te worden, om EM te vinden; maar, om deze uitdrukking eenvoudiger te maken, verheffe men de laatste vergelijking tot de tweede magt, dan zal, daar $EC = 120$, $\cos. \gamma = \frac{56}{83}$, $\sin. \gamma = \frac{33}{83}$ en $\cos. \phi \cdot \sin. \phi = \frac{1}{2} \sin. 2\phi$ is, de vergelijking worden:

$EM^2 = 12544 \cos^2. \phi + 7392 \sin. 2\phi + 4356 \sin^2. \phi$
 en in deze de waarden van $\cos^2. \phi$, $\sin. 2\phi$ en $\sin^2. \phi$ overbrengende,

$$EM = \sqrt{\frac{320408755 + 471553 \sqrt{95897}}{28587}}$$

of $EM = 127,74$ nagenoeg.

II. Zij

Men kan ook nog, op de wijze, in de noot, op *Bladz. 83* hier boven verklaard, deze vergelijking tot de eerste magt brengen. Wij honden ons nograns aan de vergelijking in den text uitgebragt, ten einde alles, overtienkomstig deze soort van vragen, in wortel-uitdrukkingen te verkrijgen. (DE GELDER.)

II. Zij $EH'N'M'$ de lijn, welke, op de tweede wijze, den vierhoek $ABCD$ zoodanig verdeelt, dat $BCN'H' : H'N'DA = 33 : 16$ zij; dan is (zie boven) $ADH'N' = 932\frac{4}{7}$; maar $ADCF = 1723\frac{55}{13}$ zijnde, (zie boven) is $CFN'H' = ADCF - ADN'H' = 1723\frac{55}{13} - 932\frac{4}{7} = 790\frac{1354}{287}$. Men moet derhalve de lijn $EH'N'M'$ zoodanig trekken, dat de inhoud van den vierhoek $CFN'H'$ gegeven en gelijk $790\frac{1354}{287}$ zij.

Stel de bekende hoeken $EFH' = \delta$ en $ECD = \epsilon$ en den onbekenden hoek $CEM' = \psi$; dan heeft men in den driehoek EFH' , de evenredigheid:

$$\sin.(\delta + \psi) : \sin. \delta = EF : EH' = EF \times \frac{\sin. \delta}{\sin.(\delta + \psi)}$$

$$Inh. EFH' = \frac{1}{2} FE^2 \times \frac{\sin. \delta \times \sin. \psi}{\sin.(\delta + \psi)}$$

en in den driehoek ECN' is

$$\sin.(\epsilon + \psi) : \sin. \epsilon = EC : EN' = EC \times \frac{\sin. \epsilon}{\sin.(\epsilon + \psi)}$$

$$Inh. ECN' = \frac{1}{2} CE^2 \times \frac{\sin. \epsilon \times \sin. \psi}{\sin.(\epsilon + \psi)}$$

Omdat nu $Inh. ECN' - Inh. EFH' = Inh. FCN'H' = 790\frac{1354}{287}$ (zie boven) gegeven is, zoo zullen wij, dien bekenden inhoud $= M$ stellende, hebben:

$$\frac{1}{2} \times \left[CE^2 \times \frac{\sin. \epsilon}{\sin.(\epsilon + \psi)} - EF^2 \times \frac{\sin. \delta}{\sin.(\delta + \psi)} \right] \times \sin. \psi = M$$

in welke vergelijking alles, behalve de hoek ψ , bekend is.

Om deze vergelijking op te lossen, vermenigvuldige men dezelve met $\sin.(\epsilon + \psi) \times \sin.(\delta + \psi)$; dan is

$$\left\{ +\frac{1}{2} CE^2 \times \sin. \epsilon \times \sin. \psi \times \sin.(\delta + \psi) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} EF^2 \times \sin. \delta \times \sin. \psi \times \sin.(\epsilon + \psi) \right\} = \dots \\ \dots M \times \sin.(\delta + \psi) \times \sin.(\epsilon + \psi)$$

welke laatste vergelijking, (wanneer men de waarden van $\sin.(\delta + \psi)$ en van $\sin.(\epsilon + \psi)$ naar

naar de bekende formules ontwikkelt, en daar na korthedshalve,

$$A = \frac{1}{2} CE^2 \sin. \delta \sin. \epsilon - \frac{1}{2} EF^2 \sin. \delta \sin. \epsilon - M \dots \dots \dots (\sin. \delta \cos. \epsilon + \cos. \delta \sin. \epsilon)$$

$$B = \frac{1}{2} CE^2 \cos. \delta \sin. \epsilon - \frac{1}{2} EF^2 \sin. \delta \sin. \epsilon - M \cos. \delta \cos. \epsilon$$

$$\text{en } C = M \sin. \delta \sin. \epsilon$$

stelt, in deze zal veranderen:

$$A \cos. \psi \sin. \psi + B \sin^2. \psi - C \cos^2. \psi = 0$$

Vermits de driehoek ECM' in M' regthoekig is, is de deellijn EM' = EC x Cos. ψ ; men moet derhalve uit deze vergelijking Cos. ψ onmiddellijk zoeken. Stellen wij daarom Sin. ψ = $\sqrt{1 - \cos^2. \psi}$; dan is,

$$A \cos. \psi \sqrt{1 - \cos^2. \psi} = -B + (B + C) \cos^2. \psi$$

deze in het vierkant brengende, om het wortelteeken weg te maken, heeft men:

$$(A^2 + B^2 + C^2 + 2BC) \cos^4. \psi - (A^2 + 2B^2 + 2BC) \dots \dots \dots \cos^2. \psi + B^2 = 0$$

welker oplossing eindelijk geven zal:

$$\cos. \psi = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{2}A^2 + B^2 + BC \pm A\sqrt{(\frac{1}{2}A^2 + BC)}}{A^2 + B^2 + C^2 + 2BC}} \quad (*)$$

Daar

(*) Wanneer men slechts den hoek ψ nodig had te kennen, zou onze eindvergelijking gemakkelijker op te lossen zijn; want deelt men dezelve door Cos² ψ , dan wordt zij:

$$B \times \text{Tang}^2. \psi + A \times \text{Tang}. \psi - C = 0$$

of deelt men door Sin² ψ , dan wordt zij,

$$C \times \cos^2. \psi - A \times \cos. \psi - B = 0$$

$$\text{en dan wordt } \text{Tang}. \psi = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4BC}}{2B}$$

$$\text{of } \cos. \psi = \frac{+A \pm \sqrt{A^2 + 4BC}}{2C} \quad (\text{zijnde zoo})$$

$$\text{als het behoort } \text{Tang}. \psi \times \cos. \psi = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4BC}}{2B} \times$$

$$\frac{+A \pm \sqrt{A^2 + 4BC}}{2C} = 1). \text{ Maar, daar men,}$$

ten

Daar nu in den regthoekigen driehoek ECM' de zijde EM' = EC x Cos. ψ is, zoo is alles bekend en wij hebben, in ons tweede geval, voor de deellijn des vierhoeks,

$$EM' = \pm CE \times \sqrt{\frac{\frac{1}{2}A^2 + B^2 + BC \pm A\sqrt{\frac{1}{2}A^2 + BC}}{A^2 + B^2 + C^2 + 2BC}} \quad (7)$$

In getallen is gegeven: (*) CE = 130; EF = $\frac{29120}{313}$; M = $\frac{1787544}{2101}$; Sin. ϵ = $\frac{12}{13}$; Cos. ϵ = $\frac{5}{13}$; Sin. δ = Sin. (BCE + ABC) = Sin. BCE Cos. ABC + Sin. ABC Cos. BCE = $\frac{56}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{31}{13} = \frac{323}{169}$ en Cos. δ = $\sqrt{1 - \text{Sin}^2 \delta}$ = $\frac{36}{169}$. Met deze gegevens vindt men verder,

$$A = \frac{1}{2} CE^2 \text{Sin. } \delta \text{ Sin. } \epsilon - \frac{1}{2} EF^2 \text{Sin. } \delta \text{ Sin. } \epsilon - M (\text{Sin. } \delta \text{ Cos. } \epsilon + \text{Sin. } \epsilon \text{ Cos. } \delta) = \frac{1}{2} \times$$

ten einde de deellijn EM' te vinden de waarde van Cos. ψ noodig heeft, is het beter Cos. ψ onmiddellijk te zoeken, daar men toch deze laatste uit Tang. ψ , niet zonder eenigen omslag vinden kan. Men heeft namelijk

$$\begin{aligned} \text{Sec}^2 \psi &= 1 + \text{Tang}^2 \psi = 1 + \left(\frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4BC}}{2B} \right)^2 \\ &= \frac{2A^2 + 4B^2 + 4BC \pm 2A\sqrt{A^2 + 4BC}}{4B^2}; \end{aligned}$$

$$\text{Cos}^2 \psi = \frac{1}{1 + \text{Tang}^2 \psi} = \dots$$

$\frac{2A^2 + 4B^2 + 4BC \pm 2A\sqrt{A^2 + 4BC}}{4B^2}$. Men vermenigvuldige teller en noemer met $2A^2 + 4B^2 + 4BC \mp 2A\sqrt{A^2 + 4BC}$, dan verkrijgt men voor de waarde van Cos. ψ dezelfde uitdrukking als in den text. (DE GELDER).

(*) Men kan deze formule wel gemakkelijker door de Logarithmen berekenen; doch dit is de eisch van voortgelijke kunstige vragen niet, welke de eigenlijke precise wortel-uitdrukkingen vorderen; en een Wiskundige behoort ook in die soort van werk bedreven te zijn. (DE GELDER.)

$$\frac{1}{2} \times 130 \times 180 \times \frac{323}{325} \times \frac{12}{13} - \frac{1}{2} \times \frac{29120}{325} \times \frac{323}{325} \times \frac{12}{13} - \frac{1787544}{2205} \times \left(\frac{323}{325} \times \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \times \frac{36}{325} \right)$$

$$= + \frac{34778696832}{7 \times 323 \times 4225}$$

$$B = \frac{1}{2} CE^2 \cos. \delta \sin. \epsilon - \frac{1}{2} EF^2 \sin. \delta \cos. \epsilon -$$

$$M \cos. \delta \cos. \epsilon = \frac{1}{2} \times 130 \times 130 \times \frac{12}{13} \times \frac{36}{325}$$

$$- \frac{1}{2} \times \frac{29120}{325} \times \frac{29120}{325} \times \frac{323}{325} \times \frac{5}{13} - \frac{1787544}{2205} \times \frac{5}{13} \times \frac{36}{325}$$

$$= - \frac{6907755520}{7 \times 323 \times 4225}$$

$$C = M \sin. \delta \sin. \epsilon = \frac{1787544}{2205} \times \frac{12}{13} \times \frac{323}{325}$$

$$= + \frac{6928520544}{7 \times 323 \times 4225}$$

Stelt men nu, dat A, B en C gemeene deeler hebben, te weten $A = na$, $B = nb$ en $C = nc$, dan zal men in de vergelijking (q) voor A, B en C respectivelijk a , b en c kunnen nemen. In geheele getallen is, na de noemers der breuken weggelaten en de tellers door 32, 17 en 19 gedeeld te hebben,

$$A = + 3364812 = + 4 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 293$$

$$B = - 668320 = - 32 \cdot 5 \cdot 4177$$

$$C = + 670329 = + 27 \cdot 11 \cdot 87 \cdot 61$$

en nu zijn A, B en C, als geene gemeene deeler meer hebbende, tot derzelver kleinste evenredige waarden gebragt en deze mag men nu in de formule (q) voor A, B en C zelve nemen. Deze waarden dan alzoo nemende, is

$$A^2 = + 11321959795344$$

$$B^2 = + 446651622400$$

$$C^2 = + 449340968241$$

$$BC = - 447994277280$$

en dan wordt,

$$\frac{1}{2} A^2 + B^2 + BC = + 13 \cdot 13 \cdot 33488977768$$

$$A \sqrt{\frac{1}{2} A^2 + BC} = + 13 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3364812 \sqrt{47289}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2BC = + 5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 5856537$$

Het blijkt hier uit: dat het gebroken, onder het wortel-teeken in de vergelijking (q), door

13 × 13 verkleinbaar is: men verkrijgt, na de verkleining, voor de lengte van de deellijn $EM' =$

$$\pm 130 \sqrt{\frac{33488277768 \pm 141322104 \sqrt{47289}}{5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 15856537}}$$

dan, indien men het getal 130 onder het wortel-teeken brengt, dan verkrijgt men voor de gevraagde deellijn deze meer eenvoudige uitdrukking:

$$EM' = \sqrt{\frac{133955911072 + 565288416 \sqrt{47289}}{15856537}}$$

welke wij ten aanzien van de teekens, aldus aannemen; omdat, daar de deellijn EM' behalve dat zij positief zijn moet, natuurlijk kleiner dan de middellijn GE en groter dan EA is, geen ander dan die wortel met de bijzondere omstandigheden van het werkstuk kan bestaan. In de Logarithmen werkeinde vindt men $EM' = 127,2812$ nagenoeg.

AANMERKING. In deze oplossing hebben wij van de goniometrische formules gebruik gemaakt: hoe veel sietlijker en vloeijender daardoor de oplossing van de meeste Meerkundige Werkstukken wordt, zullen zij, die onze Meerkundige Analyse bestuderen, bij de ondervinding leeren kennen; echter moet men andere wegen, die tot de oplossing kunnen leiden, niet verzuimen: elke handelwijze heeft, in vele gevallen, haar eigen voordeel. Wij zullen daarom de oplossing van ons ijverig Medelid van verdienste den Heer **ZUIDHOF** hier bijvoegen.

ANDERS, door M. J. **ZUIDHOF**.

1°. Zij *Fig. 96*, $ABCD$ de gegeven vierhoek, EF de begeerde deellijn; verklein de gegevene zijden met 2; dan is $AB = 60$; $BC = 33$; $CD = 25$; $DA = 16$ en de inhoud wordt dan,

ge

gelijk in de voorgaande oplossing, gevonden = 714 te zijn: deze inhoud in reden van 33 tot 16 verdeelende, verkrijgt men: BCGH = $480\frac{6}{7}$ en ADGH = $232\frac{1}{7}$.

2°. Om de diagonalen AC en BD, die elkander in I snijden, te vinden, zoo stelle men DI = x ; dan is, in de gelijkvormige driehoeken ADI en BCI, en in DIC en AIB:

$$AD:DI=BC:CI, \text{ of } 16:x=33:CI=\frac{33x}{16}.$$

$$CD:DI=AB:AI, \text{ of } 25:x=60:AI=\frac{12x}{5}.$$

$$AD:AI=BC:BI, \text{ of } 16:\frac{12x}{5}=33:BI=\frac{99x}{20}.$$

$$\text{Nu is } AC = CI + AI = \frac{33x}{16} + \frac{12x}{5} =$$

$$\frac{357x}{80} \text{ en } BD = DI + BI = x + \frac{99x}{20} = \frac{119x}{20},$$

wanneer dan x bekend is, zijn de diagonalen bekend: maar nu is (zie DE GELDER'S, *Beg. der Meetk.* XXVIII. St. V. B.) $AC \times BD = AD \times BC + AB \times CD$, dat is:

$$\frac{357x}{80} \times \frac{119x}{20} = 16 \times 33 + 60 \times 25 = 2028$$

$$\text{hier uit vindt men } x = \frac{80}{119}, \text{ en verder } AC = \frac{357x}{80} = 39 \text{ en } BD = \frac{119x}{20} = 52.$$

3°. Om de middellijn des cirkels te vinden, redenere men aldus. Men trekke de loodlijn CK, dan, is in den driehoek ABC, (XVIII St. III B.)

$$BK = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB} = \dots\dots$$

$$\dots\dots \frac{60 \times 60 + 33 \times 33 - 39 \times 39}{120} = 26\frac{2}{3}$$

$$CK = \sqrt{[BC^2 - BK^2]} = \sqrt{[33 \times 33 - 26\frac{2}{3} \times 26\frac{2}{3}]} = 9\frac{1}{2}$$

Indien men nu AE trekt, dan is $\angle AEC =$
 \angle

$\angle ABC$ en de regthoekige driehoeken CBK en CEA zijn gelijkvormig; derhalve $CK : BC = AC : CE$, of $19\frac{1}{2} : 33 = 39 : CE = 65 =$ de middellijn.

4°. Men trekke de lijn DL loodrecht op AB , voorts BE en DE , dan is wederom in den driehoek ABD ,

$$AL = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 AB} = 9\frac{1}{2}; DE = \sqrt{(AD^2 - AL^2)} = 12\frac{1}{2}$$

en eindelijk, in de regthoekige driehoeken CAE , CDE en CBE , $AE = \sqrt{(CE^2 - AC^2)} = 52$; $DE = \sqrt{(CE^2 - CD^2)} = 60$ en $BE = \sqrt{(CE^2 - BC^2)} = 56$.

5°. Men trekke de lijnen CF en DF , en stelde de begeerde deellijn $EF = a$, $CF = b$ en $FG = y$; dan is,

$$EF \times CD = EC \times DF + DE \times CF$$

$$25a = \frac{25a - 60b}{65} = \frac{5a - 12b}{13}$$

voorts is, in de gelijkvormige driehoeken, CFG en DGE ; en in DFG en CGE :

$$CF : FG = DE : DG, \text{ of } b : y = 60 : DG = \frac{60y}{b}$$

$$FD : FG = CE : GC, \text{ of } \frac{5a - 12b}{13} : y = 65 : GC = \frac{845y}{5a - 12b}$$

$$\text{derh. } DG + GC = \frac{(300a + 125b)y}{5ab - 12b^2} = 25 = DC.$$

Deze vergelijking oplosfende, vindt men:

$$y = \frac{5ab - 12b^2}{12a + 5b} = FG$$

$$a - y = \frac{12a^2 + 12b^2}{12a + 5b} = GE$$

$$\frac{60y}{b} = \frac{300a - 720b}{12a + 5b} = DG$$

6°. Men trekke de lijn BF , dan is in den vierhoek $BCFC$, volgens de reeds aangehaalde eigenschap:

X

EC

$$EC \times BF = BE \times CF + EF \times BC$$

$$65 \times BF = 56b + 33a$$

$$BF = \frac{56b + 33a}{65}$$

7°. Men trekke nog de diagonaal AF, dan is in den vierhoek ADFC, als boven:

$$AF \times DE = AD \times EF + DF \times AE$$

$$60 \times AF = 60a + \frac{5a - 12b}{13} \times 52$$

$$AF = \frac{3a - 4b}{5}$$

8°. Men vindt de deelen der diagonalen AB en EF van den vierhoek ABFE op deze wijze. Men stelle $FH = z$; dan geven de gelijkvormige driehoeken BHF en EHA benevens AFH en EBH de volgende evenredigheden:

$$BF : FH = AE : AH = \frac{3380z}{33a + 56b}$$

$$AF : FH = BE : BH = \frac{280z}{3a - 4b}$$

$$BA = BH + AH = \frac{(19380a + 2160b)z}{99a^2 + 36ab - 224b^2} = 60$$

de oplossing dezer vergelijking geeft dan:

$$z = \frac{99a^2 + 36ab - 224b^2}{323a + 36b} = FH$$

$$\frac{3380z}{33a + 56b} = \frac{10140a - 13520b}{323a + 36b} = AH$$

$$FH - FG = \frac{1188a^3 - 688a^2b + 1188ab^2 - 688b^3}{3876a^3 + 2047ab + 180b^2} = GH$$

9°. Men late, uit het punt H, de loodlijn HM op CD vallen; dan zijn, aangezien CDE een rechte hoek is, de driehoeken EDG en HMG gelijkvormig en daarom is,

$$GE : DE = GM : HM$$

$$\frac{12a^2 + 12b^2}{12a + 5b} : 60 = \frac{(1188a - 688b) \times (a + b^2)}{(323a + 36b) \times (12a + 5b)} : \frac{HM}{HM}$$

$$HM = \frac{5940a - 3440b}{323a + 36b}$$

10°. Eindelijk is *vierhoek* ADGH = *drieh.* HGD + *drieh.* ADH = $\frac{1}{2}$ HM × GD + $\frac{1}{2}$ DL × HA : dat is, voor HM, GD, DL en AH de waarden, boven gevonden, in plaats stellende en onder het oog houdende, dat *vierh.* ADGH = 1632:7 is,

$$\frac{150a - 360b}{12a + 5b} \times \frac{5940a - 3440b}{323a + 36b} + \dots$$

$$\dots 12\frac{1}{3} \times \frac{10140a - 13520b}{323a + 36b} = \frac{1632}{7}.$$

Men ontwikkele deze vergelijking, dan zal men vinden:

$$670329a^2 + 668320b^2 = 3364812ab.$$

Stelt men in deze laatste, omdat $CF^2 = CE^2 - EF^2$ is, $b = \sqrt{(4225 - a^2)}$, dan zal men, na het wortel-teeken weggemaakt, en de termen der eindvergelijking door 714025 gedeeld te hebben, vinden:

$$15856537a^4 - 66977955536a^2 + 11166290560000 = 0$$

Hier uit de waarde van a gezogt en deze met den deeler 2, waarmede de zijden verkleind waren, vermenigvuldigd hebbende, vindt men voor de waarde van de deellijn EF,

$$\sqrt{\frac{133955911072 + \sqrt{15111246920451320669184}}{15856537}}$$

hetwelk met de eerste oplossing overeenkomt.

Nº. 113. Door

M. J. ZUIDHOR, *Moses Lemans*, N. Bondt,
P. van Eeghen, Chz., en Rehuel Lobatto.

Zij, *Fig. 97*, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$,
dan is $\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;
 $\sin B = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\cos B = \frac{1}{2}$ en $\sin C =$
 $\sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \times \cos 60^\circ +$
 $\times 2$ $\sin 60^\circ$

$\sin. 60^\circ \times \cos. 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3})$
 $= \frac{1}{4} \sqrt{2} + \frac{1}{4} \sqrt{6}$. Stel de grootste zijde AC
 $= x + 2 \sqrt{3} - \sqrt{2}$; dan is de kleinste zijde
 $BC = x - 2 \sqrt{3} + \sqrt{2}$, en nu heeft men:

$$\sin. B : \sin. A = AC : BC$$

dat is, in stekkundige waarden,

$$\frac{1}{2} \sqrt{3} : \frac{1}{2} \sqrt{2} = x + 2 \sqrt{3} - \sqrt{2} : x - 2 \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} : \sqrt{2} = x + 2 \sqrt{3} - \sqrt{2} : x - 2 \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x \sqrt{3} - 6 + \sqrt{6} = x \sqrt{2} + 2 \sqrt{6} - 2$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) x = \sqrt{6} + 4$$

$$x = \frac{\sqrt{6} + 4}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + 4) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{1} = 7 \sqrt{2} + 6 \sqrt{3}$$

men heeft dan verder:

$$AC = x + 2 \sqrt{3} - \sqrt{2} = 6 \sqrt{2} + 8 \sqrt{3}$$

$$BC = x - 2 \sqrt{3} + \sqrt{2} = 8 \sqrt{2} + 4 \sqrt{3}$$

eindelijk is, door de bekende eigenschap des driehoeks,

$$\sin. A : \sin. C = BC : AB$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} : \frac{1}{4} \sqrt{2} + \frac{1}{4} \sqrt{6} = 8 \sqrt{2} + 4 \sqrt{3} : AB$$

of, vermenigvuldigende de termen der eerste rede met $\sqrt{2}$,

$$1 : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} = 8 \sqrt{2} + 4 \sqrt{3} : AB$$

$$AB = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) (8 \sqrt{2} + 4 \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3}) (4 \sqrt{2} + 2 \sqrt{3})$$

$$\text{of } AB = 6 + 4 \sqrt{2} + 2 \sqrt{3} + 4 \sqrt{6}.$$

ANDERS, door C. Lantz, Jr., C. J. van Brussel, J. C. van Setten, en A. van der Swan.

Indien (Fig. 97.) in den driehoek ABC hoek A = 45° en hoek B = 60° is, trekke men de loodlijn CD. Men stelde BD = x ; dan is BC = $2x$ en CD = AD = $\sqrt{(BC^2 - BD^2)} = \sqrt{(4x^2 - x^2)} = x \sqrt{3}$ en verder AC = $\sqrt{2}$ AD = $x \sqrt{6}$; nu is AC - BC = $x \sqrt{6} - 2x = 4 \sqrt{3} - 2 \sqrt{2}$; derhalve,

$$x = \frac{4 \sqrt{3} - 2 \sqrt{2}}{\sqrt{6} - 2} = \frac{(4 \sqrt{3} - 2 \sqrt{2}) \times (\sqrt{6} + 2)}{2} = 4 \sqrt{2} + 2 \sqrt{3}$$

BC

$$\begin{aligned} BC &= 2x = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \\ AC &= x\sqrt{6} = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{3} \\ AB &= x + x\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

N^o. 114. Door

M. J. ZUIDHOF, P. van Eeghen, Chz., Rehuel Lobatto, Jan Pauw, en Mozes Lemans.

Stel, dat hij terstond betaalt $2x$ Gl. dan betaalt hij twee maanden later $2x + 100$ Gl. voorts nog twee maanden later, dat is, na vier maanden, $x + 50$ Gl. hij heeft dus in alles $5x + 150$ Gl. betaald en daar de geheele schuld 1200 Gl. is, blijft er nog $1200 - (5x + 150)$, dat is $1050 - 5x$ Gl. te betalen; deze laatste som kan hij nu, wegens het te vroeg betalen der eerste termijnen, $17\frac{1}{8}$ maand boven den bepaalden tijd houden: het is dus even zoo goed, als of hij dezelve in $7\frac{1}{2} + 17\frac{1}{8} = 24\frac{2}{3}$ maand eerst betalen moet. Volgens den algemeenen grondregel voor de Tijdrekening van betaling is dan:

$$\frac{2x \times 0 + (2x + 100)2 + (x + 50)4 + (1050 - 5x)24\frac{2}{3}}{1200} = 7\frac{1}{2}$$

$$4x + 200 + 4x + 200 + 25900 - 123\frac{1}{3}x = 9000$$

$$115\frac{1}{3}x = 17300$$

$$x = 150$$

Derh. $2x = 300$ Gl. kontant betaald

$2x + 100 = 400$ Gl. over twee maanden

$x + 50 = 200$ Gl. nog twee maanden later

$1050 - 5x = 300$ Gl. de rest.

N^o. 115. Door

C. J. van Brusfel, M. J. ZUIDHOF, en P. van Eeghen, Chz.

Volgens de noot, door de Wetenschappelijke
X 3 Com-

Commissie bij de opgave van dit voorstel geplaatst, is, de wortel x stellende, het Tetrahedraal getal $\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$, waar uit volgt: dat, daar het tetrahedraal-getal van de derde afmeting is, de wortel van de eerste afmeting zal zijn; daar dan de opgegevene formule van de zesde afmeting is, moet de wortel van de tweede afmeting zijn.

Stellen wij dan den wortel $a + bx + cx^2$, dan is het tetrahedraal-getal $\frac{1}{6}(a + bx + cx^2) \times \dots (a + 1 + bx + cx^2) \times (a + 2 + bx + cx^2)$. Dit product dan ontwikkelende, moet het, term voor term, met de opgegevene formule overeenkomen en wij zullen dan hebben: $a^3 + 3a^2 + 2a = 336$; $3a^2b + 6ab + 2b = 1022$; \dots $3a^2c + 3ab^2 + 6ac + 3b^2 + 2c = 1175$; $6abc + 6bc + b^3 = 637$; $3ac^2 + 3b^2c + 3c^2 = 168$ (γ); $3bc^2 = 21$ (β) en $c^3 = 1$ (α).

Wij hebben alzoo zeven vergelijkingen om de grootheden a , b en c te bepalen; drie van dezelfde zijn genoegzaam tot ons oogmerk, en de overige moeten met de waarden, welke wij uit deze drie eerste voor a , b en c vinden, overeenstemmen; want anders zou hier uit volgen, dat de opgegevene formule geen tetrahedraal getal zou kunnen zijn, waarvan de wortel eenen stekkundigen vorm hadde. Bepalen wij ons dan tot de laatste, welke wij met (α), (β) en (γ) geteekend hebben; dan geeft ons (α) : $c = 1$; deze waarde

in (β) gebragt, geeft $b = \frac{21}{3c^2} = 7$, en de waarden van b en c in (γ) gebragt; komt er $a = \frac{168 - 3b^2c - 3c^2}{3c^2} = 6$; daar nu deze waar-

den van a , b en c , ook aan alle de overige vergelijkingen voldoen, blijkt hier uit: dat $6 + 7x + x^2$ de gevraagde tetrahedraal-wortel is; en in de daad, wanneer wij, volgens den gegebenen regel de-

deze uitdrukking tot de tetrahedraal verheffen, verkrijgen wij volkomen de opgegevene formule.

N^o. 116. Door

C. J. van Brussel, M. J. ZUIDHOF, en
P. van Eeghen, Chz.

Stel de drie getallen, waar van het product de gevraagde som goud-guldens moet uitmaken, als volgt: het eerste $= x$; dan is het tweede $= 5x$ en het derde $= 20x$. Verheft men nu het eerste tot een vierhoekig pyrgoidaal, het tweede tot een vierhoekig columnaar en het derde tot een vierhoekig pyramidaal-getal, dan verkrijgt men, ingevolge de noot der Wetenschappelijke Commissie (*), de volgende uitdrukkingen:

$$x^3 + \frac{1}{6} (x - 1) x (2x - 1) \\ (5x)^3 = 125x^3$$

$$\frac{1}{6} \cdot 20x (20x + 1) (40x + 1)$$

daar nu de som dezer drie formules $= 2812985$ moet zijn, verkrijgt men, na alles ontwikkeld te hebben:

$$\frac{16758x^3 + 1197x^2 + 21x}{6} = 2812985$$

dat is, na herleiding, de eindvergelijking,

$$16758x^3 + 1197x^2 + 21x - 16877910 = 0$$

hier uit is één der wortels $x = 10$; derhalve $5x$

(*) In de noot der *Prov. Wet. Comm.* op dit voorstel *Bladz. 37*, heeft, bij verzinning, eene mistelling plaats gehad: er staat: „een pyrgoidaal-getal is de som van een Columnaar en Pyramidaal-getal, tot denzelfden wortel behorende,” lees: een Pyrgoidaal-getal is de som van eenig Columnaar getal en een Pyramidaal-getal, wiens wortel één minder dan die van het Columnaar getal is: althans blijkt het, dat HALCKEN dit woord in den laatste zin opvat. (*Wet. Comm.*)

$5x = 50$ en $20x = 200$; eindelijk is het product dezer deelen $10 \times 50 \times 200 = 100000$ het begeerde getal goud-guldens. De twee andere wezenlijke wortels der eindvergelijking geven geene voor den aard der vraag geschikte oplossingen.

Nº. 117. Door

J. R. SCHMIDT, *Jacob de Gelder*, en L. van Heusden.

Zij ACBFE (*Fig. 98.*) de vijfhoek en EF de zijde, waar aan eene der zijden van het ingeschreven vierkant evenwijdig loopen moet; dan hebben wij de volgende

CONSTRUCTIE. Trek de diagonaal AB, welke klaarblijkelijk evenwijdig aan EF is; stel BD loodrecht op AB en maak $BD = AB$; trekkende dan CD, welke FB in G snijdt; dan zal, na GK evenwijdig aan EF, GH en KI loodrecht op GK en eindelijk IH getrokken te hebben, IHGK het begeerde vierkant zijn.

Bewijs. Het zal niet noodig zijn te bewijzen, dat IHGK een regthoekig parallelogram is; zulks is uit de constructie en de regelmatigheid der figuur genoegzaam klaarblijkelijk en wij behoeven dus slechts te bewijzen, dat $IH = HG$ is.

Omdat HG evenwijdig is aan BD, is

$$CH : CB = HG : BD$$

en omdat HI evenwijdig aan AB is, is

$$CH : CB = HI : AB$$

$$\text{derhalve } HG : BD = HI : AB$$

maar BD is, volgens de constructie, $= AB$; derhalve is ook $IH = HG$.

I. AANMERKING. Dezelfde constructie (zegt de Heer SCHMIDT) geldt ook, met eene kleine ver-

verandering, om in eenen regelmatigigen veelhoek van een oneven getal zijden, welke dan ook het getal der zijden zijn moge, een vierkant te beschrijven. In *Fig. 99.* is, op deze wijze, een vierkant in eenen regelmatigigen zevenhoek beschreven; de constructie, zoo wel als het bewijs, komen, in dit geval, met die van den vijfhoek overeen. In *Fig. 100.* is een vierkant in eenen regelmatigigen negenhoek beschreven; maar de constructie wijkt hier eenigermate af; want, na de diagonaal AB getrokken en BD loodregt op AB gesteld en gelijk aan AB gemaakt te hebben, moeten de zijden MA en LB verlengd worden, tot dat zij elkander in C snijden: vervolgens de lijn CD getrokken hebbende, tot zij FN in G snijdt, dan is het vierkant bepaald. Het bewijs loopt hier op dezelfde wijze, als voor den vijfhoek, af. Het is uit deze voorbeelden blijkbaar, dat deze constructie op alle regelmatigige onevene veelhoeken toepasselijk is.

2. AANMERKING. Een der Heeren Leden (zegt DE GELDER) vermeent, dat dit werkstuk aldus kan geconstrueerd worden. *Deel (Fig. 98.) FE in Q in twee gelijke deelen; verecnig de punten C en Q; beschrijf met CQ als straal, eenen cirkelboog, welke de zijden AE en BF in de punten K en G snijdt en dan zal (zegt hij,) GK de zijde van het begeerde vierkant zijn.* Waarschijnlijk misleid door het geringe onderscheid tusschen de lijnen CQ en CG, heeft hij, het geen bij eene constructie zoo ligtelijk gebeuren kan, de gelijkheid dezer lijnen vermoed en zich in het zoeken naar het bewijs bedrogen: althans zal dit bedrog uit het volgende kunnen blijken.

Men trekke de diagonaal CE. De lijn CQ snijdt AB in twee gelijke deelen $AP = BP$ en regthoekig. Volgens den aard des regelmatigigen vijfhoeks

is $\angle ABC = 36^\circ$ en $\angle CEF = 72^\circ$; de reghoekige driehoeken BCP en CEQ geven dan ($BC = a$ stellende,) $BP = BC \times \cos. CBP = a \times \cos. 36^\circ$ en $AB = CE = 2a \times \cos. 36^\circ$. Voorts $CQ = CE \times \sin. 72^\circ = 2a \times \cos. 36^\circ \times \sin. 72^\circ = 4a \cdot \sin. 36^\circ \times \cos^2. 36^\circ$; of, het geen eenvoudiger is, $CQ = EQ \tan. 72^\circ = \frac{1}{2} a \tan. 72^\circ$.

Deze waarde van CQ moet, ten einde de waarheid of valsheid der opgegevene constructie te beoordeelen, met die van CG vergeleken worden.

Om de waarde van CG te vinden, zoek men eerst de waarde van $HI = GH$. In den driehoek CHI is $\sin. C : \sin. I = IH : CH$, of $\sin. 108^\circ : \sin. 36^\circ = IH : CH$; derhalve is, omdat $\sin. 108^\circ = \sin. 72^\circ$ is, $CH = IH \times \frac{\sin. 36^\circ}{\sin. 72^\circ}$.

In den driehoek BGH is, $\sin. B : \sin. G = HG : BH$; dat is, omdat $B = 108^\circ$ en $G = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ$ is, $\sin. 108^\circ : \sin. 18^\circ = HG : BG$, diensvolgens $BG = HI \times \frac{\sin. 18^\circ}{\sin. 72^\circ}$. Nu is $BC = CH + HB = \dots$

$$\frac{\sin. 18^\circ + \sin. 36^\circ}{\sin. 72^\circ} = a, \text{ waar uit dan volgt:}$$

$$HI = HG = a \times \frac{\sin. 72^\circ}{\sin. 18^\circ + \sin. 36^\circ}$$

$$CH = HI \times \frac{\sin. 36^\circ}{\sin. 72^\circ} = a \times \frac{\sin. 36^\circ}{\sin. 18^\circ + \sin. 36^\circ}$$

Nu is, in den driehoek CGH, volgens de bekende eigenschap,

$CG^2 = CH^2 + GH^2 - 2CH \times GH \times \cos. CHG$
 maar $CHG = CHI + IHG = 36^\circ + 90^\circ = 126^\circ$
 en $\cos. 126^\circ = -\cos. 54^\circ = -\sin. 36^\circ$
 zijnde, is

$$CG^2 = a^2 \times \frac{\sin^2. 36^\circ + \sin^2. 72^\circ + 2\sin^2. 36^\circ \times \sin. 72^\circ}{[\sin. 18^\circ + \sin. 36^\circ]^2}$$

Om-

Omdat nu $\sin^2 72^\circ = \sin^2 36^\circ \times 4 \cos^2 36^\circ$ en $\sin 18^\circ + \sin 36^\circ = 2 \times \sin 27^\circ \times \cos 9^\circ$ is, verandert dit gebroken in

$$CG^2 = a^2 \cdot \frac{\sin^2 36^\circ}{4 \sin^2 27^\circ \cdot \cos^2 9^\circ} [1 + 2 \sin 72^\circ + 4 \cos^2 36^\circ]$$

of, daar $4 \cos^2 36^\circ = 2 + 2 \cos 72^\circ$ is, in

$$CG^2 = a^2 \cdot \frac{\sin^2 36^\circ}{4 \sin^2 27^\circ \cdot \cos^2 9^\circ} [3 + 2 \sin 18^\circ + 2 \sin 72^\circ]$$

en hier uit den vierkants-wortel trekkende,

$$CG = a \cdot \frac{\sin 36^\circ}{\sin 27^\circ \cdot \cos 9^\circ} \sqrt{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sin 18^\circ + \frac{1}{2} \sin 72^\circ\right)} (A)$$

Deze waarde van CG zou nu aan die van CQ $= \frac{1}{2} a \tan 72^\circ$ moeten gelijk, of de waarde van CG in (A) tot $\frac{1}{2} a \times \tan 72^\circ$, of tot $4a \sin 36^\circ \cos^2 36^\circ$, (zie boven) herleidbaar moeten zijn; doch, daar de grootheid onder het wortel-teeken in (A) op geenerlei wijze tot eene rationale functie van eenigen rationalen hoek kan gebragt worden, bestaat er ook geene volkomene gelijkheid tusschen CG en CQ. Met dat al kan het mogelijk zijn: dat de waarde van CQ weinig van die van CG verschille en dit heeft ook in de daad plaats; want stelt, men $a = 10000$ deelen, dan vindt men: CQ $= 15388$ en CG $= 15363$ deelen, CQ is derhalve 25 deelen langer dan CG; de lijnen CG en CQ verschillen dan slechts $\frac{1}{400}$ van de zijde van den gegebenen vijfhoek van elkander, en dit geringe verschil, in eene kleine figuur onmerkbaar, is waarschijnlijk de oorzaak der misleiding geweest. In eene grootere figuur, zou men, bij eene naauwkeurige constructie, den mislag, ook bij de proef, ontdekken.

ANDERS, door P. van Eeghen, Chz.

Zij (Fig. 101.) ABCDE een regelmatige vijfhoek, verleng de zijden BC en EA tot dat zij el-

elkander in F ontmoeten; trek door de punten D en F de lijn DFG; maak $FG = FB = FA$; trek de lijn GE en FH evenwijdig aan EG, dan zal HI evenwijdig aan AB, HL evenwijdig aan DF, IK en KL evenwijdig aan HL en HI getrokken hebbende, HIKL het begeerde vierkant zijn. Het welk op de volgende wijze betoogd kan worden.

Bewijs. Trek de diagonaal EC; dan is, volgens de eigenschap des vijfhoeks, $EC = BF = FG$ en de gelijkvormige driehoeken, door de constructie ontstaan, geven de evenredigheden:

$$HD : HI = ED : EC$$

$$DF : HD = GF : EH$$

$$ED : DF = EH : HL$$

de overeenkomstige termen van deze vermenigvuldigd hebbende, heeft men:

$$ED : HI = ED \times GF : EC \times HL$$

maar volgens de constructie is $FG = EC$, derhalve is

$$ED : HI = ED : HL$$

en hier uit volgt $HI = HL$, waar uit het overige blijkbaar is.

Nº. 118. Door (*)

J. R. SCHMIDT.

Laat (Fig. 102.) A het gegeven punt, PQ de ge-

(*) Er zijn Leden, welke van dit en het volgend voorstel oplossingen hebben ingezonden, die geene oplossingen kunnen genoemd worden; want, wanneer men door het teekenen eener figuur als het ware proefondervindelijk ziet, dat de plaats van de punten in Nº. 118. eene regte lijn en die van Nº. 119. een cirkel is, en het bewijs in veel woorden niet meer zegt, dan *het is zoo*, kan de Wetenschappelijke Commissie

gegevene lijn, $ACLD$ eene der gelijkvormige figuren, en D het punt zijn, waar van men de plaats begeert. Zoo dan uit D eene loodlijn DE op AC wordt neder gelaten, zal uit hoofde van de gelijkvormigheid der figuren, op elke lijn AC , AE tot EC in eene bestendige rede moeten zijn, bij voorbeeld als $m : n$. Wanneer wij dan de loodlijn AG zoodanig deelen, dat $AF : FG = m : n$ zij, en door F evenwijdig aan PQ trekken de lijn MN , dan deelt deze lijn alle de lijnen AC in die zelfde reden, en bijgevolg zullen alle de punten E in deze lijn MN liggen.

Nu is uit hoofde van den rechten hoek DEA , $\angle DEH$ het complement van den $\angle AEF$, en daarom zijn de driehoeken DEH en AEF gelijkvormig; stellen wij dan de standvastige reden tuschen AE en ED gelijk $p : q$, en verder $AF = a$, $FH = x$ en $HD = y$, dan is

$EH : AF = ED : EA$, dat is $EH : a = q : p$, waaruit $EH = \frac{q}{p} a$ en $EF : DH = AE : ED$, of $EF : y = p : q$, waaruit $EF = \frac{p}{q} y$ en nemende de som van EH en EF , heb-

ben wij $HF = \frac{q}{p} a + \frac{p}{q} y = x$, waaruit blijkt, dat de gevraagde plaats van het punt D eene rechte lijn is, waar van nog alleen de stand bepaald moet worden; daar het nu genoeg is twee punten

misie, welke van hare voorgestelde bedoeling, om de redactie der voorstellen tot nut en bevordering te doen strekken, niet zal afgaan, van zulk eenen onvolkomen arbeid geen gebruik maken en gebiedt haar tevens de billijkheid de namen der toezenders van zulke gebrekkige oplossingen niet te vermelden, ten einde niemand in de toewijzing der prijzen zou mogen benadeeld worden. (*Wet. Comm.*)

ten van dezelve te kennen om haar te construeren, zoeken wij de punten, welke met $x = 0$ en $y = 0$ overeenstemmen; stellende dan $x = 0$ vinden wij $y = -\frac{q^2}{p^2} a$ voor de waarde van

FO; en stellende $y = 0$, komt er $x = \frac{q}{p} a$ voor de waarde van FR, en de punten O en R aldus bepaald zijnde, zal de rechte lijn DRO de begeerde plaats van het punt D zijn.

VOORBEELDEN. Laat ons dit gezegde toepassen op die gevallen, waarin de gelijkvormige figuren gelijkzijdige driehoeken en vierkanten zijn.

1°. Voor de gelijkzijdige driehoeken (zie *Fig. 103.*)

Hier deelt de loodlijn DE, AC in twee gelijke deelen; AD moet dus midden door worden gedeeld in F, en MN evenwijdig getrokken worden aan PQ: nu is $DE : AE = q : p = \sqrt{3} : 1$,

dus $FR = \frac{q}{p} a = AF \sqrt{3} = \frac{1}{2} AG \sqrt{3}$; het

punt R wordt bijgevolg gevonden door op AG eenen gelijkzijdigen driehoek ARG te beschrijven, en het is klaar: dat, in ieder geval, dit punt R bepaald wordt, door op AG eené der gelijkvormige figuren te beschrijven. Verder is $GO = -$

$\frac{q^2}{p^2} a = -3 AF$, waaruit blijkt, dat het punt O gevonden wordt door $GO = AG$ te nemen.

In dit bijzonder geval van ons Theorema, kunnen wij het gevondene ook op de volgende wijze betoogen. Laat CO getrokken worden, dan is, omdat $AG = GO$ is, ook $CO = AC = CD$, de punten D, A en O liggen bijgevolg in den omtrek van eenen cirkel, waar van C het middelpunt is, en wij hebben $\angle DOG = \frac{1}{2} \angle DCA = \frac{1}{2} R$, dewijl dus voor ieder punt D de

hoek

hoek DOA standvastig $= \frac{1}{2}R$ is, volgt hier uit: dat deze lijn DO de plaats is van alle de punten D, en dat deze lijn DO zoodanig moet worden geconstrueerd, dat $GO = GA$ en $\angle GOD = \frac{1}{2}R$ is, dat is gelijk den halven hoek van den gelijkzijdigen driehoek, en GS zal alzoo de halve basis zijn van den gelijkzijdigen driehoek, welke $GO = AG$ tot hoogte heeft.

2°. Als de gelijkvormige figuren vierkanten zijn, (zie *Fig. 104.*)

Hier valt DE in C en dus F in G en wij hebben, omdat $DE = EA$ is, ook $q = p$, zoo

dat $FR = \frac{q}{p} a = AF = AG$ en $FO = -$

$\frac{q^2}{p^2} a = AF = AG$; zoo dat de lijn DO geconstrueerd wordt, door FR en FO beide gelijk AG te nemen.

Zoo wij echter de plaats van de punten D' begeerden, zouden wij uit de vergelijking geene bepaalde oplossing verkrijgen; want als dan wordt, omdat E' en F' beide in A vallen,

$p = 0$ en $a = 0$, waar door $AR' = \frac{q}{p} a =$

0×0 en $FO' = -\frac{q^2}{p^2} a = 0 \times 0$; in

dit geval wordt echter de stand van de lijn D'O' gemakkelijk gevonden; want beschrijvende op AG een vierkant, zal $AR' = AG$ het punt R' bepalen, en wanneer $GU = GR = AG$ genomen wordt, is AROU het vierkant op AU, en dus R mede een punt van de gevraagde lijn; de plaats van het punt D' zal dus zijn de lijn D'O', welke evenwijdig aan AG en door het punt R getrokken is.

Wij kunnen voor dit bijzonder geval, waar in de gelijkvormige figuren vierkanten zijn, het bewijs wederom, op dezelfde wijze, opmaken, als
voor

voor de gelijkzijdige driehoeken, en dit zal altoos plaats hebben, wanneer de gelijkvormige figuren regelmatige veelhoeken zijn, en dat men de plaats van de punten D zoekt, welke in de figuur onmiddellijk op de punten C volgen; de lijn DO zal als dan altoos zoodanig moeten getrokken worden, dat $GO = GA$ is, en dat de hoek DOA gelijk aan den halven hoek des veelhoeks zij.

AANMERKING. Wanneer men de oplossing van dit voorstel op eene andere wijze aanvat, schijnt de eindvergelijking, in den eersten opslag, tot den vierden graad te behooren. Hernemen wij, bij voorbeeld, het geval van de gelijkzijdige driehoeken (*Fig. 103.*) en stellen wij $AG = a$, $DI = y$ en $IG = x$, dan is $DB = y - a$; dus $AD = AC = CD = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$, $IC = \sqrt{DC^2 - DI^2} = \sqrt{x^2 + a^2 - 2ay}$ en $CG = \sqrt{AC^2 - AG^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2ay}$ en dus omdat $IC + CG = IG = x$ is, is . . . $\sqrt{x^2 + a^2 - 2ay} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2ay} = x$, welke vergelijking, om de wortel-teekens te verdrijven, tweemaal gequadrateerd moet worden, en dan na herleiding geven zal:

$$y^4 - 2(a^2 + x^2)y^2 + 8ax^2y + a^4 - 2a^2x^2 - 3x^4 = 0$$

eene vergelijking, welke tot de vierde magt schijnt te behooren, en dus in den eersten opslag zou kunnen doen denken, dat de begeerde plaats eene kromme lijn van de derde orde zou zijn; dezelve wordt echter gemakkelijk aldus herleid.

Ordenen wij dezelve ten opzichte van x , dan vinden wij:

$$3x^4 + 2x^2(a^2 - 4ay + y^2) = (a^2 - y^2)^2$$

tellende nu, na met drie vermenigvuldigd te hebben, aan beide zijden bij $(a^2 - 4ay + y^2)^2$, komt er:

$$[3x^2 + (a^2 - 4ay + y^2)]^2 = 4(a^2 - ay + y^2)^2$$

waar

waartuit $3x^2 + x^2 - 4ay + y^2 = 2(a^2 - ay + y^2)$ en $3x^2 = a^2 + 2ay + y^2$, zoo dat $x\sqrt{3} = a + y$ is, zijnde deze dezelfde vergelijking, welke wij vinden zouden, door de algemeene vergelijking $x = \frac{q}{p}a + \frac{p}{q}y$ in dit geval tot de as PQ te herleiden. Hetzelfde verschijnsel zal plaats hebben, wanneer wij ons algemeen voorstel op deze wijze zouden willen aanvatten.

ANDER'S, door P. van Eeghen, Chz., verder aangevuld door Jacob de Gelder. Fig. 109.

Wanneer men dit voorstel oplost met driehoeken op de lijnen, is hetzelfde ook algemeen voor de veelhoeken, op die lijnen beschreven, opgelost; omdat, wanneer men A als het gegeven punt en BCD als de gegevene lijn aanneemt, eenig punt E, als hoekpunt eens veelhoeks aanneemt, het vraagstuk zich tot de driehoeken ABE bepaalt. Laten dan, behalve de lijn AB, nog de lijnen AC en AD uit het punt A tot aan de lijn BCD getrokken worden: men beschrijve op AC en AD de driehoeken ACF en ADG, alle gelijkvormig aan den driehoek ABE, dan zeg ik: dat de punten E, F en G in eene rechte lijn gelogen zijn; want, vereenig de punten E en F en F en G, dan is de driehoek AEF gelijkvormig aan den driehoek ABC en driehoek AFG gelijkvormig aan driehoek ACD; want, wegens de gelijkvormigheid der driehoeken ABE, ACF en ADG, $\angle EAB = \angle FAC$; hier af $\angle GAF = \angle GAF$, blijft $\angle EAF = \angle BAC$; om dezelfde reden is $\angle FAG = \angle CAD$; en daar nu uit kragte van dezelfde gelijkvormigheid,

$AE:AB = AF:AC$ of $AE:AF = AB:AC$
 $AF:AC = AG:AD$ of $AF:AG = AC:AD$
 is, zoo zijn. (X. Stcll. IV DE GELDER'S Beg.)
 de driehoeken AEF en AFG respectivelijk gelijk-
 Y vor-

vormig aan de driehoeken ABC en ACD ; dit nu zoo zijnde, is $\angle ACB = \angle AFE$ en $\angle ACD = \angle AFG$; derhalve $\angle EFA + \angle AFG = \dots$
 $\angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$; derhalve (V. Stell. I B.) is FG het verlengde van EF en de punten E , F en G liggen in eene en dezelfde rechte lijn; en daar dit betoog algemeen voor alle andere lijnen geldt, blijkt het, dat de plaats der gevraagde punten eene rechte lijn is.

Stel: dat de lijn EG , die de plaats der begeerde punten is, BD in H snijde, dan is het klaar, dat de gelijkvormige driehoek, op AH beschreven, met de zijde tegen over het punt A liggende, langs EG moet vallen; derhalve moet $\angle AHE = \angle ABE = \angle ACF = \angle ADG$ zijn; boven dien behoeft niet met vele woorden betoogd te worden, dat de zijde van den driehoek, wiens hoekpunt in A valt, langs AD zal vallen en dat diensvolgens $\angle AHD = \angle AGD$ en $\angle AFC = \angle AEB$ zal zijn; de lijn EH zal dan de as AD snijden onder eenen hoek BHE , die gelijk is aan den hoek $EAB = \angle FAC = \dots = \angle GAD$. Men late nu uit het punt A de loodlijn AKL op BD , welke het verlengde van EG in L snijdt, nedervallen; indien men dan vanden A loodragt op EG laat vallen, dan is driehoek IAK gelijkvormig aan driehoek GAD ; daar nu de driehoeken, op AB , AC , AD beschreven in soort gegeven zijn, gelijk ook het punt A in stelling met betrekking tot de lijn BD , is ook AK gegeven. Stel derhalve $AK = a$, $AI = b$, $\angle IAK = \mu$; dan is $AL = AI \times$

$$\frac{\sin \mu}{\cos \mu} = \frac{b}{\cos \mu} \text{ en } KL = \frac{b}{\cos \mu} - a = \dots$$

$$\frac{b - a \cos \mu}{\cos \mu} \text{ en } MK = KL \times \cos \mu = \dots$$

$$\frac{b - a \cos \mu}{\sin \mu} \text{ Stellen wij dan het punt } K \text{ voor}$$

den

den oorsprong der coördinaten, dan zal, voor de vergelijking tot de rechte lijn $y = px + q$ aannemende, met $y = 0$ overeenstemmen $x = -\frac{p}{q} = -KH = -\frac{b - a \cos \mu}{\sin \mu}$; en met $x = 0$, overeenstemmen $y = q = -KL = -\frac{b - a \cos \mu}{\cos \mu}$, hieruit $p = -\text{Tang} \mu$ en de vergelijking wordt derhalve $y = -\text{Tang} \mu \times x - \frac{b - a \cos \mu}{\cos \mu}$ de vergelijking van de plaats der begeerde punten.

Nº. 119. Door

J. R. Schmidt.

Dit en het 118^{de} Voorstel zijn slechts bijzondere gevallen van het volgende meer algemeene Voorstel, waar in zij beide zijn opgesloten.

Wanneer men uit eenig punt *A* (Fig. 106.) buiten of binnen eenen cirkel lijnen *AG* naar dezelve omtrek trekt, en op alle deze lijnen *AC* gelijkvormige figuren beschrijft, (doch alle naar den zelfden kant,) dan zullen de overeenstemmende punten *D* dezer gelijkvormige figuren in den omtrek van eenen anderen cirkel liggen.

Laat, om zulks te betoogen, *DE* loodrecht op *AC* zijn, dan zal, uit hoofde van de gelijkvormigheid der figuren, in elken stand van *AC*, *AE* tot *AC* in eens standvastige reden, bij voorbeeld als $m : n$ zijn; het punt *E* zal alzoo, terwijl *AC* alle standen aanneemt, waar voor zij vatbaar is, eenen cirkel doorloopen, welke bepaald wordt, door $AN : AM = m : n$ en $NO : MP = m : n$ te nemen (DE GELPERS Grondw. der Meetk. IV B. III St.) en wij behoeven dus slechts te bewijzen, dat, wanneer uit eenig punt

A lijnen AE tot den omtrek eens cirkels getrokken worden, en op de uiteinden E loodlijnen ED op dezelve worden opgericht, zoodanig, dat overal $AE : ED = p : q$ zij, de punten D , in den omtrek van eenen anderen cirkel zullen gelegen zijn: en dit betoogen wij op de volgende wijze.

Laat (Fig. 107.) DB loodregt op NA zijn, en laat EN getrokken worden; stel $NA = a$ en $NE = NO = b$; stel verder $AB = x$, $BD = y$, $AE : ED = p : q$, $\angle NBD = \alpha$, $\angle DAE = \beta$ en $\angle NAE = \gamma$, dan is $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$: nu is $AE : ED = p : q$ en $AE^2 + ED^2 = AD^2 = x^2 + y^2$, dus $AE =$

$$\frac{p \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{p^2 + q^2}} \text{ en } ED = \frac{q \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \text{ verder is}$$

$$\frac{AE}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \text{ en } \cos. \beta = \dots$$

$$\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}; AB : \cos. \alpha = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ of}$$

$$\cos. \alpha = \frac{AB}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ en } \sin. \alpha =$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \text{ maar, } \gamma = \alpha - \beta \text{ zijnde, is}$$

$$\cos. \gamma = \cos. \alpha \cos. \beta + \sin. \alpha \sin. \beta =$$

$$\frac{px + qy}{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Nu is $NE^2 = AE^2 + NA^2 - 2 AE \cdot NA \cos. \gamma$ en brengende hier in de gestelde en de gevondene waarden, dan heeft men:

$$b^2 = \frac{p^2}{p^2 + q^2} (x^2 + y^2) + a^2 - \frac{2a(px + qy)p}{p^2 + q^2}$$

alles met $p^2 + q^2$ vermenigvuldigd en door p^2 gedeeld hebbende, komt er, na herleiding:

$$\frac{b^2 (p^2 + q^2)}{p^2} = (a - x)^2 + \left[\frac{q}{p} a - y \right]^2$$

of

$$\text{of } (a-x)^2 + \left[\frac{q}{p} a - y \right]^2 = \left[\frac{b \sqrt{(p^2 + q^2)}}{p} \right]^2$$

zijnde eene vergelijking tot den cirkel, wiens middelpunt en straal aldus gevonden worden.

Laten uit N, O en R loodlijnen op RA worden opgericht, en $NH = \frac{q}{p} NA$ genomen worden, trekkende dan AH, tot zij OF en RG snijdt in F en G, en beschrijvende met $HG = HF$, als straal en H als middelpunt, eenen cirkel, dan zal deze de begeerde plaats van het punt D zijn.

Want, trekkende DI loodrecht op NH, dan is $DI^2 + HI^2 = DH^2$; maar, volgens de constructie, is $DI = BN = AN - AB = a - x$;

$HI = HN - DB = \frac{q}{p} a - y$, en omdat

$$AN : AH = ON : HF \text{ of } a : \sqrt{a^2 + \frac{q^2}{p^2} a^2} = b : HF, \text{ zoo is } HD = HF = \frac{b \sqrt{(p^2 + q^2)}}{p}$$

$$\text{en dus } (a-x)^2 + \left[\frac{q}{p} a - y \right]^2 = \left[\frac{b \sqrt{(p^2 + q^2)}}{p} \right]^2, \text{ zoo als boven.}$$

1. AANMERKING. Is nu, zoo als in de opgave van dit voorstel, A in den omtrek van den gegebenen cirkel gelegen, dan zijn alle de lijnen AC (*Fig. 108.*) koorden van dien cirkel; de cirkel, waar in de punten E liggen, raakt dan den gegebenen cirkel in A, zoo dat de punten O, P en A in elkander vallen; en de gevraagde cirkel, waar in het punt D zal vallen; wordt hier derhalve gevonden door NH de vierde evenredige tot AE, ED en NA te nemen, en dan uit H, als middelpunt, met $HF = HG = HR$ als straal, eenen cirkel te beschrijven; het punt F valt hier mede in A; en wanneer dan het gegeven punt A in

ONTBINDINGEN VAN DE

den omtrek ligt, gaat de gezochte cirkel altoos door de punten A en R.

2. AANMERKING. Wanneer a en b beide oneindig groot zijn, gaat de gegeven cirkel over in eene regte lijn, en dan zijn wij in het geval van het 118 Voorstel. In dit geval nu wordt de straal van den gezochten cirkel, dat is $\frac{b\sqrt{(p^2 + q^2)}}{p}$, mede oneindig groot, en dus is de gezochte plaats een cirkel van eene oneindig groote straal, dat is, eene regte lijn, even zoo als wij zulks in het 118 Voorstel bevonden hebben, alwaar de stand van deze regte lijn voor alle gevallen bepaald is.

3. AANMERKING. Het voorstel, zoo als het in den text is opgegeven, is ook een bijzonder geval van een ander algemeen voorstel, waar in het 118 niet begrepen is, namelijk van dit: *Wanneer, uit eenig punt, binnen of buiten eenen cirkel, lijnen naar den cirkel getrokken worden, en op de koorden, welke de cirkel van deze lijnen afsnijdt, ter wederzijden gelijkvormige figuren worden beschreven, vraagt men de kromme lijn te bepalen, waar in de overeenstemmende punten van deze figuren zullen liggen?* Deze kromme lijn nu is niet altijd een cirkel; maar alleen dan, wanneer het punt in den omtrek van den gezegden cirkel ligt. Wij besparen het voor eene andere gelegenheid, om dit algemeenere voorstel verder te ontwikkelen.

ANDERS, door JACOB DE GELDER, en P. van Eeghen, Chz.

Zij, Fig. 105. A het gegeven punt, liggende in den omtrek van den cirkel ABCD. Laten op de koorden AB, AC, AD beschreven zijn de gelijkvormige driehoeken ABG, ACF en ACE, dan moet bewezen worden: *dat de punten G, F en E*

E in den omtrek eens cirkels liggen. Het is klaarblijkelijk, dat de zijden BG, CF, DE, tegen over het gegeven punt A staande, elkander in den omtrek des gegebenen cirkels in H moeten doorsnijden; omdat, wegens de gelijkvormigheid der driehoeken, de hoeken B, C en D gelijk zijnde, en bovendien de beenen AB, AC, AD door hetzelfde punt A gaande, ingevolge de bekende eigenschap des cirkels, waar bij gelijke hoeken aan den omtrek op gelijke bogen kunnen staan, de beenen BH, CH, en DH elkander in een en hetzelfde punt H moeten snijden. Trekt men dan de koorde AH, dan staan op dezelfde lijn AH de driehoeken AHG, AHF, AHE, welke, wegens de onderstelde gelijkvormigheid, gelijke tophoeken G, F en E hebben; de tophoeken, dezer driehoeken liggen dan in den omtrek eens cirkels, welke door de punten A en H gaat.

AANMERKING. De 118 en 119 Voorstellen (zegt de Heer DE GELDER) komen, in den grond der zake, met de VI en VII Stellingen van het eerste Boek der vlakke plaatsen van APOLLONIUS PERGAEUS overeen (zie APPOLL. PERGAEI, *Loc. Plan.*, rest. à R. SIMSON, pag. 7 et seq.) De eerste dezer stellingen is aldus voorgedragen. „Indien van een gegeven punt
„ P, Fig. 113. twee regte lijnen PA en PB, eenen
„ gegebenen hoek APB bevattende en tot elkander
„ een gegevenen reden hebbende, getrokken worden, en het uiteinde A van éne dezer regte
„ lijnen AP in een in stelling gegevenen regte
„ lijn QR gelegen is, dan ligt het uiteinde B
„ van de tweede regte lijn PB in een andere,
„ insgelijks in stelling gegevenen, regte lijn ST.”
En de andere: „Indien van een gegeven punt A
„ Fig. 105. twee regte lijnen AB en AG eenen
„ gegebenen hoek BAG bevattende, en tot elkander
„ der een gegevenen reden hebbende; getrokken
„ wor-

„ worden, en het uiteinde B van ééne dezer lij-
 „ nen AB in den omtrek van eenen in stelling
 „ gegebenen cirkel ABCD gelegen is, dan ligt
 „ ook het uiteinde G der andere lijn AG in
 „ eenen anderen in stelling gegebenen cirkel
 „ AHGFE.”

Nº. 120. Door

P. van Eeghen, Chz., en C. J. van Brussel.

Wanneer men van de opgegevene tiendeelige breuk den teller in den noemer, het overschot wederom in den teller deelt, en zoo vervolgens, het overschot van elke deeling in derzelver deeler, dan verkrijgt men de quotiënten:

1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10,

..... 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, enz.

welke (zie DE GELDER I *Cursus* §. 609.) de noemers der breuken zijn, waar uit de gedurige breuk is zamengesteld. (*)

Nº. 121. Door

J. R. Schmidt.

Laat (Fig. 110.) BDHFB de gegeven cirkel,
 B

-(*) Ofschoon door deze Oplossing, in den striksten zin, aan den eisch van het vraagstuk voldaan is, zoo is men echter, door deze bewerking zelve, niet verzekerd, dat de merkwaardige wet, welke in noemers der breuken bestaat, bij eene verdere ontwikkeling der tiendeelige breuk, zal blijven stand houden; want hoe zal men verzekerd zijn, dat, wanneer die wet in de duizend eerste termen is blijven bestaan, dezelve bij de volgende termen niet vervallen zal? De Heer DE GELDER, door deze bedenking aangespoord, heeft getracht deze zwagrigheid te overwinnen, en het geen hij in dezen gedaan heeft, zal, als te uitgebreid voor de gewone stukjes zijnde, in des Genootschaps *Verhandelingen* geplaatst worden. (Wet. Com. n.)

B het vaste punt, en BRPQPRB de kromme zijn, zoo dat overal $FE = HB$ is: laat AC gelijk en evenwijdig aan FE getrokken worden, dan is CE gelijk en evenwijdig AF, en ACEF een parallelogram, waaruit volgt $\angle DCE = \dots$. $\angle AFB = \angle ABF = \angle DAB$: laat nu uit C, met $CD = AD$, een cirkel beschreven worden, dan gaat deze door het punt E, en, daar $\angle DCE = \angle DAB$ is, zal ook boog DE = boog DB zijn, eene eigenschap welke aantoonst, dat de kromme eene *Epicycloïde* is, dat is eene kromme, beschreven door een vast punt E van den omtrek van eenen cirkel, welke op den omtrek van eenen anderen cirkel van gelijke straal voortrolt, en van alle welke soorten van kromme lijnen, de rectificatie en quadratuur in de verhandelingen van L. A. HIRB en anderen over de *Epicycloïde* zijn opgegeven (a). Wij zullen dezelve echter op eene meer gemakkelijke en minder omslachtige wijze trachten te bepalen.

Stellen wij dan $\angle EBG = \phi$, $BE = y$ en $AB = a$, dan is ook $\angle ABF = \angle ATB = \phi$ en bijgevolg $BF = 2 AB \cos. \angle ABF = 2a \cos. \phi$ dit afgetrokken van $FE = 2a$, is het verschil $BE = y = 2a - 2a \cos. \phi$, zoo dat $y = 2a (1 - \cos. \phi)$ de pool-vergelijking van onze kromme is.

Om nu den inhoud te berekenen, zoo laat BE' oneindig dicht bij BE onderfeld worden, dan is het oneindig kleine driehoekje BE'E de differentiaal van den inhoud; nu is $BE' = BE = y$ en

(a) De eigenschap der *Epicycloïde*, dat FE overal gelijk de middellijn BQ is, of het gene op het zelve uitkomt, dat eenige lijn P'R, welke door het punt B gaat en de kromme in de punten P' en R snijdt, altoos gelijk zal zijn aan het dubbel van de middellijn BQ, vindt men ook opgeteekend, in de *Dictionnaire Mathématique* van M. OZANAM, *Bladz.* 104. (SCHMIDT.)

en $\angle EBE' = \delta\phi$, en wij hebben, zoo wij den inhoud van het stuk $BREB = I$ stellen.

$\delta I = \Delta EBE' = \frac{1}{2} BE \cdot BE' \cdot \sin \angle EBE' = \frac{1}{2} y^2 \times \sin \delta\phi$ dat is; omdat de sinus van eenen zeer kleinen boog gelijk is aan den boog zelfven,

$$\delta I = \frac{1}{2} y^2 \delta\phi. \dots\dots\dots (a)$$

en deze is de differentiaal van den inhoud van alle kromme lijnen, overgebracht tot hare pool-vergelijking.

Nu is in ons geval $y = 2a (1 - \cos \phi)$ en dus $\delta I = \frac{1}{2} y^2 \delta\phi = 2a^2 (1 - \cos \phi)^2 \delta\phi$, zoo dat $I = 2a^2 \int (1 - \cos \phi)^2 \delta\phi = \dots = 2a^2 (\int \delta\phi - 2 \int \cos \phi \delta\phi + \int \cos^2 \phi \delta\phi)$, het geen, volgens de bekende regels geïntegreerd zijnde, zal geven,

$$I = 2a^2 \phi - 4a^2 \sin \phi + 2a^2 \left(\frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi + \frac{1}{2} \phi \right)$$

$$\text{of} \dots I = 3a^2 \phi - a^2 \sin \phi (4 - \cos \phi) \dots (b)$$

voor den inhoud van het stuk $BERB$, en welke integraal goene verbetering noodig heeft, omdat zij, in de onderstelling van $\phi = 0$ verdwijnt, in welk geval de inhoud uit den aard der zaak noodzakelijk verdwijnen moet.

Stellen wij dan, om den inhoud $BRPQ$, dat is den halven inhoud van de kromme te vinden, $\phi = 180^\circ = \pi$; dan is $\sin \phi = 0$, en dus $I = 3a^2 \phi$, dat is gelijk aan driemaal den inhoud van den gegebenen cirkel, zoo dat de gehele begeerde inhoud van de kromme gelijk zal zijn aan zomaar den inhoud van den gegebenen cirkel.

Stellen wij $\phi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, dan is $\sin \phi = 1$ en $\cos \phi = 0$, en wij hebben alzoo voor den inhoud van het stuk $BDERB$, $I = \frac{3}{2}a^2 \pi - 4a^2$, dat is gelijk aan driemaal den inhoud van den halven gegebenen cirkel, min het vierkant op de middellijn.

Om de kromme te rectificeren, zoo laat ES loodrecht op BE' ondersteld worden, dan is $SE' = \delta y$ en $SE = BE \sin \angle EBE' = y \delta\phi$;
om-

omdat $\sin. \delta \phi = \delta \phi$ is; stellende dan den boog $BRE = z$, en is $EE' = \delta z$, en wij hebben, daar wij het oneindig kleine driehoekige SEE' als regtlijnig kunnen beschouwen, $E'E^2 = SE^2 + E'S^2$, dat is $\dots \delta z^2 = y^2 \delta \phi^2 + \delta y^2 \dots (\gamma)$ en dit is nu wederom de formule, waar door alle kromme lijnen, op derzelver pool-vergelijking overgebracht, moeten geredificeerd worden.

Daar nu, in onze kromme, $y = 2a(1 - \cos. \phi)$ is, hebben wij $\delta y = 2a \sin. \phi \delta \phi$ en $\delta z^2 = 4a^2 (1 - \cos. \phi)^2 \delta \phi^2 + 4a^2 \sin^2. \phi \delta \phi^2 = 4a^2 (2 - 2 \cos. \phi) \delta \phi^2 = 16a^2 \left[\frac{1 - \cos. \phi}{2} \right] \delta \phi^2$;

zoo dat $\delta z = 4a \delta \phi \sqrt{\frac{1 - \cos. \phi}{2}} = 4a \times$

$\sin. \frac{1}{2} \phi \delta \phi = 8a \sin. \frac{1}{2} \phi \times \delta \frac{1}{2} \phi$, waaruit door integreren gevonden wordt, $z = -8a \cos. \frac{1}{2} \phi + \text{Const.}$ Daar nu, in de onderstelling van $\phi = 0$, ook $z = 0$ moet zijn, is de standvastige $= 8a$, en wij hebben voor de verbeterde integraal, dat is voor de lengte van den boog BRE ,

$$z = 8a (1 - \cos. \frac{1}{2} \phi) = 16a \sin^2. \frac{1}{2} \phi \dots (\delta)$$

Om hier door de lengte van den halven omtrek der kromme te berekenen, moeten wij $\phi = 180^\circ$ en dus $\cos. \frac{1}{2} \phi = 0$ nemen, waar door wij vinden $z = 8a$, zoo dat de halve kromme gelijk achtmaal de straal en dus de geheele omtrek gelijk achttmaal de middellijn van den gegebenen cirkel is, en wij zouden dezelfde uitkomst verkregen hebben, door oogenblikkelijk $\phi = 360^\circ$ en dus $\cos. \frac{1}{2} \phi = -1$ te nemen; het welk alles volkomen overeenstemt met het geen LA HIRE voor den inhoud en omtrek van deze soort van kromme lijnen in het algemeen gevonden heeft.

Onze kromme lijn heeft nog verscheidene merkwaardige eigenschappen, waar van wij niet kunnen nalaten de volgende kortelijk aan te wijzen.

Laat EG raaklijn zijn aan het punt E , dan is we-

wegens de oneindige kleinheid des boogs EE' ,
 $\angle BEG = \angle BE'G$, maar $SE' = EE' \times \dots$
 $\text{Cos. } SE'E$; dus volgt hier uit,

$$\text{Cos. } \angle BEG = \frac{SE'}{EE'} = \frac{\delta y}{\delta z} \dots\dots (e)$$

welke formule wederom in alle gevallen gebruikt kan worden, om de raaklijn eener kromme door middel van hare pool-vergelijking te bepalen.

Daar wij reeds vonden $\delta y = 2a \text{Sin. } \frac{1}{2} \phi$ en $\delta z = 4a \text{Sin. } \frac{1}{2} \phi \delta \phi$, zoo hebben wij $\text{Cos. } \angle BEG = \frac{\delta y}{\delta z} = \frac{\text{Sin. } \phi}{2 \text{Sin. } \frac{1}{2} \phi} = \frac{2 \text{Sin. } \frac{1}{2} \phi \text{Cos. } \frac{1}{2} \phi}{2 \text{Sin. } \frac{1}{2} \phi} = \dots$

$\text{Cos. } \frac{1}{2} \phi$, waar uit volgt $\angle BEG = \frac{1}{2} \phi$, dat is: de hoek, onder welken de raaklijn de pool-ordinaat snijdt, is getijk aan den halven hoek, welken die ordinaat met de as QG maakt, en het is dus zeer gemakkelijk aan eenig gegeven punt der kromme eene raaklijn te trekken (b).

Door middel van deze eigenschap kan men ligtelijk de punten R en P bepalen, waarin de raaklijn loodrecht op, of evenwijdig aan de as is; want $\angle BGE = 180^\circ - \frac{3}{2} \phi$ zijnde, hebben wij, om de punten R te vinden, $180^\circ - \frac{3}{2} \phi = 90^\circ$, dat is $\phi = 60^\circ$; de $\angle RBG = \angle ABK'$ is

(b) Wijl $\angle BEG = \frac{1}{2} \angle EBG = \frac{1}{2} \angle DAB$ en $\angle DEB = \angle DBE = \angle ADB$ is, hebben wij $\angle DEG = \angle BEG + \angle DEB = \frac{1}{2} \angle DAB + \angle ADB = R$; (omdat $AD = DB$ is,) zoo dat $\angle DEG$ en dus ook $\angle DEO = R$; het verlengde van de raaklijnen GE moet dus door het punt O gaan, en hier door verkrijgen wij eene andere constructie voor die raaklijn; wij trekken namelijk BE , en AO evenwijdig aan BE , zoodanig dat $AO = 3 AB$ zij, trekkende dan OE , zal deze de raaklijn aan het punt E zijn: en dit stemt overeen met de constructie welke OZANAM in zijne *Dict. Mathém. Bladz. 15*, van dit vraagstuk geeft. (SCHMIDT.);

is dus 60° en bij gevolg $BK' = BR = AB$ en $BL = \frac{1}{2}BR = \frac{1}{2}AB$.

Voor de punten P , welke raaklijn evenwijdig aan de as is, moet $\angle BGE = 180^\circ - \frac{3}{2}\varphi = 0$ zijn en dus $\varphi = \angle PBG = 120^\circ$, zoo dat $\angle PBH = 60^\circ$ en dus $BR' = BK = AB$, waar uit volgt: $BP = 3AB$ en $BM = \frac{3}{2}AB$, zoo dat $AM = AH$; de punten R en P worden dus gevonden door deze eenvoudige *Constructie*. Beschrijf uit B , met AB als straal, eenen cirkel, snijdende de kromme in R en R' en den gegebenen cirkel in K en K' , dan zijn R en R' de punten, waar in de raaklijn loodrecht op de as QG is, en trekkende BK en BK' , tot dat zij de kromme in P en P' snijden; zullen P en P' de raakpunten zijn, waar in de raaklijn evenwijdig aan de as QG is. (c)

De

(c) De punten R en P kunnen ook op eene andere wijze worden bepaald; want voor de punten R moet BN , en voor de punten P moet NE een maximum zijn; nu is $BN = y \cos \varphi = 2a (\cos \varphi - \cos^3 \varphi)$ en $NE = y \sin \varphi = 2a (\sin \varphi - \cos \varphi \sin^3 \varphi)$, en wij hebben dus, door de differentialen gelijk 0 te stellen, voor de punten R , $-\sin \varphi \delta \varphi + 2 \cos \varphi \times \sin \varphi \delta \varphi = 0$, waaruit $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ of $\varphi = 60^\circ$ even als boven; terwijl de andere waarde $\sin \varphi = 0$, welke wij uit de vergelijking vinden en welke met $\varphi = 180^\circ$ overeenstemt, het punt aantoon, waar in BN een minimum is, en waaruit volgt $BQ = y = 2a (1 - \cos \varphi) = 4a$, het geen ook van zelf blijkbaar is.

Voor de punten P hebben wij nu $\cos \varphi \delta \varphi - \cos^3 \varphi \delta \varphi + \sin^3 \varphi \delta \varphi = 0$, waaruit wij vinden: $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$; dus $\varphi = 120^\circ$ even als boven, en eindelijk moeten wij nog aanmerken, dat de as QG zelve raaklijn van de kromme is in het dubbele punt B ; want wij vonden in het algemeen $\angle BGE = 180^\circ - \frac{3}{2}\varphi$; stellende dus $\varphi = 0$, wordt $\angle BGE = 180^\circ$, dat is de raaklijn valt op BG . (SCHMIDT.)

De punten P zijn ten uiterste merkwaardig; want zoekende voor deze punten den inhoud en de lengte der kromme, hebben wij, door in de vergelijkingen (β) en (δ), $\phi = 120^\circ$ te stellen,

1°. Fig. PERBP $= 2a^2\pi - \frac{2}{3}a^2\sqrt{3}$ maar BM $= \frac{2}{3}a$ en PM $= \frac{2}{3}a\sqrt{3}$ zijnde, is $\triangle PBM = \frac{2}{3}a^2$, en bijgevolg Fig. PMBEP $= 2a^2\pi$; daar wij nu voor den geheelen inhoud der kromme gevonden hebben $6a^2\pi$, blijkt hier uit: *dat de lijn PP' den inhoud in twee deelen verdeelt, welke tot elkander in reden zijn als twee tot drie.*

2°. Door in (δ) te stellen $\phi = 120^\circ$, vinden wij BEP $= 8a \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4a$; maar voor den halven omtrek BPQ vonden wij boven $8a$, waar uit dan volgt: *dat de lijnen PP' en BQ den omtrek in vier gelijke stukken verdeelen; en wij zouden nog vele merkwaardige zaken kunnen aantoonen, welke wij, om niet te langwijdig te zijn, met stilzwijgen moeten voorbij gaan.*

I. AANMERKING. Wanneer wij die Voorstel, door middel van de regthoekige coördinaten, hadden aangevat, zou de oplossing op verre na zoo gemakkelijk niet zijn afgeloopen; want, laat EN loodrecht op BG zijn, en BN $= x$ en EN $= u$ gesteld worden; dan is BE $= \sqrt{(x^2 + u^2)}$; trekkende nu HF; dan is BF : HB $=$ BN : BE, dat is $2a - \sqrt{(x^2 + u^2)} : 2a = x : \sqrt{(x^2 + u^2)}$, waar uit $2ax = 2a\sqrt{(x^2 + u^2)} - x^2 - u^2$, en deze vergelijking ten opzichte van u oplossen, de, verkrijgen wij, na herleiding:

$$u = \pm \sqrt{-(x^2 + 2ax - 2a^2) \pm 2a\sqrt{(-2ax + a^2)}} \\ \text{voor de vergelijking van onze kromme, en wij} \\ \text{zouden dus, om den inhoud te bepalen, hebben} \\ I = \int u dx = \pm \int dx \sqrt{-(x^2 + 2ax - a^2) \pm} \\ \dots 2a\sqrt{(-2ax + a^2)}}]$$

welke bijzondere kunstgrepen vereischen zou, om tot eenen integreabelen vorm te worden gebragt; en het zou met de reetificatie, waar voor wij

zouden hebben, $\delta x = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$ niet gemakkelijker afloopen. Dit voorbeeld toont dus ten duidelijkste aan, hoe zeer het gebruik der pool-vergelijking in sommige gevallen te verkiezen zij boven die, welke de rechthoekige coördinaten opleveren; want, ofschoon de eerste, in ons geval, eene transcendente vergelijking geeft, daar de laatste volkomen stekundig is, is het echter onzeklaar gebleken, hoe zeer de integratie van de eerste, boven die van de laatste te verkiezen is.

2. AANMERKING. De laatste vergelijking kan ons echter gemakkelijk de punten R (boven bepaald,) aantoonen; want in die punten moet natuurlijk het gedeelte $2a\sqrt{(-2ax + a^2)}$ dat onder het wortel-teeken staat gelijk 0 wezen, en wij hebben dus $-2ax + a^2 = 0$, waar uit $BL = x = \frac{1}{2}a$, het welk tot eene bevestiging dient van het gene wij boven uit de pool-vergelijking gevonden hebben.

3. AANMERKING. Wanneer FE niet gelijk, maar grooter of kleiner dan de middellijn HB is, en wij dan $FE = 2b$ stellen, dan hebben wij, in het algemeen, voor de pool-vergelijking $r = a(a - b \cos. \phi)$; is nu b grooter dan a , dan verkrijgt de kromme den vorm, als in Fig. 113; maar is b kleiner dan a , dan heeft de kromme eenen knoop, (zie Fig. 114); en de inhoud wordt even gemakkelijk gevonden; want, even als boven werkende, vinden wij, door de formule (a) te integreren, voor den inhoud van eenig stuk BB'REB', $I = (a^2 + 2b^2) \phi - a \sin. \phi (4b - a \cos. \phi)$; stellende nu hier in $\phi = 180^\circ$ en dus $\sin. \phi = 0$, vindt men voor den inhoud van de geheele kromme $2(a^2 + 2b^2)\pi$, dat is: de geheele inhoud is gelijk aan tweemaal den gegebenen cirkel, met viermaal den cirkel op de gegebene constante lijn, als middellijn beschreven;

ven; en men moet hier vooral opmerken, dat, in *Fig. 112*, waar in de kromme eenen knoop heeft, door den geheelen inhoud moet worden verstaan, de inhoud van *Fig. BRQR'B* + *Fig. BWB'WB*, welk laatste stuk, dat is, de inhoud van den knoop hier moet verstaan worden dubbel te liggen. Stellen wij eindelijk in deze uitdrukkingen $b = a$, dan verkrijgen wij wederom de uitkomst, welke wij boven voor *Fig. 110* vonden.

Maar, om de lengte der kromme te vinden, hebben wij, door in de formule (γ) onze vergelijking $y = 2 (b - a \cos \phi)$ over te brengen, $dz = 2 \delta \phi \sqrt{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \phi)} = \dots$
 $2 \sqrt{(b^2 + a^2)} \delta \phi \left(1 - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \cos \phi \right)^{\frac{1}{2}}, \dots$
 welke formule zoo gemakkelijk niet te integreren is; maar waar van de integraal altoos kan worden uitgedrukt in eene reeks, voortgaande volgens de sinusen van de veelvouden van ϕ (d); is echter $a = b$, dan herleid zich deze formule wederom tot die, welke wij voor *Fig. 110* hebben opgegeven.

4.

(d) De herleiding van $\int \delta \phi (1 \pm n \cos \phi)^{\frac{1}{2}}$ in eene reeks van den vorm $A \phi + B \sin \phi + C \sin 2 \phi + D \sin 3 \phi + \text{epz.}$ vindt men in de *Integraal-Rekening* van EULER I Deel, 6^{de} Hoofdst. probl 33 en 34: in deze formules worden $A, B, C, \text{enz.}$ uitgedrukt door reeksen, welke volgens de magten van n opklimmen, en op dat deze reeksen zouden convergeren, moet n kleiner dan 1 zijn. Zulks heeft nu in ons geval altoos plaats, want, a grooter of kleiner dan b zijnde, is $a^2 - 2ab + b^2$ altoos een volkomen vierkant en dus positief, waaruit volgt; dat $a^2 + b^2$ altoos grooter is dan $2ab$, en dat dus $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$ (het geen in ons geval de waarde van n is,) altoos eene eigenlijke breuk, dat is kleiner dan eenheid zal zijn. (SCHMIDT.)

4. AANMERKING. De hoek, welchen de raaklijn met de pool-ordinaat maakt, kan hier weder gemakkelijk worden aangewezen; want dezen hoek $= \varphi'$ stellende, hebben wij in de vergelijking (1) gevonden $\text{Cos. } \varphi' = \frac{\delta y}{\delta x}$, en hier in de

waarde van $y = x (b - a \text{Cos. } \varphi)$ gebragt, geeft

$$\text{Cos. } \varphi = \frac{2 a \text{Sin. } \varphi \delta \varphi}{2 \delta \varphi \sqrt{(a^2 + b^2) - 2 a b \text{Cos. } \varphi}} =$$

$$\dots\dots\dots \frac{a \text{Sin. } \varphi}{\sqrt{(a^2 + b^2) - 2 a b \text{Cos. } \varphi}}$$

en hier uit vloeijen de twee volgende opmerkingswaardige bijzonderheden voort.

1°. Dat in *Fig. 111*, waar b grooter dan a is, de kromme in B geen keerpunt heeft, zóo als in *Fig. 110*; maar, dat, in dit geval, de raaklijn loodrecht op de as QG staat; want voor dit punt is $\varphi = 0$ en dus $\text{Cos. } \varphi' = 0$ en $\varphi' = 90^\circ$.

2°. Dat, in *Fig. 112*, waar b kleiner dan a is, de raaklijnen aan het punt B gevonden worden, door in den gegebenen cirkel de koorde BT $= 2b$, dat is $= FE$ te nemen; want, in dit dubbele punt, is $y = 0$, en dus door de vergelijking

$$y = x (b - a \text{Cos. } \varphi), \text{Cos. } \varphi = \frac{b}{a} \text{ en bijgevolg}$$

$$\text{Sin. } \varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a},$$

$$\text{Cos. } \varphi' = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} = 1, \text{ dus } \varphi' = 0,$$

waar uit volgt, dat de raaklijn in dit punt op de ordinaat y valt, en offchoon y in dit punt $= 0$ is, moet zij echter aangemerkt worden, als in de rigting BO te liggen, omdat het punt B geboren wordt, wanneer de bewegende lijn in deze rigting ligt.

De punten R worden in *Fig. 111* en *112* op dezelfde wijze bepaald, als in *Fig. 110*; want

Z

stel-

stellende de differentiaal van $BN = y \cos. \varphi = 2$
 $(b - a \cos. \varphi) \cos. \varphi$ gelijk aan nul, hebben
 wij $2b \sin. \varphi \delta \varphi + 4a \cos. \varphi \sin. \varphi \delta \varphi = 0$;

waaruit $\cos. \varphi = \frac{b}{2a}$ en dus $y = 2(b - a \cos. \varphi)$
 $= 2(b - \frac{1}{2}b) = b$, zoo dat wij slechts uit
 B, met b als straal, een' cirkel te beschrijven
 hebben, om door deszelfs snijpunten met de
 kromme de punten R te vinden, waaruit dan ein-
 delijk nog volgt: *dat wanneer b grooter dan $2a$*
is, de kromme geen buigpunten meer hebben zal;
want dan snijdt deze laatste cirkel de kromme
niet meer, of wel, dan wordt $\cos. \varphi = \frac{b}{2a}$ groo-
ter dan 1 en dus φ imaginair.

5. AANMERKING. Het verder onderzoek
 dezer lijnen zou te lang zijn, om in deze oplos-
 sing plaats te kunnen vinden; wij laten zulks
 voor den lezer over, en eindigen met aan te mer-
 ken: dat de krommen van *Fig. 111* en *112* niet,
 zoo als die van *Fig. 110*, tot het geslacht der
 Epicycloïden behooren, maar tot dat der Con-
 choïden, welker directrix een cirkel is, en dat
 zij tot de Conchoïden zouden blijven behooren,
 wanneer het vaste punt B, in plaats van in den
 omtrek des gegebenen cirkels te liggen, binnen
 of buiten dien cirkel gelegen ware, welk alge-
 meener geval alle de voorgaande in zich bevat.

N^o. 122. Door

U. HUGUENIN.

Om de differentiale uitdrukking

$\frac{(3 + z^2) \delta z}{(1 + z^2)^4 (1 + 6z^2 + z^4)}$ te integreren, stelle men

$z =$

$z = a \times \frac{p+q}{p-q}$, (men kan ook $z = a \times \frac{p+q}{p-q}$ stellen,) zoodanig dat p en q veranderlijk zijn en a eene nader te bepalen standvastige grootheid is, en dan heeft men:

$$1+z = \frac{(a^2+1)p^2 + 2(a^2-1)pq + (a^2+1)q^2}{(p-q)^2}$$

$$3+z^2 = \frac{(a^2+3)p^2 + 2(a^2-3)pq + (a^2+3)q^2}{(p-q)^2}$$

$$1+6z^2+z^4 = \frac{[(a^4+6a^2+1)p^4 + 4(a^4-1)p^3q + 6(a^4-2a^2+1)p^2q^2 + 4(a^4-1)pq^3 + (a^4+6a^2+1)q^4]}{[p-q]^4}$$

$$\delta z = 2a \times \frac{p\delta q - q\delta p}{(p-q)^2}$$

Daar het ons nu vrijstaat, om aan a zulk eene waarde te geven, als wij tot ons oogmerk dien- stig oordeelen, zoo laat ons $a = 1$ stellen, wijl hier door de voorgaande uitdrukkingen eene zeer eenvoudige gedaante verkrijgen; want, door deze waarde aan te nemen, hebben wij:

$$z = \frac{p+q}{p-q}; 1+z = \frac{2(p^2+q^2)}{(p-q)^2}; 3+z^2 = \frac{4(p^2-pq+q^2)}{(p-q)^2};$$

$$1+6z^2+z^4 = \frac{8(p^4+q^4)}{(p-q)^4}; \delta z = \frac{2(p\delta q - q\delta p)}{(p-q)^2}$$

$$\frac{(3+z^2)\delta z}{(1+z^2)^2} = \frac{4(p^2-pq+q^2) \cdot (p\delta q - q\delta p)}{(p-q)^4}$$

$$\dots = \frac{(p-q)^2(p^2+q^2)\sqrt{[8(p^4+q^4)]}}{4(p^3+q^3) \cdot (p\delta q - q\delta p)}$$

$$\dots = \frac{(p^4 - q^4)\sqrt{[8(p^4+q^4)]}}{4(p^3+q^3)}$$

Daar nu p en q van elkander onafhankelijk zijn, kan er tusfchen dezelve zulk eene betrek- king worden aangenomen, dat de grootheid on- der het wortel-teeken rationaal worde, en zulks heeft klaarblijkelijk plaats, wanneer wij $p^4 + q^4 = 2$ stellen: dit doende, verkrijgt men:

$Z =$

$(3 +$

$$\frac{(3 + z^2) \delta z}{(1+z^2)^4 \sqrt{(1+6z^2+z^4)}} = \frac{2(p^3+q^3) \cdot (p\delta q - q\delta p)}{p^4 - q^4}$$

$$\dots = \frac{2p^4\delta q + 2pq^3\delta q - 2qp^3\delta p - 2q^4\delta p}{p^4 - q^4}$$

Maar uit $p^4 + q^4 = 2$ vindt men: $p^3\delta p = -q^3\delta q$; $p^4 = 2 - q^4$ en $q^4 = 2 - p^4$; gevolgelijk is $2p^4\delta q = 2(2 - q^4)\delta q$; $2pq^3\delta q = -2p^4\delta p$; $-2qp^3\delta p = 2q^4\delta p$; $-2q^4\delta p = -2(2 - p^4)\delta p$ en wanneer men nu deze waarden in de laatst voorgaande vergelijking overbrengt, dan verkrijgt men:

$$\frac{(3 + z^2) \delta z}{(1+z^2)^4 \sqrt{(1+6z^2+z^4)}} = \frac{4\delta q}{p^4 - q^4} - \frac{4\delta p}{p^4 - q^4} - \frac{2\delta q}{1 - q^4} - \frac{2\delta p}{1 - p^4}$$

Nu vindt men, door de ontbinding der breuken: (*)

$$\frac{2}{1 - q^4} = \frac{1}{1 - q^2} + \frac{1}{1 + q^2} = \frac{1}{2(1 - q)} + \frac{1}{2(1 + q)} + \frac{1}{1 + q^2}$$

$$\frac{2}{1 - p^4} = \frac{1}{1 - p^2} + \frac{1}{1 + p^2} = \frac{1}{2(1 - p)} + \frac{1}{2(1 + p)} + \frac{1}{1 + p^2}$$

Derhalve wordt

$$\int \frac{(3 + z^2) \delta z}{(1+z^2)^4 \sqrt{(1+6z^2+z^4)}} = \int \left[\frac{\delta q}{2(1 - q)} + \frac{\delta q}{2(1 + q)} + \frac{\delta q}{1 + q^2} \right]$$

$$\dots - \int \left[\frac{\delta p}{2(1 - p)} + \frac{\delta p}{2(1 + p)} + \frac{\delta p}{1 + p^2} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \text{Log.}(1 - q) + \frac{1}{2} \text{Log.}(1 + q) + B. \text{Tang. } q$$

$$+ \frac{1}{2} \text{Log.}(1 - p) - \frac{1}{2} \text{Log.}(1 + p) - B. \text{Tang. } p$$

$$= \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1+q}{1-q} + \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1-p}{1+p} + B. \text{Tang. } q - B. \text{Tang. } p$$

$$\dots = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{(1+q) \cdot (1-p)}{(1-q) \cdot (1+p)} - B. \text{Tang.} \frac{p - q}{1 + pq} \quad (\dagger)$$

Nu

(*) Zie de wijze, waarop breuken in andere kunnen ontleed worden, bij FAS, *Diff. en Integr. Rek.* en bij DE GELDER, II *Curs.* §. 567.

(†) Deze laatste herleiding verdient, daar zij, in de *In-*

$$\begin{aligned}
 \text{Nu is uit } x &= \frac{p+q}{p-q} \text{ en } \sqrt[4]{(1+6x^2+x^4)} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{8(p^4+q^4)}}{p-q} = \frac{2}{p-q}, \text{ vooreerst } p-q \\
 &= \frac{2}{\sqrt[4]{(1+6x^2+x^4)}}, \text{ en verder } p+q = x(p-q) \\
 &= \frac{2x}{\sqrt[4]{(1+6x^2+x^4)}}, \text{ waar uit dan volgt: } \dots \\
 p &= \frac{x+1}{\sqrt[4]{(1+6x^2+x^4)}} \text{ en } q = \frac{x-1}{\sqrt[4]{(1+6x^2+x^4)}}; \\
 p+q &= \frac{\sqrt[4]{(1+6x^2+x^4)} + (x-1)}{\sqrt[4]{(1+6x^2+x^4)}}; \quad p-q = \dots
 \end{aligned}$$

Integraal-Rekening van den Heer F a s, het eenig Hol-
landsch werk, dat tot nog toe over dit onderwerp be-
staat, niet voorkomt, eenige opheldering. De uitdruk-
king: *B. Tang. x*, of, zoo als anderen het schrijven,
Arc. Tang. x, wil zeggen: *de boog wiens tangens een*
getal is gelijk aan x: de boog zelf wordt dus door
geene letter of eenig getal uitgedrukt; maar door de ge-
heele uitdrukking *B. Tang. x*. Stellen wij nu *B. Tang. x*
 $= r$ en *B. Tang. y* $= s$; dan is *Tang. r* $= x$ en
Tang. s $= y$: nu is (zie IV Stelh. VIII B. Reg.)

$$Tang.(r+s) = \frac{Tang.r + Tang.s}{1 - Tang.r Tang.s} = \frac{x+y}{1-xy};$$

de boog wiens Tangens $= \frac{x+y}{1-xy}$ is, is derhalve ge-
lijk $r+s = B. Tang.x + B. Tang.y$. Op dezelfde
wijze vindt men: dat *B. Tang. q* $= B. Tang.p$ $=$

$$B. Tang. \frac{q-p}{1+pq} = -B. Tang. \frac{p-q}{1+pq} \text{ zal zijn.}$$

(DE GELDER.)

$$= \frac{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4) - (z - 1)}}{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)}}; 1 + p \dots$$

$$= \frac{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4) + (z + 1)}}{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)}}; 1 - p \dots$$

$$= \frac{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4) - (z + 1)}}{\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)}}; pq \dots$$

$$= \frac{z^2 - 1}{\sqrt{(1 + 6z^2 + z^4)}}; 1 + pq \dots$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + 6z^2 + z^4) + (z^2 - 1)}}{\sqrt{(1 + 6z^2 + z^4)}}; \text{brengt men}$$

deze alle in de gevondene integraal over; dan verkrijgt men voor de herleide integraal der voorgestelde functie deze uitdrukking:

$$\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{[\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)+(z-1)}][\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)-(z+1)}]}{[\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)-(z-1)}][\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)+(z+1)}]}$$

$$\dots - B. \text{Tang.} \frac{2\sqrt{(1+6z^2+z^4)}}{\sqrt{(1+6z^2+z^4)} + z^2 - 1}$$

waar bij nog eene standvastige grootheid moet gevoegd worden, welke van de voorwaarden van het voorstel, waar uit de gegevene differentiale uitdrukking gesproken is, afhankelijk zal zijn.

De Heer EULER heeft, (zie *Nova Acta Petrop. Tom. IX pag. 127*) langs eenen anderen weg, eene andere waarde voor de Integraal gevonden, welke, door eene rekenfout in de substitutie begaan te hebben, van de onze afwijkt.

N^o. 123. Door

U. HUGUENIN.

Ten einde $\frac{(1 - z^2)^2 \delta z}{(1 + z^2) \sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)^3}}$ te integreren, zullen wij, gelijk in het voorgaande werkstuk, $z = a \times \frac{p - q}{p + q}$ stellen, zijnde p en q veranderlijke en a eene standvastige grootheid, die nader bepaald moet worden. Hier door heeft men dan: $1 + z^2 = \frac{(p + q)^2 + a^2(p - q)^2}{(p + q)^2}$; $(1 - z^2)^2 = \left[\frac{(p + q)^2 - a^2(p - q)^2}{(p + q)^2} \right]^2$; $1 + 6z^2 + z^4 = 1 + \frac{6a^2(p - q)^2}{(p + q)^2} + \frac{a^4(p - q)^4}{(p + q)^4} = [(a^4 + 6a^2 + 1)p^4 - 4(a^4 - 1)p^3q + 6(a^4 - 2a^2 + 1)p^2q^2 - 4(a^4 - 1)pq^3 + (a^4 + 6a^2 + 1)q^4] : [p + q]^4$, en eindelijk $\delta z = \frac{2a(q\delta p - p\delta q)}{(p + q)^2}$.

Het is zichtbaar, dat de wortel-grootheid, door $a = \pm 1$ te stellen, de eenvoudigste gedaante zal verkrijgen, omdat de drie middelste termen van dezelve, door elk eene van deze twee waarden, nul worden: dan, daar het bij de overige waardijen om het even is, of men a positief of negatief neme, zullen wij $a = +1$ stellen, en dan heeft men:

$$1 + z^2 = \frac{2(p^2 + q^2)}{(p + q)^2}; (1 - z^2)^2 = \frac{16p^2q^2}{(p + q)^4}$$

$$\sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)} = \frac{\sqrt[4]{8(p^4 + q^4)}}{p + q}; \delta z = \frac{2(q\delta p - p\delta q)}{(p^2 + q^2)^2}$$

$$\frac{(1 - z^2)^2 \delta z}{(1 + z^2) \sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)}} = \frac{16(p - q)(q\delta p - p\delta q)p^4q^2}{(p^4 - q^4) \sqrt[4]{8^3 \times (p^4 + q^4)^3}}$$

Om

Om nu deze uitdrukking rationaal te maken en tevens eene betrekking tusschen p en q vast te stellen, zullen wij wederom $p^4 + q^4 = 2$ aannemen, waar door $(p^4 + q^4)^3 = 8$, en

$$\frac{\sqrt[4]{[8^3(p^4 + q^4)]}}{(1 - z^2)^2 \delta z} = 8 \text{ wordt en } \frac{2p^3 q^3 \delta p - 2p^4 q^2 \delta q - 2p^2 q^4 \delta p + 2p^3 q^3 \delta q}{p^4 - q^4}$$

$$\frac{(1 + z^2) \sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)^3}}{(1 + z^2)^2 \delta z} = \frac{2q^2 \delta q}{1 - q^4} + \frac{2p^2 \delta p}{1 - p^4}$$

Maar uit $p^4 + q^4 = 2$ volgt: $p^4 = 2 - q^4$; $q^4 = 2 - p^4$ en $p^3 \delta p = -q^3 \delta q$, en men verkrijgt door het overbrengen van deze waarden:

$$\frac{(1 - z^2)^2 \delta z}{(1 + z^2) \sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)^3}} = -\frac{2q^2 \delta q}{1 - q^4} + \frac{2p^2 \delta p}{1 - p^4}$$

De gebrokenen in het tweede lid dezer vergelijking voorkomende, worden aldus ontleed:

$$\frac{2q^2}{1 - q^4} = \frac{1}{2(1 - q)} + \frac{1}{2(1 + q)} - \frac{1}{1 + q^2}$$

derhalve is

$$\int \frac{2q^2 \delta q}{1 - q^4} = -\frac{1}{2} \text{Log.}(1 - q) + \frac{1}{2} \text{Log.}(1 + q) - B. \text{Tang. } q$$

of wel:

$$\int \frac{2q^2 \delta q}{1 - q^4} = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1 + q}{1 - q} - B. \text{Tang. } q$$

$$\int \frac{2p^2 \delta p}{1 - p^4} = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1 + p}{1 - p} - B. \text{Tang. } p$$

waar uit dan eindelijk volgt: (zie noot *Bladz. 354.*)

$$\int \frac{(1 - z^2)^2 \delta z}{(1 + z^2) \sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)^3}} = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{(1 + p)(1 - q)}{(1 - p)(1 + q)} - B. \text{Tang.} \frac{p - q}{1 + pq}$$

Om nu p en q in functien van z over te brengen, bepale men derzelver waarde met behulp

$$\text{van de vergelijkingen } \sqrt[4]{(1 + 6z^2 + z^4)} = \frac{2}{p + q} \text{ en}$$

en $\frac{p}{p+q}$, het geen, op dezelfde wijze, als in het voorgaande werkstuk, geschieden kan, en dan wordt de integraal der gegebene functie

$$+ \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{[\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)} + (z+1)][\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)} + (z-1)]}{[\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)} - (z+1)][\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)} - (z-1)]}$$

$$- B. \text{Tang.} \frac{2z \sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)}}{\sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)} - (z^2-1)} + \text{Const.}$$

welke integraal met die van den Heer EULER (zie *Nova Acta. Petrop. Tom. IX. pag. 118.*) overeenstemt.

Uit deze integraal kan men nu, door in plaats van z te stellen $z \sqrt{-1}$, dadelijk de integraal van

$$\frac{(1+z^2)^2 dz}{(1-z^2) \sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}}$$

afleiden; dan, vermits men door deze substitutie op onbestaanbare (*imaginaire*) Logarithmen en Tangenten vervalt, moeten deze, met behulp der twee volgende formules,

$$\frac{1}{x \sqrt{-1}} \times \text{Log.} \frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} = B. \text{Tang.} \frac{b}{a}. (1)$$

$$\text{Log.} \frac{a-c}{a+c} = 2 \sqrt{-1} \times B. \text{Tang.} \frac{c \sqrt{-1}}{a}. (2)$$

tot bestaanbare vormen worden overgebracht. (*) Men

(*) Daar deze twee formules bij onze Hollandsche Schrijvers over de beginselen niet voorkomen, zal het noodig zijn, dezelve kortelijk te betoogen. Men weet, (zie II Curs. Pag. 595) dat

$$\text{Log.} \frac{1+z}{1-z} = 2 \left(z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{7} z^7 + \frac{1}{9} z^9 + \frac{1}{11} z^{11} \text{ enz.} \right)$$

ONTBINDINGEN VAN DE

Men stelde dan in onze verkregene integraal, \sqrt{z} in plaats van x , dan verkrijgt men, omdat $\delta x = \delta z \sqrt{z} - 1$ wordt,

... nu $z = \frac{y}{a}$ dan wordt,

$$\log \frac{a + \sqrt{z}}{a - \sqrt{z}} = a \left[\frac{y}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{a} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y}{a} \right)^5 + \dots + \frac{1}{7} \left(\frac{y}{a} \right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{y}{a} \right)^9 + \text{enz.} \right]$$

In deze laatste $y = b \sqrt{z} - 1$ stellende, dan is $y^2 = b^2 z - 2b \sqrt{z} + 1$; $y^3 = b^3 \sqrt{z} - 3b^2 + 2b \sqrt{z}$; $y^4 = b^4 - 4b^3 \sqrt{z} + 6b^2 - 4b \sqrt{z} + 1$; $y^5 = b^5 \sqrt{z} - 5b^4 + 10b^3 \sqrt{z} - 10b^2 + 5b \sqrt{z} - 1$; $y^6 = b^6 - 6b^5 \sqrt{z} + 15b^4 - 20b^3 \sqrt{z} + 15b^2 - 6b \sqrt{z} + 1$; $y^7 = b^7 \sqrt{z} - 7b^6 + 21b^5 \sqrt{z} - 35b^4 + 35b^3 \sqrt{z} - 21b^2 + 7b \sqrt{z} - 1$ enz. en wij hebben derhalve:

$$\log \left(\frac{a + b \sqrt{z} - 1}{a - b \sqrt{z} - 1} \right) = a \sqrt{z} - 1 \times \left[\frac{b}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{b}{a} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{b}{a} \right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{b}{a} \right)^9 - \dots \right]$$

maar (zie H. G. S. 620.) de reeks $\frac{b}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{b}{a} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{b}{a} \right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{b}{a} \right)^9 - \text{enz.}$ is $= B. \text{Tang.} \frac{b}{a}$; derhalve wordt

de laatste vergelijking, na dezelve door $a \sqrt{z} - 1$ gedeeld te hebben,

$$\frac{1}{a \sqrt{z} - 1} \times \log \left(\frac{a + b \sqrt{z} - 1}{a - b \sqrt{z} - 1} \right) = B. \text{Tang.} \frac{b}{a}$$

Stelt men in deze laatste $b \sqrt{z} - 1 = -c$, dan is

$$b = \frac{-c}{\sqrt{z} - 1} = \frac{-c \sqrt{z} - 1}{\sqrt{z} - 1 \times \sqrt{z} - 1} = \frac{-c \sqrt{z} - 1}{-1} = +c \sqrt{z} - 1, \text{ en wij hebben, na alles met } a \sqrt{z} - 1 \text{ vermenigvuldigd te hebben,}$$

$$\log \frac{a - c}{a + c} = a \sqrt{z} - 1 \times B. \text{Tang.} \frac{c \sqrt{z} - 1}{a}$$

waaruit de gronden, waarop de aangehaalde formules steunen, blijkbaar zijn. (DE GELDER.)

$$\int \frac{(1+z^2)^2 \delta z \sqrt{-1}}{(1-z^2)^4 \sqrt{(1-6z^2+z^4)^3}} = \sqrt{-1} \cdot \int \frac{(1+z^2)^2 \delta z}{(1-z^2)^4 \sqrt{(1-6z^2+z^4)}} =$$

$$\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} + (1+z\sqrt{-1})][\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} - (1-z\sqrt{-1})]}{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} - (1+z\sqrt{-1})][\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} + (1-z\sqrt{-1})]}$$

$$\dots - B. \text{Tang.} \frac{2 \sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} \times z \sqrt{-1}}{\sqrt{(1-6z^2+z^4)} + z^2 + 1}$$

of wel, alles door $\sqrt{-1}$ deërende:

$$\int \frac{(1+z^2)^2 \delta z}{(1+z^2)^4 \sqrt{(1-6z^2+z^4)^3}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{Log.} \frac{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} + 1 + z\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} + 1 - z\sqrt{-1}}$$

$$\dots + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{Log.} \frac{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} - 1 + z\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} - 1 - z\sqrt{-1}} \dots$$

$$+ \sqrt{-1} \times B. \text{Tang.} \frac{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} \times 2z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-6z^2+z^4)} + z^2 + 1}$$

Men stelle nu, in de grondformule (1), $a = \sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} + 1$ en $b = z$, dan wordt het eerste gedeelte der bovenstaande integraal:

$$B. \text{Tang.} \frac{z}{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} + 1} \dots (p)$$

en het tweede gedeelte van dezelve:

$$B. \text{Tang.} \frac{z}{\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} - 1} \dots (q)$$

en stelt men in de grondformule (2)

$2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} = 0$ en $\sqrt{(1-6z^2+z^4)} + z^2 + 1 = a$, dan wordt het derde gedeelte der gevondene integraal:

$$\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{\sqrt{(1-6z^2+z^4)} - 2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} + z^2 + 1}{\sqrt{(1-6z^2+z^4)} + 2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)} + z^2 + 1}$$

of

of eenvoudiger,

$$\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}-z]^2+1}{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+z]^2+1}$$

en telt men nu de bogen, in de uitdrukkingen (p) en (q) voorkomende, volgens de noot op *Bladz.* 354. bij elkander, vindt men voor de som van dezelve,

$$-B. \text{Tang.} \frac{2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}}{1+z^2-\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}}$$

en wij hebben dan eindelijk

$$\int \frac{(1+z^2)^2 dz}{(1-z^2)\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)^3}} = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}-z]^2+1}{[\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}+z]^2+1} \\ - B. \text{Tang.} \frac{2z\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}}{1+z^2-\sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)}} + \text{Const.}$$

AANMERKING. Wij hadden deze differentiaal uitdrukking ook, zonder hulp van de eerste integraal, regstreeks kunnen integreren, door . .

$z = a \times \frac{p-q}{p+q}$ aan te nemen; doch als dan

zou men, om aan de uitdrukkingen de eenvoudigste gedaante te geven, $a = \sqrt{-1}$ hebben moeten stellen, waar door men dan imaginaire integralen zou verkregen hebben, welke, met behulp der formules (1) en (2), tot bestaانبare vormen kunnen overgebracht worden.

De Heer EULER acht deze laatste integraal deswegens merkwaardig, wijl het hem toefschijnt, onmogelijk te zijn, dezelve, zonder hulp der imaginaire grootheden, te integreren.

N^o. 124. Door

U. HUGUENIN.

Om in de voorgestelde differentiaal
 δx

de grootheid onder het

$(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}$
 wortel-teeken tot eene functie van de vierde magt
 te doen opklimmen en tevens rationaal te maken,
 is het noodig x door eene algemeene functie van
 den tweeden graad uit te drukken: wij zullen

daarom $x = \frac{a(p^2 + bpq + q^2)}{(p+q)^2}$ stellen, zodanig

dat p en q veranderlijke en a en b nader te
 bepalen standvastige grootheden zijn. Hier door
 vindt men:

$$2x^2 - 1 = [(2a^2 - 1)p^4 + 4(a^2b - 1)p^3q + \dots + (2a^2b^2 + 4a^2 - 6)p^2q^2 + 4(a^2b - 1)pq^3 + \dots + (2a^2 - 1)q^4] : (p+q)^4$$

$$1+x = \frac{(a+1)p^2 + (ab+2)pq + (a+1)q^2}{(p+q)^2}$$

Wanneer men in de eerste dezer uitdrukkingen
 $a = \pm 1$ en $b = + 1$ stelt, dan verdwijnen de
 drie middelste termen van den teller en $2x^2 - 1$

wordt $\frac{p^4 + q^4}{(p+q)^4}$; om echter de tweede uitdruk-
 king tevens tot den eenvoudigsten vorm te bren-
 gen; is het noodig; dat men $a = - 1$ en $b =$
 $+ 1$ stelle; dit doende heeft men:

$$x = -\frac{p^2 + pq + q^2}{(p+q)^2}; (1+x) = \frac{pq}{(p+q)^2}; 2x^2 - 1 = \frac{p^4 + q^4}{(p+q)^4}$$

$$\delta x = \frac{q^2 \delta p - pq \delta p + p^2 \delta q - pq \delta q}{(p+q)^3}$$

$$\frac{\delta x}{\delta x} = \frac{q^2 \delta p - pq \delta p + p^2 \delta q - pq \delta q}{q^2 \delta p - pq \delta p + p^2 \delta q - pq \delta q}$$

$$(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)} = pq\sqrt[4]{(p^4+q^4)}$$

Daar

364. ONTBINDINGEN VAN DE

Daar wij nu de vrijheid hebben, om tusſchen p en q eenige betrekking aan te nemen, zoo kunnen wij de laatste differentiaal uitdrukking dadelijk rationaal maken; indien wij aannemen, dat $p^4 + q^4 = 1$ zij; dit stellende, wordt

$$\frac{\delta x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{q\delta p}{p} - \delta p + \frac{p\delta q}{q} - \delta q$$

voorts volgt uit $p^4 + q^4 = 1$ (door differentie-

$$\text{ren.}) p^3\delta p + q^3\delta q = 0, \text{ of } \delta p = -\frac{q^3\delta q}{p^3}$$

$$\text{en } \delta q = -\frac{p^3\delta p}{q^3}; \text{ derhalve is } \frac{\delta p}{p} = -\frac{q^3\delta q}{p^4}$$

$$= -\frac{q^3\delta q}{1-q^4}, \text{ en even zoo } \frac{\delta q}{q} = -\frac{p^3\delta p}{1-p^4}$$

Deze waarden in de laatste differentiaal vergelijking overgebracht hebbende, heeft men:

$$\frac{\delta x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = -\frac{q^3\delta q}{1-q^4} - \delta q - \frac{p^3\delta p}{1-p^4} - \delta p = -\frac{\delta q}{1-q^4} - \frac{\delta p}{1-p^4}$$

$$\text{Maar nu is } \frac{\delta q}{1-q^4} = \frac{1}{4} \frac{\delta q}{1-q} + \frac{1}{4} \frac{\delta q}{1+q} + \frac{1}{2} \frac{\delta q}{1+q^2}; \text{ derhalve heeft men:}$$

$$\int \frac{\delta q}{1-q^4} = \frac{1}{4} \text{Log.} \frac{1+q}{1-q} + \frac{1}{4} B. \text{Tang.} q$$

$$\int \frac{\delta p}{1-p^4} = \frac{1}{4} \text{Log.} \frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{4} B. \text{Tang.} p$$

en diens volgens wordt

$$\frac{\delta x}{(1+x)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \left[\frac{1}{4} \text{Log.} \frac{1+q}{1-q} + \frac{1}{4} \text{Log.} \frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{2} B. \text{Tang.} q + \frac{1}{2} B. \text{Tang.} p \right]$$

eindelijk wordt, door de logarithmen tot één te brengen, de geheele integraal gelijk aan

$$= \left[\frac{1}{4} \text{Log.} \frac{(1+q)(1+p)}{(1-q)(1-p)} + \frac{1}{2} B. \text{Tang.} \frac{p+q}{1-pq} \right]$$

Nu

(Nu is $2x^2 - 1 = \frac{p^2 + q^2}{(p + q)^2} = \frac{1}{(p + q)^2}$;

Dus $\sqrt[4]{(2x^2 - 1)} = \frac{1}{p + q}$ en $p + q = \dots$

$\frac{1}{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$; voorts $1 + x = \frac{pq}{(p + q)^2} =$

$\frac{pq}{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$, of $pq = \frac{1 + x}{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$; hier

uit $\frac{p + q}{1 - pq} = \frac{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)} - (x + 1)}$, wij

ders $(1 + q)(1 + p) = 1 + (p + q) + pq =$

$1 + x + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)} + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}$ en

$(1 - q)(1 - p) = 1 - (p + q) + pq =$

$1 + x + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)} - \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}$

$\frac{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$

De integraal der gegeven differentiaal functie wordt dan, na het overbrengen van alle deze waarden:

$-\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1 + x + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)} + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{1 + x + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)} - \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$

$\dots - \frac{1}{2} B. \text{Tang.} \frac{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)} - (x + 1)}$

of wel, door de teekens om te keeren. (*)

$\frac{1}{2} \text{Log.}$

(*) Het omkeeren der teekens van deze integraal

geeft hier op, dat $\text{Log.} \frac{s + n}{s - n} = - \text{Log.} \frac{s - n}{s + n}$ is,

want daar

Log.

$$\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)} - \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)} + \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}} \\ \dots + \frac{1}{2} B. \text{Tang.} \frac{\sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{(1+x) - \sqrt{(2x^2 - 1)}}$$

zoo als de Heer EULER, (zie *Nov. Act. Petrop. Tom. IX pag. 98 et seq.*) langs eenen geheel anderen weg gevonden heeft.

AANMERKING. Uit de gevondene integraal laat de integraal van $\frac{1}{\delta x}$

$$\frac{(1-x) \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}{\delta x}$$

= $\frac{\delta x}{(x-1) \sqrt[4]{(2x^2 - 1)}}$ zich dadelijk afleiden; door in de gevondene integraal x voor

x en δx voor δx te stellen, waar, door $\frac{\delta x}{1+x} = -\frac{\delta x}{1-x} = \frac{\delta x}{x-1}$ wordt en men

verkrijgt als dan:

$$\text{Log.} \frac{1+x}{1-x} = 2 \times \left[\frac{u}{r} + \frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{r^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{u^5}{r^5} + \dots \right]$$

is; wordt, door u negatief te nemen,

$$\text{Log.} \frac{1-x}{1+x} = -2 \times \left[\frac{u}{r} + \frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{r^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{u^5}{r^5} + \dots \right]$$

waar uit het gestelde blijkt; stellende nu $r =$

$1 + x + \sqrt{(2x^2 - 1)}$ en $u = \sqrt{(2x^2 - 1)}$, ziet men, hoe in het logarithmische deel het teeken $-$ in $+$ kan veranderd worden. Voor den cirkelboog is de tangens, door de teekens van den teller om te keeren, van positief tot negatief overgegaan; daar nu de tangens van eenen negativen boog negatief wordt, en omgekeerd, wordt hier door de grond van het omkeeren van het teeken in den cirkelboog klaarblijkelijk. (DE GELDER.)

$$\int \frac{\delta x}{(x-1)\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{1}{4} \text{Log} \cdot \frac{1-x+\sqrt{(2x^2-1)}-\sqrt[4]{(2x^2-1)}}{1-x+\sqrt{(2x^2-1)}+\sqrt[4]{(2x^2-1)}} \\ + \frac{1}{2} B. \text{Tang} \cdot \frac{\sqrt{(2x^2-1)}}{1-x-\sqrt{(2x^2-1)}}.$$

Nº. 125. Door

U. HUGUENIN.

Om $\frac{\delta z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}}$ te integreren, zul-

len wij $z = a \times \frac{p-q}{p+q}$ stellen en daar bij aan-
nemen, dat a eene nader te bepalen standvastige
grootheid zij. Hier door wordt dan:

$$1+z^2 = \frac{(a^2+1)p^2 - 2(a^2-1)pq + (a^2+1)q^2}{(p+q)^2} = \\ \frac{(a^2+1)p^2 - (a^2-3)pq + (a^2-3)pq^2 + (a^2+1)q^3}{(p+q)^3} \\ 3-z^2 = \frac{(3-a^2)p^2 + 2(a^2+3)pq + (3-a^2)q^2}{(p+q)^2} \\ \delta z = 2a \times \frac{q\delta p - p\delta q}{(p+q)^2}.$$

De twee eerste dezer uitdrukkingen verkrijgen
den eenvoudigsten vorm, wanneer men $a^2 = 3$
of $a = \sqrt{3}$ stelt; want hier door heeft men:

$$z = \frac{(p-q)\sqrt{3}}{(p+q)}; 1+z^2 = \frac{4(p^2+q^2)}{(p+q)^2}; 3-z^2 = \frac{12pq}{(p+q)^2} \\ \delta z = \frac{(q\delta p - p\delta q)2\sqrt{3}}{(p+q)^2}$$

en brengt men deze waarden in de gegevene dif-
ferentiaal over, dan wordt:

$$\frac{\delta z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}} = \frac{2\sqrt{3}}{12\sqrt[3]{4}} \times \frac{(p+q)(q\delta p - p\delta q)}{pq\sqrt[3]{(p^2+q^2)}} =$$

$$\dots \frac{(pq + q^3)\delta p - (p^2 + pq)\delta q}{pq\sqrt[3]{(p^3 + q^3)}} \times \frac{3\sqrt[3]{9}}{4\sqrt{3}}$$

stelt men nu, ten einde de uitdrukking rationaal te maken, $p^3 + q^3 = 1$, zoo is $p^3 = 1 - q^3$; $q^3 = 1 - p^3$, $p^2\delta p + q^2\delta q = 0$; $\delta p = -\frac{q^2\delta q}{p^2}$ en $\delta q = -\frac{p^2\delta p}{q^2}$, en men heeft derhalve:

$$\frac{\delta z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4\sqrt{3}} \left[\delta p + \frac{q\delta p}{p} - \frac{p\delta q}{q} - \delta q \right] =$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{4\sqrt{3}} \left[\delta p - \frac{q^3\delta q}{p^3} + \frac{p^3\delta p}{q^3} - \delta q \right] = \frac{\sqrt[3]{2}}{4\sqrt{3}} \left[\frac{\delta p}{1-p^3} - \frac{\delta q}{1-q^3} \right]$$

Maar door het verdeelen der breuken vindt men:

$$\frac{\delta p}{1-p^3} = \frac{1}{3} \left[\frac{\delta p}{1-p} + \frac{p\delta p + 2\delta p}{p^2+p+1} \right] = \dots$$

$$\dots \frac{1}{3} \left[\frac{\delta p}{1-p} + \frac{1}{2} \times \frac{2p\delta p + \delta p}{p^2+p+1} + \frac{1}{2} \times \frac{-\delta p}{p^2+p+1} \right]$$

en het gebroken $\frac{\delta q}{1-q^3}$ wordt op dezelfde wijze in breuken, aan dezen gelijkvormig zijnde, verdeeld. Door integreren vindt men nu:

$$\int \frac{\delta p}{1-p^3} = \frac{1}{3} \left[-\text{Log.}(1-p) + \frac{1}{2} \text{Log.}(1+p+p^2) + \sqrt{3} \times B. \text{Tang.} \frac{2p+1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\dots = \frac{1}{3} \text{Log.} \frac{\sqrt{(1+p+p^2)}}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times B. \text{Tang.} \frac{2p+1}{\sqrt{3}}$$

Doch deze uitdrukking kan vereenvoudigd worden; want $\frac{1}{3} \text{Log.} \frac{\sqrt{(1+p+p^2)}}{1-p} = \dots$

$$\frac{1}{3} \text{Log.} \frac{\sqrt{(1+p+p^2)}(1-p)}{(1-p)\sqrt{(1-p)}} = \frac{1}{3} \text{Log.} \frac{(1-p^3)^{\frac{1}{2}}}{(1-p)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{1}{3} \text{Log.} \frac{\sqrt[3]{(1-p^3)}}{1-p} = \frac{1}{3} \text{Log.} \frac{q}{1-p} \quad \text{Derhalve is}$$

S

$$\int \frac{dp}{1-p^3} = \frac{1}{3} \text{Log.} \frac{q}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot B \cdot \text{Tang.} \frac{2p+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{dq}{1-q^3} = \frac{1}{3} \text{Log.} \frac{p}{1-q} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot B \cdot \text{Tang.} \frac{2q+1}{\sqrt{3}}$$

en nu is:

$$\int \frac{dz}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{8\sqrt{3}} \times \left[\text{Log.} \frac{q}{1-p} - \text{Log.} \frac{p}{1-q} \right]$$

$$+ \frac{\sqrt[3]{2}}{12} \times \left[B \cdot \text{Tang.} \frac{2p+1}{\sqrt{3}} - B \cdot \text{Tang.} \frac{2q+1}{\sqrt{3}} \right] =$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{8\sqrt{3}} \text{Log.} \frac{q(1-q)}{p(1-p)} + \frac{\sqrt[3]{2}}{12} \left[B \cdot \text{Tang.} \frac{2p+1}{\sqrt{3}} - B \cdot \text{Tang.} \frac{2q+1}{\sqrt{3}} \right]$$

Om nu p en q in functien van z te verkrijgen, merke men aan: dat $z = \frac{p-q}{p+q} \sqrt{3}$ en

$$\sqrt[3]{(1+z^2)} = \frac{\sqrt[3]{4}}{p+q} \text{ is, en hier uit volgt dan:}$$

$$p+q = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(1+z^2)}}; p-q = \frac{(p+q)z}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} \times \frac{z}{\sqrt[3]{(1+z^2)}}; p = \frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}+z}{\sqrt[3]{(1+z^2)}}; q =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}-z}{\sqrt[3]{(1+z^2)}}; 1-p = \frac{[\sqrt[3]{2}(1+z^2)-1]\sqrt{3}-z}{2\sqrt{3} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{(1+z^2)}}$$

$$\text{en } 1-q = \frac{[\sqrt[3]{2}(1+z^2)-1]\sqrt{3}+z}{2\sqrt{3} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{(1+z^2)}}, \text{ en}$$

dan wordt eindelijk:

$$\frac{q(1-q)}{p(1-p)} = \frac{[(\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1)\sqrt{3+z}]\times[\sqrt{3-z}]}{[(\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1)\sqrt{3-z}]\times[\sqrt{3+z}]}$$

$$\frac{2p+1}{\sqrt{3}} = \frac{[2+\sqrt[3]{2(1+z^2)}]\sqrt{3+2z}}{3\sqrt[3]{2(1+z^2)}}$$

$$\frac{2q+1}{\sqrt{3}} = \frac{[2+\sqrt[3]{2(1+z^2)}]\sqrt{3-2z}}{3\sqrt[3]{2(1+z^2)}}$$

en (zie noot op *Bladz.* 354.) *B. Tang.* $\frac{2p+1}{\sqrt{3}}$

— *B. Tang.* $\frac{2q+1}{\sqrt{3}}$ wordt gelijk aan

$$B. Tang. \frac{3z\sqrt[3]{2(1+z^2)}}{3[\sqrt[3]{4(1+z^2)^2}+\sqrt[3]{2(1+z^2)}+1]-z^2}$$

en men verkrijgt dan ten laatste voor

$$\int \frac{\delta z}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1+z^2)}} \text{ deze uitdrukking:}$$

$$+ \frac{\sqrt[3]{2}}{8\sqrt{3}} \text{Log.} \frac{[(\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1)\sqrt{3+z}]\times[\sqrt{3-z}]}{[(\sqrt[3]{2(1+z^2)}-1)\sqrt{3-z}]\times[\sqrt{3+z}]}$$

$$+ \frac{\sqrt[3]{2}}{12} B. Tang. \frac{3z\sqrt[3]{2(1+z^2)}}{3[\sqrt[3]{4(1+z^2)^2}+\sqrt[3]{2(1+z^2)}+1-z^2} + Const.$$

AANMERKING. De Heer RUMOWSKI heeft deze differentiaal uitdrukking, in de *Nova Acta Petrop. Tom.* X, op eene geheel andere wijze geïntegreerd: zijne integraal verschilt van de onze; eensdeels, wijl eenige mislagen in zijne berekening zijn ingeslopen, anderdeels, wijl hij in zijne oplossingswijze zijne integraal op eene wijze,

ze, die van de onze verschilt, ontleed heeft; wanneer men echter zijne misrekening verbeterd en de logaritmen en cirkelbogen, welke hij verkrijgt, te zamen vereenigt, dan stemmen onze integralen met elkander overeen.

N^o. 126. Door

U. HUGUENIN.

Stellen wij, ten einde de integraal van . . .

$$\frac{\delta z}{(3+z^2)^3 \sqrt{1+3z^2}} \text{ te vinden, } z = a \times \frac{p-q}{p+q},$$

in welke a eene nader te bepalen standvastige grootheid is; dan wordt:

$$1+3z^2 = \frac{(3a^2+1)p^2-2(3a^2-1)pq+(2a^2+1)q^2}{(p+q)^2} =$$

$$\frac{(3a^2+1)p^3-3(a^2-1)p^2q-3(a^2-1)pq^2+(3a^2+1)q^3}{(p+q)^3}$$

$$3+z^2 = \frac{(a^2+3)p^2-2(a^2-3)pq+(a^2+3)q^2}{(p+q)^2}$$

$$\delta z = 2a \times \frac{q\delta p - p\delta q}{(p+q)^2}$$

Door $a = 1$ te stellen, verkrijgen deze uitdrukkingen de eenvoudigste gedaante; men heeft namelijk:

$$z = \frac{p-q}{p+q}; 1+3z^2 = \frac{4(p^3+q^3)}{(p+q)^3}; 3+z^2 = \frac{4(p^2+pq+q^2)}{(p+q)^2}$$

$$\delta z = \frac{2(p\delta q - q\delta p)}{(p+q)^2}$$

en de gegevene differentiaal wordt als dan:

$$\frac{\delta z}{(3+z^2)^3 \sqrt{1+3z^2}} = \frac{(p+q)(q\delta p - p\delta q)}{(p+q)^3 \sqrt{4(p^2+pq+q^2)}} =$$

$$\frac{p^2q\delta p - p^3\delta q - q^3\delta p + pq^2\delta q}{4(p^3 - q^3) \sqrt{4(p^2+pq+q^2)}}$$

wanneer men namelijk $p^3 + q^3 = a$ stelt.

Volgens deze veronderstelling heeft men $p^3 = 2 - q^3$; $q^3 = 2 - p^3$; $p^2 \delta p = -q^2 \delta q$, en, deze waarden in de laatste differentiaal vergelijking overbrengende, wordt:

$$\frac{\delta z}{(3+z^2)\sqrt[3]{(1+3z^2)}} = \frac{1}{4} \times \left[\frac{\delta p}{1-p^3} - \frac{\delta q}{1-q^3} \right]$$

Maar volgens de oplossing van het 125 Voorstel is:

$$\int \frac{\delta p}{1-p^3} = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{\sqrt[3]{(1-p^3)}}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{3}} B. \text{Tang.} \frac{2p+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{\delta q}{1-q^3} = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{\sqrt[3]{(1-q^3)}}{1-q} + \frac{1}{\sqrt{3}} B. \text{Tang.} \frac{2q+1}{\sqrt{3}}$$

en men heeft derhalve voor de geheele integraal

$$\int \frac{\delta z}{(3+z^2)\sqrt[3]{(1+3z^2)}}, \text{ door namelijk de loga-}$$

rithmen en cirkelbogen te vereenigen:

$$\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{(1-q)\sqrt[3]{(1-p^3)}}{(1-p)\sqrt[3]{(1-q^3)}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} B. \text{Tang.} \frac{(p-q)\sqrt{3}}{2+p+q+2pq}$$

waar van echter het logarithmische gedeelte nog kan vereenvoudigd worden; want, aangezien $p^3 + q^3 = 2$ is, zoo is $1 + q^3 = 1 - (1 - q^3) = 1 - p^3$; derhalve $\frac{1-p^3}{1-q^3} = -1$, en . .

$$\frac{\sqrt[3]{(1-p^3)}}{\sqrt[3]{(1-q^3)}} = -1, \text{ waar uit dan eindelijk}$$

volgt:

$$\int \frac{\delta z}{(3+z^2)\sqrt[3]{(1+3z^2)}} = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{q-1}{1-p} + \frac{1}{4\sqrt{3}} B. \text{Tang.} \frac{(p-q)\sqrt{3}}{2+p+q+2pq}$$

Nu

Nu is $1 + 3z^2 = 4 \times \frac{p^3 + q^3}{(p+q)^3} = \frac{8}{(p+q)^3}$
 derhalve $p + q = \frac{2}{\sqrt[3]{1 + 3z^2}}$. Voorts is uit
 $z = \frac{p - q}{p + q}$, $p - q = z(p + q) = \dots$
 $\frac{2z}{\sqrt[3]{1 + 3z^2}}$ en hier door vindt men dan: $p =$
 $\frac{1 - z}{\sqrt[3]{1 + 3z^2}}$; $q = \frac{1 + z}{\sqrt[3]{1 + 3z^2}}$; $pq =$
 $\frac{1 - z^2}{\sqrt[3]{1 + 3z^2}}$; $q - 1 = \frac{1 + z - \sqrt[3]{1 + 3z^2}}{\sqrt[3]{1 + 3z^2}}$;
 $1 - p = \frac{\sqrt[3]{1 + 3z^2} - 1 - z}{\sqrt[3]{1 + 3z^2}}$; $\frac{q - 1}{1 - p} =$
 $\frac{z - 1 + \sqrt[3]{1 + 3z^2}}{z + 1 - \sqrt[3]{1 + 3z^2}}$. De gezochte integraal
 wordt derhalve:

$$\int \frac{dz}{(3+z^2)\sqrt[3]{1+3z^2}} = \frac{1}{3} \text{Log.} \frac{z-1+\sqrt[3]{1+3z^2}}{z+1-\sqrt[3]{1+3z^2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{B.Tang.} \frac{3\sqrt{3} \times \sqrt[3]{1+3z^2}}{\sqrt[3]{1+3z^2} + \sqrt[3]{1+3z^2} + 1 - z^2} + \text{Const.}$$

AANMERKING. Deze integraal verschilt met de beide integralen, welke de Heer EULER voor onze differentiaal gevonden heeft; echter zijn ook deze zijne integralen van elkander onderscheiden.

Het verschil van ééne zijner oplossingen met de

onze wordt door eene vierkants worteltrekking geboren. De Heer EULER stelt, om aan de differentiaal eene andere gedaante te geven, . . .

$$\sqrt[3]{(1 + 3x^2)} = 2x \text{ en } x = \frac{\sqrt[3]{(1 - 3y + 3y^2)}}{\sqrt[3]{2}};$$

dus doende, wordt $x^3 = \frac{1 - 3y + 3y^2}{2}$, . . .

$$8x^3 - 1 = 3(1 - 4y + 4y^2) \text{ en } \dots$$

$\sqrt[3]{(8x^3 - 1)} = (2y - 1)\sqrt[3]{3}$. Nu heeft de Heer EULER zich van den wortel . . .

$$\sqrt[3]{(8x^3 - 1)} = (2y - 1)\sqrt[3]{3} = (1 - 2y)\sqrt[3]{3}$$

bediend, waar door hij voor het logarithmische

$$\text{gedeelte } \frac{1}{3} \text{Log} \cdot \frac{z + 1 - \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}}{z - 1 + \sqrt[3]{(1 + 3z^2)}} \text{ en voor}$$

de tangens dezelfde grootheid als wij, doch met een tegengesteld teeken gevonden heeft. Had hij van den wortel $\sqrt[3]{(8x^3 - 1)} = (2y - 1)\sqrt[3]{3}$ gebruik gemaakt, zou hij dezelfde integraal als wij verkregen hebben, welke, daar zij zonder hulp eener vierkants worteltrekking gevonden is, aan geen twijfel kan onderworpen zijn; waar uit men dan leeren mag, dat men zoo veel mogelijk is, de vierkants of eyene magts worteltrekkingen, bij substitutien, moet trachten te vermijden.

Ten opzichte van EULERS tweede integraal, waar bij zijne substitutien te zamen in het wezen der zake met onze enkele substitutie overeenkomen en derhalve ook in alle deelen dezelfde integraal moesten opleveren, valt aan te merken: dat de Heer EULER, bij de herleiding der logarithmische functien, eene imaginale grootheid doet ontstaan, welke hij, dezelve als eene standvastige grootheid beschouwende, weglaat: namelijk zijne

$$\text{beide logarithmische integralen zijn } \frac{1}{3} \cdot \text{Log} \cdot \frac{1 - p^3}{(1 - p)^3} - \frac{1}{3}$$

— $\frac{1}{6} \cdot \text{Log.} \frac{(1 - q)^3}{1 - q^3}$, welke hij tot $\frac{1}{6} \cdot \text{Log.} \frac{1 - p^3}{1 - q^3}$
 $+ \frac{1}{6} \cdot \text{Log.} \left(\frac{1 - q}{1 - p} \right)^3 = \frac{1}{6} \cdot \text{Log.} \frac{1 - p^3}{1 - q^3} \dots$
 $+ \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1 - q}{1 - p}$ herleidt; maar $1 - p^3 =$

$(1 - q^3)$ zijnde, zoo is $\text{Log.} \frac{1 - p^3}{1 - q^3} =$

$\text{Log.} - 1$, of $\frac{1}{6} \text{Log.} \frac{1 - p^3}{1 - q^3} = \frac{1}{6} \text{Log.} - 1$ en

deze onbestaanbare logarithmus heeft de Heer
 EULER, als eene standvastige grootheid, uit de
 integraal weggelaten, en alleen het logarithmische
 gedeelte $\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1 - q}{1 - p}$ behouden, voor welk laat-

ste wij echter $\frac{1}{2} \text{Log.} \frac{q - 1}{1 - p}$ gevonden hebben. Zij-
 ne integraal komt dus geheel met de onze over-
 een, uitgenomen, dat de teller zijner logarithmi-
 sche grootheid een tegengesteld teeken heeft. Zie
 verder *Nova Acta Petrop. Tom. X.*

Nº 127. Door

U. HUGUENIN.

De differentiaale uitdrukking

$$\frac{(3 - z^2)^3 \sqrt{(1 - 3z^2)}}{(3 - z^2)^3 \sqrt{(1 - 3z^2)}}$$

laat zich niet op gelijke wijze, als bij de vijf-
 voorgaande differentialen geschied is, tot eenen
 rationalen vorm brengen. Wij kunnen echter de-
 zelfde dadelijk in twee andere differentialen ontle-
 den; want, daar $3 - z^2$ kan aangemerkt wor-
 den als uit het product der factoren $(\sqrt{3} + z) \times$
 $(\sqrt{3} - z)$ te bestaan, zal men door de leefwijze
 van het verdeelen der breuken vinden.

$$\frac{1}{3-z^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3+z}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3-z}}$$

en de functie $\frac{(3-z^2)\sqrt{(1-3z^2)}}{\delta z}$ kan dan aangemerkt worden als gelijk te zijn aan $\frac{\delta z}{\delta z}$

$$\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3+z})\sqrt{(1-3z^2)}}{\delta z} + \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3-z})\sqrt{(1-3z^2)}}{\delta z}$$

Wij zullen, om de grootheid onder het wortel-teekken van deze beide differentialen onder eene bekwamere gedaante te brengen, den coëfficiënt

van $3z^2$, door $z = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left[1 - a \times \frac{p-1}{p+1} \right]$

te stellen, doen verdwijnen en tevens aannemen dat a eene nader te bepalen standvastige grootheid zij; hier door zal men dan hebben:

$$1-3z^2 = 2a \times \frac{p-1}{p+1} - a^2 \times \left(\frac{p-1}{p+1} \right)^2 = \frac{(2a-a^2)p^3 + (2a+a^3)p^2 - (2a-a^2)p - (2a+a^2)}{(p+1)^3}$$

$$\sqrt{3-z} = \frac{(2+a)p+(2-a)}{(p+1)\sqrt{3}}; \sqrt{3+z} = \frac{(4-a)p+4+a}{(p+1)\sqrt{3}}$$

$$\delta z = - \frac{2a\delta p}{(p+1)2\sqrt{3}}$$

Het is zichtbaar, dat alle deze uitdrukkingen de eenvoudigste gedaante zullen verkrijgen, wanneer men $a = 2$ stelt, want, zoo doende, heeft men:

$$z = - \frac{p-3}{(p+1)\sqrt{3}}; \sqrt{(1-3z^2)} = \frac{\sqrt{8(p^2-1)}}{p+1} = \frac{2\sqrt{(p^2-1)}}{p+1};$$

$$\sqrt{3-z} = \frac{4p}{(p+1)\sqrt{3}}; \sqrt{3+z} = \frac{2p+6}{(p+1)\sqrt{3}}; \delta a = \frac{-4\delta p}{(p+1)^2\sqrt{3}}$$

diensvolgens wordt dan ook:

$$\frac{\delta z}{\delta z} = \frac{-1}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\delta p}{p\sqrt{(p^2-1)}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\delta p}{(p+3)\sqrt{(p^2-1)}}$$

De

De differentiaal $\frac{\delta p}{p\sqrt[3]{(p^2-1)}}$ wordt rationaal als men $\sqrt[3]{(p^2-1)} = q$ stelt; wijl hier door $p^2 = q^3 + 1$; $2p\delta p = 3q^2\delta q$; $\frac{\delta p}{p} = \frac{3}{2} \cdot \frac{q^2\delta q}{p^2}$
 $= \frac{3}{2} \times \frac{q^2\delta q}{q^3+1}$ en $-\frac{1}{4\sqrt[3]{3}} \times \frac{\delta p}{p\sqrt[3]{(p^2+1)}} = \dots$
 $\rightarrow \frac{\sqrt[3]{3}}{8} \times \frac{q\delta q}{q^3+1}$ wordt, eene uitdrukking, welke kan geïntegreerd worden.

Het tweede gedeelte der differentiaal, te weten $-\frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \times \frac{\delta p}{(p+3)\sqrt[3]{(p^2-1)}}$, verkrijgt, door onze aangenomene substitutie, geenen integreerbaren vorm; doch men kan hetzelfde tot den vorm van het eerste gedeelte brengen, door $p = \frac{u+3}{u-1}$

te stellen; als dan wordt $p+3 = \frac{4u}{u-1}$; $p^2-1 = \frac{8(u+1)}{(u-1)^2} = \frac{8(u^2-1)}{(u-1)^2}$; \dots
 $\delta p = -\frac{4\delta u}{(u-1)^2}$ en $-\frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \times \dots$
 $\frac{\delta p}{(p+3)\sqrt[3]{(p^2-1)}} = \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} \times \frac{\delta u}{u\sqrt[3]{(u^2-1)}}$

Men stelle nu $\sqrt[3]{(u^2-1)} = v$, zoo heeft men, even als bij het eerst gedeelte der differentiaal:

$$-\frac{1}{2\sqrt[3]{3}} \times \frac{\delta p}{(p+3)\sqrt[3]{(p^2-1)}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{8} \times \frac{v\delta v}{v^3+1}$$

Maar $q^3+1 = (q+1)(q^2-q+1)$ zijn-

518 ONTBINDINGEN VAN DE

zінде, zoo heeft men door de verdeling der breuken:

$$\frac{q \partial q}{q^3 + 1} = \frac{1}{3} \times \left[\frac{-\partial q}{q+1} + \frac{q \partial q + \partial q}{q^2 - q + 1} \right] = \dots$$

$$\frac{1}{3} \times \left[\frac{\partial q}{q+1} - \frac{1}{2} \times \frac{2q \partial q - \partial q}{q^2 - q + 1} - \frac{1}{2} \times \frac{\partial q}{q^2 - q + 1} \right]$$

en diens volgens wordt:

$$\int \frac{-\sqrt{3}}{8} \times \frac{q \partial q}{q^3 + 1} = \frac{1}{8\sqrt{3}} \times \left[\text{Log.}(q+1) - \frac{1}{2} \text{Log.}(q^2 - q + 1) - \sqrt{3} B. \text{Tang.} \frac{2q-1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{3}} \text{Log.} \frac{(q+1)^2}{q^2 - q + 1} - \frac{1}{8} B. \text{Tang.} \frac{2q-1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{3}} \text{Log.} \frac{(1+q)^3}{1+q^3} - \frac{1}{8} B. \text{Tang.} \frac{2q-1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{16} \text{Log.} \frac{1+q}{\sqrt[3]{1+q^3}} - \frac{1}{8} B. \text{Tang.} \frac{2q-1}{\sqrt{3}}$$

en op gelijke wijze heeft men:

$$\int \frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{v \partial v}{v^3 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{16} \text{Log.} \frac{1+v}{\sqrt[3]{1+v^3}} + \frac{1}{8} B. \text{Tang.} \frac{2v-1}{\sqrt{3}}$$

Nu is in de integraal van het eerste gedeelte

$$p^3 = q^3 + 1, z = \frac{-p+3}{(p+1)\sqrt{3}}, \text{ of } p = \frac{3-z\sqrt{3}}{1+z\sqrt{3}}$$

$$\text{derhalve } \sqrt[3]{(q^3 + 1)} = \sqrt[3]{p^3} = \frac{\sqrt[3]{(3-z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}}$$

$$p^3 - 1 = \frac{8(1-z\sqrt{3})}{(1+z\sqrt{3})^2}; q = \sqrt[3]{(p^3 - 1)} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{2(1-z\sqrt{3})}}{(1+z\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}}; 1+q = \frac{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2 + 2(1-z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}}$$

$$2q - 1 = \frac{4\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}}$$

$$\text{en } \frac{1+q}{\sqrt[3]{q^3+1}} = \frac{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2+2}\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(3-z\sqrt{3})^2}}$$

$$\text{en alzoo wordt } \frac{\sqrt[3]{3}}{16} \cdot \text{Log.} \frac{1+q}{\sqrt[3]{(1+q^3)}} = \dots$$

$$\frac{1}{8} B. \text{Tang.} \frac{2q-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{16} \text{Log.} \dots$$

$$\frac{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2+2}\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(3-z\sqrt{3})^2}} = \dots$$

$$\frac{1}{8} B. \text{Tang.} \frac{4\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})}-\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}} = \dots$$

In het tweede gedeelte der integraal is

$$v = \sqrt[3]{(u^2-1)}; \text{ of } u^2 = 1+v^3; p = \frac{u+3}{u-1};$$

$$u = \frac{p+3}{p-1}; u^2-1 = \frac{8(p+1)}{(p-1)^2} \text{ en } v = \dots$$

$$\sqrt[3]{(u^2-1)} = \frac{2\sqrt[3]{(p+1)}}{\sqrt[3]{(p-1)^2}}$$

Voorts is, even als bij het eerste geïntegreerde gedeelte, $p = \frac{3-z\sqrt{3}}{1+z\sqrt{3}}; \sqrt[3]{(p^2-1)} = \dots$

$$\frac{2\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2}} \text{ en } p-1 = \frac{2(1-z\sqrt{3})}{1+z\sqrt{3}};$$

$$\text{derhalve } v = \frac{2\sqrt[3]{(p+1)}}{\sqrt[3]{(p-1)^2}} = \frac{2\sqrt[3]{(p^2-1)}}{p-1}$$

$$= \frac{2\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}; u^2+1 = \frac{8(1+z\sqrt{3})+(1-z\sqrt{3})^2}{(1-z\sqrt{3})^2} = \dots$$

$$\frac{2+6z\sqrt{3}+3z^2}{(1-z\sqrt{3})^2}; \sqrt[3]{y^3+1} = \frac{\sqrt[3]{(3+z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}$$

$$1+y = \frac{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}$$

$$\frac{1+y}{\sqrt[3]{y^3+1}} = \frac{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(3+z\sqrt{3})^2}}$$

$$\text{en } 2y-1 = \frac{4\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}$$

Hier door wordt nu het tweede gedeelte van de integraal, namelijk $-\frac{\sqrt{3}}{16} \text{Log.} \frac{1+y}{\sqrt[3]{(1+y^3)}} +$

$\frac{1}{8} B. \text{Tang.} \frac{\sqrt{3}}{2y-1}$ gelijk aan deze uitdrukking:

$$-\frac{\sqrt{3}}{16} \text{Log.} \frac{\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}}{\sqrt[3]{(3+z\sqrt{3})^2}} +$$

$$\frac{1}{8} B. \text{Tang.} \frac{4\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}$$

Dit laatste gedeelte van de integraal bij het eerste voegende, verkrijgt men voor

$$\int \frac{\frac{\partial x}{\partial z}}{(3-z^2)\sqrt[3]{(1-3z^2)}} \text{ deze uitdrukking:}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{16} \text{Log.} \frac{[\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})}] \times \sqrt[3]{(3+z\sqrt{3})^2}}{[\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2} + 2\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}] \sqrt[3]{(3-z\sqrt{3})^2}}$$

$$+ \frac{1}{8} B. \text{Tang.} \frac{4\sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})^2}}$$

$$-\frac{1}{3} B. Tang. \frac{4\sqrt[3]{(1-z\sqrt{3})} - \sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}}{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{(1+z\sqrt{3})}} + Const.$$

AANMERKING. De Heer EULER heeft deze differentiaal, door meer substitutien, in de door ons gevondene rationale deelen ontloed, zonder de integrering verder uit te voeren; daar en tegen heeft hij eene integraal voor die differentiaal uit zijne in het 126 Voorstel gemelde tweede integraal van $\frac{dx}{(3+x^2)\sqrt[3]{(1+3x^2)}}$, af

gelyk, door in dezelve $z\sqrt{-1}$ in plaats van x te stellen, het welk van het hier gevondene veel verschilt en ook niet anders zijn kan, aangezien de Heer EULER, door in het 126 Voorstel den factor $\frac{1}{3} Log. - 1$ uit de integraal weg te laten, den aard van dezelve zoodanig veranderd heeft, dat hij, zoo doende, voor

$$\frac{1}{3} Log. \frac{1 - \sqrt[3]{(1+3x^2)} - x}{1 - \sqrt[3]{(1+3x^2)} + x} \text{ verkregen heeft}$$

$$\frac{1}{3} Log. \frac{\sqrt[3]{(1+3x^2)} - 1 + x}{\sqrt[3]{(1+3x^2)} - 1 - x}, \text{ welke aan de in}$$

het 123 Voorstel gegevene formule (x) beantwoordt, wanneer men in dezelve $z\sqrt{-1}$ in plaats van x neemt, wijl teller en noemer gelijk zijn, uitgenomen, dat x in dezelve tegengestelde teekens heeft; dit echter heeft ten aanzien van het

$$\text{logarithmische gedeelte } \frac{1}{3} Log. \frac{x - 1 + \sqrt[3]{(1+3x^2)}}{x + 1 - \sqrt[3]{(1+3x^2)}}$$

in Voorstel 126 gevonden, geen plaats, het welk door $z\sqrt{-1}$ in plaats van x te stellen, de eerste

ste formule in de vereischte gedaante niet kan doen overgaan. Zie verder *Nova Acta Petrop.* Tom. X.

N^o. 128. Door

J. R. SCHMIDT, U. Huguenin, en Jacob de Gelder.

Zij Fig. 114, A het gegeven punt, PQ en DE de gegevene evenwijdige lijnen: men trekke dan eenige lijn AR, van A tot aan de lijn PQ, welke DE in S snijdt; door S trekke men eene onbepaalde lijn Mm loodrecht op PQ, en, gevolgelijk, ook op DE en men neme dan van het punt N, alwaar deze lijn Mm de lijn PQ snijdt, $NM = AR$, dan is M, volgens de opgave, een punt der kromme lijn; maar, daar men den afstand $NM = AR$ zoo wel ter regter als ter linkerhand van het punt N nemen kan, zoo zal, indien $Nm = NM = AR$ genomen wordt, het punt m insgelijks tot hetzelfde stelsel van punten behooren. Men zal nu, zoo als in de figuur genoegzaam aangegeven is, zoo vele punten M en m der kromme lijn, als men goedvindt, kunnen bepalen. Er blijft nu te onderzoeken, tot welke soort van kromme lijn de punten M en m behooren?

Men trekke door het punt A de lijn ABn evenwijdig aan Mm (en dus ook loodrecht op PQ,) dan is ook, volgens de wet, bij het voorstel voorgeschreven, bij welke, in dit geval, de lijnen AR en Mm op elkander vallen, het punt A zelf een punt der kromme lijn; indien men nu, MQ evenwijdig aan PQ trekt en het punt B voor den oorsprong der coördinaten en bijgevolg Aa en PQ voor derzelver asen aannemende, $BO = NM = x$; $MO = CS = y$; de standvastige lijnen $AB = a$, $AC = b$ stelt, dan hebben wij, aangezien, volgens de constructie, $AR = MN = OB$

$OB \equiv x$ is, in den regthoekigen driehoek ABR ,
 $BR^2 \equiv AR^2 - AB^2 \equiv x^2 - a^2$; daarenboven
 geven de gelijkvormige driehoeken ABR en ACS
 de evenredigheid:

$$AB^2 : AC^2 \equiv BR^2 : CS^2$$

dat is, omdat $CS \equiv MO \equiv y$ en $BR^2 \equiv x^2 - a^2$ is,

$$a^2 : b^2 \equiv x^2 - a^2 : y^2$$

waaruit dan volgt de vergelijking

$$y^2 \equiv \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$$

welke, gelijk bekend is, de vergelijking van de
 gewone Hiperbola is, genomen op derzelve as-
 sen: er is derhalve geen twijfel aan, dat de pun-
 ten M tot deze kromme lijn behooren.

AANMERKING. 1°. Het blijkt uit deze ver-
 gelijking, dat de punten m , ter linkerhand van

PQ , ook tot de vergelijking $y^2 \equiv \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$

behooren; want, aangezien $mN \equiv Bo \equiv MN$
 en $mo \equiv MO$ is, zoo zal, daar B de oorsprong
 der coördinaten is, $Bo \equiv Nm \equiv -BO \equiv -x$
 en $mo \equiv MO \equiv y$ zijn; daar nu de vergelijking
 door x negatief te nemen, niet verandert, be-
 hooren de punten m , als klaarblijkelijk in dezel-
 ve opgesloten zijnde, mede tot de kromme lijn.

2°. Wanneer men in de gevondene vergelij-
 king $x \equiv \pm a$ stelt, wordt, zoo als ook uit de
 constructie volgt, $y \equiv 0$; en x positievelijk of
 negatievelijk kleiner dan a stellende, wordt $x^2 - a^2$

negatief en $y \equiv \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \times \sqrt{-1}$

onbestaanbaar; dat is, er liggen, tusfchen de lij-
 nen, welke door de punten A en a evenwijdig
 aan PQ getrokken worden, geene punten van de
 kromme lijn; daar en tegen zal, daar voor elke
 waarde van x , grooter dan $+a$ en kleiner dan
 $-a$, y bestaanbaar is, de kromme lijn zich in

Bb

twee

twee takken onbepaaldelijk uitstrekken, de eerste van welke ter rechterhand van de evenwijdige lijn door A en de tweede ter linkerhand van de evenwijdige lijn door a gaande, zal gelegen zijn.

3°. In de figuur is de lijn DE tusschen het punt A en de lijn PQ gelegen. Merken wij nu het punt A en de lijn PQ aan als in stelling gegeven zijnde; maar laten wij de lijn DE in haren evenwijdigen stand aan PQ van afstand veranderen, dan hebben wij behalve het geval van fig. 114. in hetwelke DE tusschen A en PQ ligt en $a > b$ is, nog de volgende gevallen.

a). Wanneer DE op PQ valt, alsdan vereenigen zich de punten R, S en N in één; $AC = AB$ of $a = b$ zijnde, wordt de vergelijking $y^2 = x^2 - a^2$ en de hyperbola is in dit geval gelijkzijdig.

b). Wanneer de lijn DE ter linkerhand van PQ valt. In dit geval verandert de constructie en de vergelijking uit dezelve afgeleid, in het minste niet; alleenlijk, daar in het geval van fig. 114, $a > b$ is, en hier $a < b$; is in fig. 114 de voorname as de grootste en hier de voorname as de kleinste der toegevoegde assen.

c). Hoe nader het punt C ter rechter zijde van PQ bij A komt, des te kleiner worden de ordinaten in de vergelijking van de abscissen; en als het punt C in A valt, verandert de hyperbola in een stelsel van twee rechte lijnen AX en ax .

d). Wanneer het punt C, ter linkerhand van de lijn PQ vallende, op eenen grooteren afstand van A gebragt wordt, verkrijgen de takken der hyperbola eene mindere buiging en veranderen, zoodra C oneindig ver van A afstaat, in een stelsel van twee aan PQ evenwijdig loopende lijnen, door de punten A en a gaande.

e). Wanneer het punt C ter rechterhand van A valt, dan wordt $CA = b$ negatief, en men ver-

verkrijgt, de voorschrevene constructie opvolgende, wedetom eene hyperbola; want laat *fig. 114* het punt *C* in *C'* verplaatst zijn en *DE* in *D'E'*; dan snijdt het verlengde *AR* van de lijn *D'E'* in *S'*; door *S'* trekke men de lijn *S'M'N'm'* regthoekig op *PQ* en neme $N'M' = N'm' = AR$; dan zullen ($AC = AC'$ zijnde) *M'* en *m'* punten zijn van dezelfde hyperbola, welke op de eerste wijze beschreven is; hetwelk, behalve dat zulks uit den regthoekigen driehoek *ABR* en de gelijkvormige driehoeken *ABR* en *AS'C'*, op dezelfde wijze als boven, blijkt, ook nog daardoor bevestigd wordt, dat de vergelijking $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$

niet verandert, wanneer *b* in dezelve negatief genomen wordt.

4°. Dit werkstuk levert eene fraaije en misschien wel de eenvoudigste wijze op, om, *wanneer de assen eener hyperbola gegeven zijn, de hyperbola door punten te beschrijven?* Want, men neme de halve eerste as $= AB$, de halve tweede as $= AC$, trekke *PQ* en *DE* loodrecht op *AB*, en men ga voorts te werk, als in het vraagstuk is voorgeschreven.

5°. In het voorstel is aangenomen, dat de lijnen *MSNm* de lijnen *PQ* en *DE*, onder eenen rechten hoek snijden: men kan nu vragen: *welke de kromme lijn zijn zal, indien deze lijnen MSNm de lijnen PQ en DE niet onder eenen rechten; maar onder eenen scheven hoek doorsnijden?* Laat in *fig. 115*, welke in alles met *fig. 114* overeenkomt, behalve dat de hoek *ABP* een scheve hoek is, $\angle ABP = \lambda$ gesteld worden; dan is $AB = a$, $AR = MN = OB = x$; $MO = CS = y$, $AC = b$. Nu is $AR : AB$ of $x : a = \sin. \lambda : \sin. ARB$; derhalve $\sin. ARB = \frac{a \sin. \lambda}{x}$, $\cos. ARB = \frac{x^2 - a^2 \sin^2. \lambda}{x^2}$;

$$\sin. RAB = \sin. (\lambda + ARB) = \dots$$

B b 2

$$\frac{a \sin . \lambda}{x} \times \cos . \lambda \pm \sin . \lambda \times \sqrt{\left[\frac{x^2 - a^2 \sin^2 . \lambda}{x^2} \right]}$$

$$\sin . RAB = \frac{a \sin . \lambda \cos . \lambda \pm \sin . \lambda \sqrt{(x^2 - a^2 \sin^2 . \lambda)}}{x}$$

Voorts is $\sin . \lambda : \sin . BAR = x : BR$ en hieruit wordt

$$BR = a \cos . \lambda \pm \sqrt{(x^2 - a^2 \sin^2 . \lambda)}$$

eindelijk geven de gelijkvormige driehoeken ABR en ACS, $AB : AC = BR : CS$

$$a : b = a \cos . \lambda \pm \sqrt{(x^2 - a^2 \sin^2 . \lambda)} : y$$

$$y = b \cos . \lambda \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2 \sin^2 . \lambda)}$$

Om nu uit deze vergelijking het wortelteeken weg te maken, stel ik dezelve onder deze gedaante:

$$\pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2 \sin^2 . \lambda)} = y - b \cos . \lambda$$

en verhef beide leden tot de tweede magt, dan is

$$\frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2 \sin^2 . \lambda) = y^2 - 2 y b \cos . \lambda + b^2 \cos^2 . \lambda$$

of wel

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 \sin^2 . \lambda = y^2 - 2 y b \cos . \lambda + b^2 \cos^2 . \lambda$$

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} = y^2 - 2 y b \cos . \lambda + b^2 (\sin^2 . \lambda + \cos^2 . \lambda)$$

of eindelijk, wijl $\sin^2 . \lambda + \cos^2 . \lambda = 1$ is,

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} = y^2 - 2 b y \cos . \lambda + b^2$$

Zijnde deze eene vergelijking, klaarblijkelijk tot eene der kegelfneden behoorende.

De vergelijking met betrekking tot y oplossen-
de, heeft men

$$y = + b \cos . \lambda \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 \sin^2 . \lambda \right)}. (g)$$

Deze waarde van y bestaat uit twee deelen,
uit het standvastig gedeelte $+ b \cos . \lambda$, hetwelk
voor

voor alle waarden van x hetzelfde blijft en uit de wortelgrootheid $\pm \sqrt{\frac{b^2 x^2 - a^2 b^2 \sin^2 \lambda}{a^2}}$.

Men late AFL, fig. 115, loodregt op PQ vallen; dan is $CF = AC \times \cos \lambda$. $ACF = AC \times \cos \lambda$. $ABP = b \cos \lambda$. De lijn HI, welke door F, evenwijdig aan AB, getrokken wordt, is dan eene middellijn, op welke de waarden van $\pm \sqrt{\frac{b^2 x^2 - a^2 b^2 \sin^2 \lambda}{a^2}}$ moeten overgebracht worden, terwijl H en I de toppunten dezer middellijn zijn. Om nu de plaats dezer laatste te vinden, moet de grootheid onder het wortelteeken gelijk nul gesteld worden: dit doende, vindt men $x = \pm a \sin \lambda$; maar in den driehoek ABL is $AL = AB \times \sin \lambda = a \sin \lambda$; bijaldien men dan $GI = GH = AL$ neemt, zijn de punten H en I de toppunten der middellijn, en daar x grooter dan $\pm a \sin \lambda$ moet genomen worden, ten einde y eene bestaanbare waarde hebbe, blijkt het, dat de kromme lijn, door onze constructie gevonden, eene hyperbola is. Stelt men nu $y = b \cos \lambda = z$, dan verandert de vergelijking (g) in deze:

$$z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2 \sin^2 \lambda)}$$

of wel teller en noemer van het gebroken $\frac{b}{a}$ met $\sin \lambda$ vermenigvuldigende, in

$$z^2 = \frac{b^2 \sin^2 \lambda}{a^2 \sin^2 \lambda} \times (x^2 - a^2 \sin^2 \lambda)$$

zijnde deze de gewone vergelijking tot de hyperbola.

In deze is, zie fig. 115, $GU = BO = x$; $MU = + z$ en $UM' = - z$. Nu is, zie boven, $GI = AL = a \sin \lambda$ de halve eerste as en om dat $AF = AC \times \sin \lambda = b \sin \lambda$ is, is AF de halve tweede as; doch daar de coördi-

naten elkander onder den scheven hoek $ABP = \alpha$, snijden, zijn deze assen middellijnen, en hieruit volgt dan deze CONSTRUCTIE: om wanneer twee zamengevoegde middellijnen met den hoek, dien zij met elkander maken, gegeven zijn, de hyperbola, op de volgende wijze, door punten te beschrijven? Trek, fig. 115, eene onbepaalde lijn PQ; stel op dezelve in eenig punt L eene loodlijn AL; maak $LA =$ de halve eerste en $AF =$ de halve tweede as; trek door F de lijn DE evenwijdig aan PQ; trek uit A de lijn AB met PQ eenen hoek $ABP = \alpha$ makende gelijk aan den hoek, onder welken de toegevoegde middellijnen elkander snijden, dan zal de hyperbola, PQ en DE als evenwijdige lijnen en A als het vaste punt aannemende, op de wijze als in het voorstel is voorgedragen, door punten beschreven worden.

N^o. 129. Door

J. R. SCHMIDT, en U. Huguenin.

Stellen wij dat O (Fig. 116) een van die punten zij, waarvan wij de meetkundige plaats begeren, en dat alzoo AOM en ON loodrecht op PQ getrokken hebbende, MN altoos eene constante waarde behoude. Laat nu AB loodrecht op PQ, en $BC = MN$ zijn, zoo dan RCS loodrecht op PQ getrokken wordt, zal de snijding van RS en AB een punt van de kromme moeten zijn. Daar nu RS evenwijdig aan AB is, volgt hieruit dat RS eene Asymptote van de begeerde kromme is.

Stellen wij nu $AB = a$, $MN = BC = b$, $CN = x$ en $ON = y$, dan is ook $BM = CN = x$, en wij hebben $MN : MB = NO : BA$, of $b : x = y : a$, gevolgelijk $xy = ab$, vergelijking der Hyperbool op hare Asymptote; onze kromme is dus eene Hyperbool.

Stel.

Stellende nu $x = 0$, zoo wordt y oneindig, en stellende $y = 0$, zoo wordt x oneindig, waaruit volgt, dat PQ en RS de Asymptoten zijn van onze Hyperbool, en daar deze lijnen regthoekig op elkander staan, zoo volgt hieruit, dat onze constructie altijd eene gelijkzijdige Hyperbool zal voortbrengen.

Onze constructie geeft ons beide de takken; want voor alle punten M, welke ter linkerhand van B liggen, valt het punt O boven PQ; maar ligt het punt M' ter regter zijde van B, dan snijdt N'O' niet AM', maar het verlengde van AM', in O', en dit punt valt alzoo beneden de lijn PQ.

Het maakt geene verandering, of wij de constante lijn MN ter linker zijde, of wel ter regter zijde van het punt M nemen, wanneer wij dezelve slechts, in dezelfde constructie, altijd naar denzelfden kant nemen; in de bijgevoegde figuur is MN ter regterzijde van M genomen, maar hadden wij dezelve ter linkerzijde genomen, dan zouden de takken van de Hyperbool in de rechte hoeken PCS en RCQ gevallen zijn, daar zij nu in de hoeken PCR en SCQ vallen.

Deelen wij nu den hoek der Asymptoten PCR midden door, dan verkrijgen wij de toppen G en G' van de Hyperbool, en wij hebben voor die punten $GF = FC = \sqrt{ab}$ en dus $GC = \sqrt{2ab}$ voor den halven as; zijnde FC hetgeen men de magt of potens van de Hyperbool noemt.

I. GEVOLG. Wij kunnen door dit middel gemakkelijk iedere gelijkzijdige Hyperbool op hare Asymptoten beschrijven, wanneer de magt van dezelve $= a$ gegeven is; want wij behoeven de lijnen AB en MN of BC slechts zoodanig te nemen, dat $ab = a^2$ zij, en dan onze gegevene constructie te volgen: gemakkelijk is het dan a en b beide $= a$ te nemen, en dan wordt het

punt A te gelijker tijd de top van de Hÿperbool; want dit punt valt alsdan in G.

II GEVOLG. Hieruit blijkt dan nu ook, dat, welk punt A wij in den omtrek van eene gelijkzijdige Hÿperbool nemen, en uit hetzelfde lÿnen naar de Afijmptote trekken, welke de kromme in O snijden, het stuk MN, begrepen tusfchen M en de perpendiculair ON; voor eenzelfde punt A, bij ieder punt M even groot zal zijn.

AANMERKING. Onze constructie heeft ons eene gelijkzijdige Hÿperbool verschaft; het is ondertusfchen gemakkelijk, dezelve op alle andere Hÿperbolen toe te passen, wanneer de magt benevens de hoek der Afijmptoten gegeven is; want wij behoeven ten dien einde de lÿnen NO, in plaats van dezelve regthoekig op PQ te trekken, slechts met PQ eenen hoek te laten maken, gelijk aan den gegebenen hoek der Afijmptoten, en dan is het zeer gemakkelijk, om al wat wij hier gezegd hebben, ook op dit geval toe te passen.

Nº. 130. Door

U. HUGUENIN.

NB. In de opgaaf van dit Voorstel staat verkeerdelijk, op de agtste regel, S in plaats van M; en op de vierde regel van onderen, PS in plaats van PM.

Zij KLM (*Fig. 117*) de beweegbare hoek, aan welken de draad, die de lengte van ML heeft, is vastgemaakt, met het eene einde in M en met het andere in een gegeven punt F, zoodanig, dat, als men de draad in eenig punt P tegen het been LM van den beweegbaren hoek KLM uitspant, $MP + FP = MP + LP$, of $FP = LP$ is. Laat voorts door het punt F eene lÿn FD even-

evenwijdig met LM en door P eene lijn pQP evenwijdig met RS of KL getrokken zijn, zoo is $EQ = LP = FP$. Men stelde nu, dat de hoek KLM naar ED bewogen worde, alsdan nadert het punt P de lijnen KL en ED, en $FP = LP$ wordt steeds kleiner, zoo dat, als LM in ED komt, het punt P ergens in A en het punt L in E valt; maar daar altijd $FP = LP$ is, zoo zal in dit geval $FA = AE$ zijn, en deze waardij kunnen wij als eene gegevene grootheid beschouwen.

Zij dus $AE = AF = a$ en $\angle KLM = \alpha$ gegeven, en stel voorts $AQ = x$ en $PQ = y$, dan is $FP = EQ = x + a$ en $FQ = x - a$. Daar wijders $\angle EQP = \angle KLM = \alpha$ is, heeft men $FP^2 = QP^2 + FQ^2 - 2 QP \cdot FQ \cdot \cos. \alpha$; dat is: $(x + a)^2 = (x - a)^2 + y^2 - 2 (x - a) y \cos. \alpha$; of $y^2 - 2 (x - a) y \cos. \alpha = 4 a x$; waaruit volgt:

$$y = (x - a) \cos. \alpha \pm \sqrt{[4 a x + (x - a)^2 \cos. \alpha^2]}$$

De ordinaat y heeft dus twee ongelijke waarden; de grootste $PQ = (x - a) \cos. \alpha + \sqrt{(4 a x + (x - a)^2 \cos. \alpha^2)}$ is positief, en de kleinste $pQ = (x - a) \cos. \alpha - \sqrt{(4 a x + (x - a)^2 \cos. \alpha^2)}$ negatief; diensvolgens heeft de aldus beschrevene kromme lijn twee takken APP' en App , en daar de vergelijking van den tweeden graad is, moet dezelve tot de kegelsneden behooren.

Men stelde $z = y - (x - a) \cos. \alpha = \pm \sqrt{(4 a x + (x - a)^2 \cos. \alpha^2)}$, dan heeft z twee gelijke, doch in teeken verschillende waarden, welke door PO en pO worden uitgedrukt, als men namelijk Pp in O midden door deelt; zoo dat $PO = PQ - QO = y - QO = y - (x - a) \cos. \alpha = z$ en $QO = (x - a) \cos. \alpha$ zijn zal; maar $FQ = x - a$ en $\angle FQO = \alpha$ zijnde, is $QO = (x - a) \cos. \alpha = FQ \cdot \cos. \alpha$; derhalve is FQO eene regthoekige driehoek, dat is: FO staat loodregt op pP ; en daar voor elke andere dubbele

ordinaat $P'p'$, op gelijke wijze $Q'O' = F'Q' \cos. \alpha$ is, zoo volgt hieruit, dat FOO' eene regte lijn is, die de dubbele ordinaten Pp en $P'p'$ regthoekig midden door deelt, en diensvolgens de as dezer kromme lijn zijn zal, die verlengd zijnde, deze kromme lijn in U snijden en de kruin van dezelfde bepalen zal.

Om nu te onderzoeken, welke soort van kegelsnede onze kromme lijn zij, stelle men in de vergelijking voor x , $x = +$ en $- \infty$, zoo bekomt men in beide gevallen $z = \pm \infty$; alzoo breidt zich onze kromme met vier takken, van welke twee en twee eene tegengestelde rigting hebben, tot in het oneindige uit; waaruit volgt, dat zij eene Hyperbola is, welke echter in eene Parabool verandert, als men den hoek $KLM = \alpha = 90^\circ$ stelt, wijl hierdoor $\cos. \alpha$, en alzoo ook $(x-a)^2 \cos. \alpha^2 = 0$ wordt; wordende derhalve in dit geval de vergelijking $z = \pm \sqrt{4ax}$, of $z^2 = 4ax$, hetwelk de vergelijking van de parabool is, hebbende $4a$ tot parameter. Daar nu in dit geval AQQ' op UOO' valt, zoo valt A in U , en $AF = FU = a$ is het vierde gedeelte van den parameter; waaruit blijkt, dat F het brandpunt dezer parabool is, gelijk in de kegelsneden bewezen wordt. Dit geval komt ook overeen met de bekende mechanische constructie van de Parabool, door middel van eenen regten hoek.

Het zal nu nog noodig zijn de asen van onze Hyperbool te bepalen: tot dit einde trekke men Aa evenwijdig aan Pp , welke den as UO in q snijdt, dan is $\angle qAF = \angle FQO = \alpha$ en $qA = AF \cdot \cos. \alpha = a \cos. \alpha$, welke waarde men ook bekomt als men in de vergelijking van x , $x = 0$ stelt; dewijl in het punt A , $x = 0$ is. Voorts is $Fq = FA \times \sin. \alpha = a \sin. \alpha$ en $FO = FQ \cdot \sin. \alpha = (x-a) \sin. \alpha$; derhalve is $qO = qF + FO = x \sin. \alpha$.

Als men door U eene lijn UN evenwijdig aan Aa

A a trekt, ligt het punt N boven A, en $AN = x$ moet voor het punt U eene negatieve waarde hebben; om deze te vinden, stelde men $x = \pm \sqrt{(4ax + (x - a)^2 \cos. a^2)} = 0$; hierdoor be-
komt men de vergelijking $x^2 + 2a \cdot \frac{2 - \cos. a^2}{\cos. a^2} x - a^2$,
en als men het eerste lid dezer vergelijking tot een
quadraat maakt, zoo heeft men

$$x^2 + 2a \left(\frac{2 - \cos. a^2}{\cos. a^2} \right) x + a^2 \left(\frac{2 - \cos. a^2}{\cos. a^2} \right)^2 =$$

$$, \cdot 4a^2 \left(\frac{1 - \cos. a^2}{\cos. a^2} \right) = 4a^2 \cdot \frac{\sin. a^2}{\cos. a^2}$$

$$\text{derhalve is } x = -a \left(\frac{2 - \cos. a^2}{\cos. a^2} \right) \pm 2a \cdot \frac{\sin. a}{\cos. a^2}$$

$$= \frac{-a(1 + \sin. a^2) \pm 2a \sin. a}{\cos. a^2} = -a \frac{1 \mp 2\sin. a + \sin. a^2}{\cos. a^2}$$

$$\text{en alzoo } x = \frac{-a(1 - \sin. a)^2}{1 - \sin. a^2} = -a \frac{1 - \sin. a}{1 + \sin. a}$$

$$\text{en } x = \frac{-a(1 + \sin. a)^2}{1 - \sin. a^2} = -a \frac{1 + \sin. a}{1 - \sin. a}$$

gevolgelyk is de kleinste waarde van x , $AN = \dots$

$$-a \cdot \frac{1 - \sin. a}{1 + \sin. a}, \text{ en de grootste is } AN' = -a$$

$$\frac{1 + \sin. a}{1 - \sin. a}; \text{ zijnde } N' \text{ het tegenoverliggende punt}$$

van N, aan de tegengestelde Hijperbool, uit het-
welk eene met RS evenwijdig getrokken lijn
 $N'U'$, tot den verlengden as, het punt U' , of
den kruin der tegengestelde Hijperbool, bepaalt.

Daar nu $Uq = AN \sin. a$ is, zoo is $UO =$

$$qO + Uq = x \sin. a + a \cdot \left(\frac{1 - \sin. a}{1 + \sin. a} \right) \sin. a;$$

$$\text{voorts is } NN' = AN' - AN = a \cdot \frac{1 + \sin. a}{1 - \sin. a}$$

$$= a \cdot \frac{1 - \sin. a}{1 + \sin. a} = \frac{4a \sin. a}{1 - \sin. a^2}; \text{ derhalve}$$

U'U

$$UU' = NN' \sin. \alpha = \frac{4a \sin. \alpha^2}{1 - \sin. \alpha^2} = 4a \text{Tang. } \alpha^2;$$

hetwelk de eerste as der Hÿperbool is. Deelt men nu UU' midden door in C , zoo is C het middelpunt der tegengestelde Hÿperbolen, en de halve eerste as $CU = 2a \text{Tang. } \alpha^2$: waaruit volgt,

$$\text{dat } CO = UO + CU = x \sin. \alpha + a \left(\frac{1 - \sin. \alpha}{1 + \sin. \alpha} \right)$$

$\sin. \alpha + 2a \text{Tang. } \alpha^2$ wezen zal.

Men stelde nu de veranderlijke $CO = x \sin. \alpha + \dots$

$$a \left(\frac{1 - \sin. \alpha}{1 + \sin. \alpha} \right) \sin. \alpha + 2a \text{Tang. } \alpha^2 = x \sin. \alpha$$

$$+ a \left(\frac{1 + \sin. \alpha^2}{\cos. \alpha^2} \right) \sin. \alpha = u, \text{ zoo is } x =$$

$$\frac{u}{\sin. \alpha} - a \cdot \frac{1 + \sin. \alpha^2}{\cos. \alpha^2} \text{ en } x - a = \frac{u}{\sin. \alpha} - \dots$$

$$a \frac{1 + \sin. \alpha^2}{\cos. \alpha^2} - a \cdot \frac{\cos. \alpha^2}{\cos. \alpha^2} = \frac{u}{\sin. \alpha} - \frac{2a}{\cos. \alpha^2}$$

Substitueert men deze waarden van x en $x - a$ in de waarde van z , zoo bekomt men

$$z = \pm \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha} \sqrt{u^2 - 4a^2 \cdot \frac{\sin. \alpha^4}{\cos. \alpha^4}}$$

$= \pm \cot. \alpha \sqrt{u^2 - 4a^2 \text{Tang. } \alpha^4}$ voor de vergelijking aan den eersten as, in welke alzoo $2a \text{Tang. } \alpha^2$ de halve eerste as is. Voorts vindt men uit deze vergelijking, $u = \pm \text{Tang. } \alpha \sqrt{z^2 + 4a^2 \text{Tang. } \alpha^2}$, voor de vergelijking aan den tweeden as, waarin alzoo $4a^2 \text{Tang. } \alpha^2$ het quadrat van den halven tweeden as beteekent; derhalve is de tweede door den eersten hal-

$$\text{ven as gedeeld } = \frac{2a \text{Tang. } \alpha}{2a \text{Tang. } \alpha^2} = \cot. \alpha, \text{ zoo}$$

als ook werkelijk voor dit geval in de vergelijking $z = \pm \cot. \alpha \sqrt{u^2 - 4a^2 \text{Tang. } \alpha^4}$ voorkomt.

Daar nu verder de parameter p , bij de Hÿperbool, de derde evenredige tot den eersten en twee-

tweeden as is, zoo heeft men $2 a \text{ Tang} . \alpha^2 : 2 a \text{ Tang} . \alpha = 2 a \text{ Tang} . \alpha : p$; dus is de parameter voor den grooten as, $p = \frac{4 a^2 \text{ Tang} . \alpha^2}{2 a \text{ Tang} . \alpha} = 2 a$.

Stelt men nu den afstand van het middelpunt C der Hÿperbolen tot het brandpunt $= c$, den halven eersten as $= m$ en den halven tweeden as $= n$, zoo weet men dat bij de Hÿperbool, $c^2 = m^2 + n^2$ is; maar voor ons geval is $m = 2 a \text{ Tang} . \alpha^2$ en $n = 2 a \text{ Tang} . \alpha$; dus $c^2 = 4 a^2 \text{ Tang} . \alpha^4 + \dots + 4 a^2 \text{ Tang} . \alpha^2 = 4 a^2 \text{ Sec} . \alpha^2 . \text{ Tang} . \alpha^2$, en $c = 2 a \text{ Sec} . \alpha . \text{ Tang} . \alpha$; maar $CU + Uq = 2 a \text{ Tang} .$

$$\alpha^2 + a . \left(\frac{1 - \text{Sin} . \alpha}{1 + \text{Sin} . \alpha} \right) \text{Sin} . \alpha = 2 a . \frac{\text{Sin} . \alpha^2}{\text{Cos} . \alpha^2} + \dots$$

$$a . \frac{(1 - \text{Sin} . \alpha)^2}{\text{Cos} . \alpha^2} \text{Sin} . \alpha = a . \frac{1 + \text{Sin} . \alpha^2}{\text{Cos} . \alpha^2} \text{Sin} . \alpha;$$

hierbij adderende $qF = a \text{ Sin} . \alpha = a . \frac{\text{Sin} . \alpha . \text{Cos} . \alpha^2}{\text{Cos} . \alpha^2}$,

geeft $CF = \frac{a (1 + \text{Sin} . \alpha^2) \text{Sin} . \alpha}{\text{Cos} . \alpha^2} + \dots$

$$\frac{a \text{Cos} . \alpha^2 \text{Sin} . \alpha}{\text{Cos} . \alpha^2} = \frac{2 a \text{Sin} . \alpha}{\text{Cos} . \alpha^2} = 2 a \text{ Sec} . \alpha . \text{ Tang} . \alpha = c;$$

dus is F het brandpunt van den Hÿperbool, en de afstand van dit brandpunt tot den top U

$$\text{is} = 2 a \text{ Sec} . \alpha . \text{ Tang} . \alpha - \dots$$

$$2 a \text{ Tang} . \alpha^2 = 2 a \text{ Tang} . \alpha (\text{Sec} . \alpha - \text{Tang} . \alpha)$$

$$= 2 a \left(\frac{1 - \text{Sin} . \alpha}{\text{Cos} . \alpha^2} \right) \text{Sin} . \alpha = 2 a . \frac{\text{Sin} . \alpha}{1 + \text{Sin} . \alpha}$$

Nº. 131. Door

J. R. SCHMIDT. (Zie Fig. 118.)

§. 1. Laat de betrekking der snelheden, waarmede AB om het punt A en AC evenwijdig aan zich zelf bewogen wordt, zoodanig zijn, dat AB in den stand AP, dat is: loodregt op AC gekomen

men zijnde, AC in den stand DC gekomen is, dan is D een punt van de kromme. Laat nu met AD als radius een cirkel beschreven worden, dan is het uit de gelijkmatige beweging, waarin ieder der lijnen op zich zelve voortgaat, klaar, dat voor ieder punt M van de kromme, $AQ : AD = \text{boog} : \text{quadrant BD}$ zal zijn.

§. 2. Niets is dus gemakkelijker, dan onze kromme door punten te beschrijven, en alzoo derzelve loop na te gaan: want laat de lijn AD en het quadrant BD ieder in een zelfde getal gelijke deelen verdeeld worden (*in de Figuur zijn er 4*), zoo wij dan de radien A_1, A_2, A_3, A_4 enz. trekken, en de lijnen $1C, 2C, 3C$ enz. evenwijdig aan AC maken, zullen hierdoor zoo veel punten 1, 2, 3 enz. van de kromme gevonden worden, en wij zullen alzoo het gedeelte ED van de kromme verkrijgen; het punt E echter uitgezonderd, om dat de lijnen aldaar op elkander liggende, geen snijpunt aantoonen.

§. 3. Zoo nu AB voortgaat, met rondom A te bewegen, en door de punten 5, 6, 7, van het tweede quadrant loopt, zal AC te gelijker tijd in $5C, 6C$ en $7C$ komen, en hierdoor worden de punten 5, 6 en 7, van de kromme bekend; doch AB in A_8 komende, en dus eene halve omwenteling volbragt hebbende, zal zij, evenwijdig aan $8C$ zijnde, dezelve niet meer kunnen snijden, en $C'FC$ zal bijgevolg eene Asymptote van de tak EX zijn, waarvan alzoo den geheelen loop is bepaald.

§. 4. Laten wij nu AB door de punten 9, 10 en 11, van het derde quadrant loopen, dan komt AC agtervolgens in $9C, 10C$ en $11C$, en wordt dan door het verlengde van A_9, A_{10} en A_{11} , gesneden in de punten 9, 10 en 11 van de kromme, tot dat de snijding van A_{12} met $12C$ het punt D' geeft, waar de kromme voor de tweede keer AP snijdt: en AB op dezelfde
wij-

wijze door het vierde quadrant doende loopen, verkrijgen wij de punten 13, 14 en 15 van de kromme; tot dat A16; wederom evenwijdig met 16C zijnde, eene tweede Asymptote C'GC aanwijst. Hierdoor is dan den loop van de geheele tak ZD'Y bepaald; welke geheel tusschen de Asymptoten C'FC en C'GC besloten ligt.

§. 5. Het geen tot nu toe gezegd is, zal reeds genoegzaam zijn om den verdere loop van onze kromme te doen opmaken. Bij de voortzetting van deze constructie bespeurt men namelijk ten duidelijkste, dat iedere halve omwenteling van AB eene nieuwe tak zal opleveren, welke tusschen twee Asymptoten besloten ligt; daar nu, bij elke halve omwenteling, AC eene ruimte doorloopt, zoo groot als tweemaal AD, blijkt hieruit dat deze Asymptoten alle, op eenen gelijken afstand van elkander liggen, en welke afstand gelijk is aan tweemaal AD. En daar, bij elke vierde gedeelte van eene omwenteling, de lijn AC eene ruimte, gelijk aan AD, doorloopt, volgt hieruit, dat de punten 4, 12, 20 enz., waarin de kromme lijn AP snijdt, op gelijke afstanden van elkander liggen, en de lijnen AF, FG, GH enz. midden door deelen. Daar nu niets verhindert, om beide bewegende lijnen tot in het oneindige te doen voortloopen, zoo is het klaar, dat er een oneindig aantal zulke takken boven AC bestaan.

§. 6. Ofschoon wij nu de beweging verondersteld hebben, begonnen te zijn, toen de twee lijnen AB en AC op elkander lagen, kan deze toestand echter niet anders begrepen worden, dan een gevolg van eene voorgaande beweging geweest te zijn; want even zoo duidelijk als het is, dat de beide lijnen hare beweging tot in het oneindige voortzetten, even klaar is het ook, dat men dezelve begrijpen moet, als bij deszelfs op elkander ligging, reeds eenen oneindigen tijd in beweging geweest te zijn. Om nu de takken, door
deze

deze voorgaande beweging te bepalen, moeten wij noodzakelijk onze constructie achterwaarts voortzetten, en alzoo AC naar beneden in plaats van naar boven, en AB mede in eene tegenovergestelde rigting doen bewegen, en dan is het zonneklaar, dat er beneden AC eene figuur moet ontstaan, volkomen Sijmetrisch met de figuur, welke wij boven AC gevonden hebben: en hierdoor verkrijgt dan de kromme, in haar geheel genomen, den vorm, welke in de figuur is aangewezen.

§. 7. Laat nu door A eene willekeurige lijn getrokken worden, welke de takken der kromme snijdt in M, M', M'' enz. en m, m', m'' enz.; om dat er nu tussehen de wording, van elke twee dezer punten, eene halve omwenteling verloopend is, volgt hieruit, dat $q''q'$, $q'q$, qQ , QQ' enz. alle gelijk tweemaal AD, en dus gelijk aan elkander zijn. Maar dit zoo zijnde, moeten ook $m''m'$, $m'm$, mM , MM' enz. gelijk aan elkander zijn; waaruit volgt, dat elke lijn, welke door het punt A gaat, door de takken der kromme, in een oneindig aantal gelijke deelen gedeeld wordt, en dit geeft een zeer gemakkelijk middel aan de hand, om alle de oneindige takken te construeeren, wanneer slechts de middelste tak X'EX geconstrueerd is.

§. 8. Deze middelste tak eens geconstrueerd zijnde, is het ook zeer gemakkelijk, door derzelver behulp eenen gegebenen hoek in zoo veel gelijke deelen te verdeelen, als men begeert: want laat NAB de gegevene hoek zijn, dan is $AQ:AO$

$$= \text{boog BR} : \text{boog BRDR}'; \text{ zoo nu } AQ = \frac{1}{n} AO$$

$$\text{genomen wordt, zal ook } \text{boog BR} = \frac{1}{n} \text{boog BRDR}'$$

$$\text{en bijgevolg } \angle RAB = \frac{1}{n} \angle NAB \text{ zijn.}$$

§. 9.

§. 9. Laat ons nu overgaan, om de vergelijking van onze kromme te bepalen: Stellen wij ten dien einde $AD = 1$, en voor eenig punt M, $AQ = x$, $QM = y$ en BR of $\angle RAB = \phi$; dan is $AQ : AD = \text{boog } BR : \text{boog } BD$ (1), dat is $x : 1 = \phi : \frac{1}{2} \pi$, waaruit $\phi = \frac{1}{2} \pi x$; nu is in den regthoekigen driehoek AQM, $QM = AQ \text{ Tang. } QAM$, of $QM = AQ \cdot \text{Cot. } RAB = AQ \cdot \text{Cot. } \phi$; zoo dat $y = x \text{ Cot. } \frac{1}{2} \pi x$ de begeerde vergelijking is.

§. 10. Deze vergelijking bevestigt nu, al wat over den loop van onze kromme gezegd is; want uit dezelve blijkt:

1^o. Dat x positief of negatief nemende, y dezelfde waarde behoudt, en dat dus de kromme aan beide zijden van AC denzelfden vorm heeft.

2^o. Dat y , voor elke waarde van x , slechts eene waarde heeft, en dat x tusfchen 0 en 1 nemende, dat is tusfchen A en D, y positief, maar x tusfchen 1 en 2, dat is tusfchen D en F nemende, y negatief wordt, tot dat $x = 2$, y oneindig maakt, en dus de Asfymptote C'FC geeft.

3^o. Dat x tusfchen 2 en 3, dat is tusfchen F en D' nemende, y positief, maar x tusfchen 3 en 4, dat is tusfchen D' en G nemende, y negatief wordt, tot dat $x = 4$ wederom y oneindig maakt, en dus de Asfymptote C'GC verfchaft, en zoo voorts voor de volgende takken.

§. 11. Stellen wij $x = 0$, dan hebben wij $y = AE = 0 \times \text{Cot. } 0 = 0 \times \infty$; om de waarde van deze onbepaalde uitdrukking te vinden, fchrijven wij de vergelijking aldus: $y = \frac{x \text{ Cos. } \frac{1}{2} \pi x}{\text{Sin. } \frac{1}{2} \pi x}$; nemende nu de differentiaal van

den teller en den noemer, zoo hebben wij

$$\frac{\delta x \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2} \pi x - \frac{1}{2} \pi x \delta x \text{ Sin. } \frac{1}{2} \pi x}{\left(\frac{1}{2} \pi \delta x \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2} \pi x \right)}$$

dat is $\frac{\text{Cos. } \frac{1}{2} \pi x - \frac{1}{2} \pi x \text{ Sin. } \frac{1}{2} \pi x}{\frac{1}{2} \pi \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2} \pi x}$, en stellende hier-

hierin $x = 0$, komt er $AE = \frac{2}{\pi}$. Wanneer dus het punt E door constructie kon bepaald worden, zou ook de quadratuur des cirkels gevonden zijn, en hierom is het, dat deze middelste tak den naam van *Quadratrix* draagt.

§. 12. Om nu de tangens van eenig punt M te bepalen, differentiëren wij onze vergelijking, en vinden na herleiding $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin \cdot \frac{1}{2} \pi x \cdot \cos \cdot \frac{1}{2} \pi x - \frac{1}{2} \pi x}{\sin^2 \cdot \frac{1}{2} \pi x}$;

nemende nu de subtangens ST op den as der ordinaten, is $ST = x \frac{\partial y}{\partial x}$, dat is $ST =$

$$\frac{x \sin \cdot \frac{1}{2} \pi x \cdot \cos \cdot \frac{1}{2} \pi x - \frac{1}{2} \pi x^2}{\sin^2 \cdot \frac{1}{2} \pi x} = x \cot \cdot \frac{1}{2} \pi x -$$

$$\frac{\frac{1}{2} \pi x^2}{\sin^2 \cdot \frac{1}{2} \pi x} = y - \frac{\frac{1}{2} \pi x^2}{\sin^2 \cdot \frac{1}{2} \pi x}.$$

Wijl nu in de onderstelling van $ST = \frac{x \partial y}{\partial x}$, $AT = ST - y$ is,

is $AT = - \frac{\frac{1}{2} \pi x^2}{\sin^2 \cdot \frac{1}{2} \pi x}$, welke negatieve waarde alleen aanduidt, dat AT hier in dezelfde rigting van de ordinaat y moet genomen worden.

Wij hebben dan $AT = \frac{\frac{1}{2} \pi x^2}{\sin^2 \cdot \frac{1}{2} \pi x}$; maar $MS = AM \cdot \sin \cdot MAS = MA \cdot \sin \cdot \frac{1}{2} \pi x = x$ zijnde, is $\frac{x}{\sin \cdot \frac{1}{2} \pi x} = MA$, waardoor $AT =$

$\frac{1}{2} \pi AM^2$; maar $AE = \frac{2}{\pi}$ zijnde, is $\frac{1}{2} \pi = \frac{1}{AE}$

en dus $AT = \frac{MA^2}{AE}$, en de tangens wordt dus gevonden door deze eenvoudige evenredigheid: $AE : MA = MA : AT$; welke eenvoudige constructie, zoo wel voor de oneindige takken, als voor de quadratrix, doorgaat.

§. 13. Het is klaar, dat ieder der oneindige tak-

takken, bij v. YD'Z, een buigpunt moet hebben; wilt zij, om beide lijnen C'GC en C'FC tot Asymptoten te hebben, eerst met de holle en dan met de bolle zijde naar dezelve moet zijn gekterd. Daar wij nu, om deze buigpunten te bepalen, de tweede differentiaal gelijk nul moeten

stellen, differentieren wij $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi x \cdot \sin \frac{1}{2} \pi x - \frac{1}{2} \pi x}{\sin^2 \frac{1}{2} \pi x}$

op nieuw, en vinden, na herleiding

$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\pi \left(-1 + \cot \frac{1}{2} \pi x \times \frac{1}{2} \pi x \right)}{\sin^2 \frac{1}{2} \pi x}$; stellende

dan $-1 + \cot \frac{1}{2} \pi x \times \frac{1}{2} \pi x = 0$, komt er

$\frac{1}{2} \pi x = \frac{1}{\cot \frac{1}{2} \pi x}$, dat is: $\frac{1}{2} \pi x = \text{Tang} \cdot \frac{1}{2} \pi x$.

Om hietdoor de waarde van x , voor de buigpunten, te vinden, zouden wij dus het volgend voorstel moeten oplossen: *een boog te vinden, welke gelijk is aan deszelfs Tangens*. Men vindt de oplossing van dit voorstel bij EULER (*Introduct. in An. Inf. Lib. 2. Cap. 20. §. 539*); hetzelfde heeft een oneindig aantal oplossingen, welke de waarde van x , voor het oneindig aantal buigpunten aanduiden. De eerste waarde bij voorbeeld is $\frac{1}{2} \pi x = 0$ of $x = 0$, en dit geeft het punt D, hetwelk klaarblijkelijk in verband met onze buigpunten staat. De tweede oplossing is $\frac{1}{2} \pi x = 257^\circ 27' 12''$, hetwelk in deelen van den radius geeft, $x = 2,86$ ten naaste bij; nemende dus $AA' = 2,86 AD$, vinden wij hierdoor het buigpunt E'. En zoo voor de overige takken.

§. 14. Wij kunnen echter deze buigpunten gemakkelijker vinden; want stellende in $\frac{1}{2} \pi x \cot \frac{1}{2} \pi x = 1$; y in plaats van $x \cot \frac{1}{2} \pi x$; dan

hebben wij $\frac{1}{2} \pi y = 1$ of $y = \frac{2}{\pi} = AE$, waar-

uit wij leeren, dat door E eene loodlijn KK' op AC trekkende, deze alle de takken der kromme juist in de buigpunten zal doorsnijden: en hieruit

volgt verder, dat, de quadratrix met deszelfs rakken, eens geconstrueerd zijnde, door middel van deze buigpunten, het voorstel in §. 13. vermeld, door constructie kan worden opgelost.

§. 15. Stellen wij $AM = x$, hebben wij

$$AM = \frac{MS}{\sin . \angle MAS}, \text{ dat is } x = \frac{x}{\sin . \varphi}; \text{ daar nu}$$

$x = \frac{2\varphi}{\pi}$ (§. 9.), zoo is $u = \frac{x}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin . \varphi}$ de

Pool-vergelijking van onze kromme, welke vergelijking de eigenschap, in §. 7. aangewezen, volkomen bevestigt; waarvan men zich kan overtuigen, door voor φ achterevolgens te schrijven $\varphi + \pi$, $\varphi + 2\pi$ enz.; want men zal dan zien, dat x hier bij ieder keer met $\frac{2}{\sin . \varphi}$ vermeerderd, en beurtelings $+$ en $-$ wordende, dan op de bewegende lijn, en dan op derzelver verlengde moet genomen worden.

§. 16. Wij zullen deze oplossing besluiten met aan te merken, dat, wijl $Tang . \angle AMT = \frac{u d\varphi}{\delta u}$ is (*Opl. van het 121 Voorst.*) wij hier zullen hebben $Tang . \angle AMT = \frac{\varphi}{1 - \varphi \cos . \varphi}$; nu is voor

de buigpunten $Tang . \varphi = \varphi$ of $\cos . \varphi = \frac{1}{\varphi}$ (§. 13.), zoo dat in de buigpunten $Tang . \angle AMT = \frac{\varphi}{1 - 1} = \infty$, dus $\angle AMT = 90^\circ$ is; waaruit volgt, dat de voerstraalen van alle de buigpunten loodregt op de kromme staan.

Nº. 132. Door

U. HUGUENIN.

Dit voorstel onthoudt twee gevallen:

1º. Als de kleinste, der in γ concentrische cirkels $D\alpha\beta$ (*Fig. 119*), met zijnen omtrek over eene regte lijn DE voortgerold wordt, terwijl het punt H des grootsten concentrischen cirkels $H\alpha\beta$ eene kromme lijn $HXZX'K$ beschrijft.

2º. Wanneer de grootste dezer concentrische cirkels $D\alpha\beta$ (*Fig. 120*), op eene regte lijn DE voortgerold, en door het punt H des kleinften cirkels $H\alpha\beta$ eene kromme lijn $HXZX'K$ beschreven wordt.

Men stelle (*Fig. 119 en 120*) dat de voortrollende cirkel $D\alpha\beta$ de lijn DE in D raakt, en dat door D en het middelpunt γ eene onbepaalde regte lijn getrokken zij, welke op DE loodrecht wezen zal, doordien, uit den aard van het voorstel, deze laatste lijn tangent aan den cirkel $D\alpha\beta$ in D is. Stel dat zich het punt H des grootsten cirkels in *fig. 119* onder, en des kleinften cirkels in *fig. 120* boven het punt D , in deze loodlijn bevindt; laat voorts in de beide figuren HK evenwijdig aan DE zijn, dan zal, wanneer de cirkel $D\alpha\beta$ op DE voortrolt, de cirkel $H\alpha\beta$ zich met zijnen omtrek op de lijn HK bewegen; waarom dan ook deze lijn tangent aan dezen cirkel zijn zal.

Het is bekend, dat, bij de voortrolling van den cirkel $D\alpha\beta$ op DE , het punt D eene cycloïde DAE beschrijft, zoodanig, dat, als het punt D in E gekomen is, de regte DE gelijk den omtrek des cirkels $D\alpha\beta$ wezen zal, en wanneer zich het punt D in A bevindt, in de op DE loodrechte diameter ACB , dat alsdan $DB = BE =$ den halven omtrek des teelenden cirkels $D\alpha\beta$ is. Het punt H des tweeden cirkels beschrijft te ge-

lijker tijd eene kromme lijn van eene geheel andere natuur, welke echter eene naauwe betrekking op de cirkloïde heeft, en het punt H zal zich in Z, in den verlengden diameter BA (*Fig. 119*), of in dezen diameter zelve (*Fig. 120*) bevinden, als het punt D in A aangekomen is; terwijl voorts het punt H in K zal zijn, als het punt D in E komt.

Laten de beide concentrische cirkels zoo verre zijn voortgerold, dat hun gemeen middelpunt γ zich in O, en het punt D zich in M bevindt; dan zal het punt H zich in de verlengde MO (*Fig. 119*), of in MO (*Fig. 120*) zelf, in het punt F bevinden, zoodanig, dat $FM = DH$ zijn zal. Zij voorts door het punt O, de op DE loodregte LN getrokken, zoo is N het raakpunt des cirkels $D\alpha\beta$ aan DE; wijders deele men de loodregte AB $= D\beta$ midden door in C, en beschrijve met CB als radius eenen cirkel BQA, welke gelijk aan den cirkel $D\alpha\beta$ zijn zal. Men trekke FG en MP evenwijdig aan DE, zoo zal de laatste den omtrek des cirkels AB in Q, en de loodregte LN in R snijden; en als men de radiën MO en QC, benevens de lijnen MN en QB, getrokken heeft, ziet men ligtelijk, dat de regthoekige driehoeken MRO en QPC, als mede MRN en QPB, gelijk en gelijkvormig zijn; waaruit volgt dat $MN = NB = RP = LG$.

Zij de radius des cirkels $D\alpha\beta$, $\gamma D = MO = QC = r$, en $DH = FM = a$, zoo is voor *fig. 119*, $\gamma H = FO = r + a$, en voor *fig. 120*, $\gamma H = FO = r - a$; laat voorts de verhouding van de radius tot den halven omtrek als r tot π zijn, en zij, voor de radius $= 1$, de hoog, welke met den hoek $QCA = MOR$ overeenkomt, $= \phi$, dan is *hoog* QA $= r\phi$; maar bij de cirkloïde is de lijn DN gelijk den afgerol-
den *hoog* MN $= \text{hoog. BQ}$; derhalve moet de
hoog

hoog. QA, of $r\phi$, gelijk $BN = MQ = PR = LG$ zijn, en doordien $FL = FO \sin. \phi = (r \pm a) \sin. \phi$ is, heeft men $FG = (r \pm a) \sin. \phi + r\phi = UI$, als men FU loodrecht op HK stelt; waarin het teeken $+$ tot fig. 119, en het teeken $-$ tot fig. 120 behoort. Daar voorts $ZC = r \pm a$ en $GC = LO = (r \pm a) \cos. \phi$ is, zoo heeft men $ZG = ZC - GC = (r \pm a) (1 - \cos. \phi)$.

Neemt men wijders den as, of middellijn ZI, als abscissen-lijn aan, en stelt men de abacis $ZG = x$ en de ordinaat $FG = y$, zoo heeft men (Fig. 119 en 120) $x = (r \pm a) (1 - \cos. \phi)$ en $y = (r \pm a) \sin. \phi + r\phi$. De vergelijkingen voor deze beide figuren alleen in het teeken van a verschillende, zoo kunnen de vergelijkingen: $x = (r + a) (1 - \cos. \phi)$ en $y = (r + a) \sin. \phi + r\phi$ voor figuur 119, ook voor figuur 120 dienen, en omgekeerd; als men a het tegengestelde teeken geeft, waarom wij dan ook, het dubbele teeken, des goedvindende, kunnen weglaten.

Wij hebben langs dezen weg, voor de coördinaten x en y , twee bijzondere vergelijkingen gevonden, in welke eene derde veranderlijke grootheid ϕ voorkomt, en hoe zeer wij van dezelve, bij onze onderzoekingen, veel gebruik zullen maken, wegens hare gemakkelijkheid in de berekeningen, zoo zullen wij echter, uit dezelve, ook nog de vergelijking tusschen x en y afleiden. Uit

$$\text{de waarde van } x \text{ vindt men } \cos. \phi = \frac{r \pm a - x}{r \pm a};$$

$$\text{dus is } \sin. \phi = \sqrt{(1 - \cos. \phi^2)} = \sqrt{\frac{2(r \pm a)x - x^2}{(r \pm a)^2}}$$

$$\text{en } y = \sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)} + r \text{ Arc. Cos.}$$

$\left(\frac{r \pm a - x}{r \pm a}\right)$ de vergelijking tusschen de coördinaten.

Hernemen wij wederom onze eerst gevondene vergelijkingen $x = (r \pm a) (1 - \cos. \phi)$ en $y =$

$y = (r \pm a) \sin . \phi + r \phi$, en stellen wij in dezelve $\phi = 0$, zoo is $\sin . \phi = 0$, $\cos \phi = 1$ en $1 - \cos . \phi = 0$, waardoor x en y tevens $= 0$ worden, hetwelk aantoonst, dat in dit geval het punt F zich in den oorsprong der ordinaten en abscissen bevindt, dat is in het punt Z .

Zij nu $\phi = \pi$, dat is $= 180^\circ$, zoo is $\sin . \phi = 0$ en $\cos = -1$, gevolgelyk $x = 2(r \pm a) = ZI$ en $y = r\pi = HI = DB$, namelijk geelyk aan den halven omtrek des cirkels, welke de cirkloïde beschryft: het punt F is alzoo voor dit geval in H .

Laat voorts $\phi = \frac{1}{2} \pi = 90^\circ$ zijn, dan is $\cos . \phi = 0$ en $\sin . \phi = 1$, derhalve $x = r \pm a$ en $y = r \pm a + \frac{1}{2} r \pi$. Het punt G bevindt zich dus voor dit geval in het middelpunt des cirkels C , en het punt F in f , als fC loodregt in C op ZI is. Voorts is $fC = y = (r \pm a) + \frac{1}{2} r \pi = ZC + \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} (ZI + DB)$; waaruit blijkt, dat in *fig. 119* het punt f buiten de loodlijn Hb zal gelegen zijn, als $ZI > DB$ is; wyl alsdan $\frac{1}{2} (ZI + DB) > DB$ wezen zal; in welk geval zich dan ook een gedeelte der kromme lijn $HXfS$ buiten de loodlijn Hb bevindt.

In *fig. 120* daarentegen, is $ZI < AB$ en dus ook kleiner dan den halven omtrek DB , dienvolgens bevindt zich, bij deze figuur, het punt f steeds tuschen γ en C .

Doordien (*Fig. 119* en *120*) $mG^2 = ZG \times GI = ZC^2 - CG^2 = (r \pm a)^2 (1 - \cos . \phi^2) = (r \pm a)^2 . \sin . \phi^2$ is, zoo is $mG = (r \pm a) \sin . \phi$ en $Fm = FG - mG = r\phi = \text{boog. } QA$; voorts is $HI = DB = \text{boog. } BQA$, en daar volgens de eigenschap des cirkels $QC : mC = \text{boog. } QA : \text{boog. } mZ = \text{boog. } BQA : \text{boog. } ImZ$ is, zoo is ook $\text{boog. } QA : \text{boog. } BQA = \text{boog. } mZ : \text{boog. } ImZ$; dat is $Fm : HI = \text{boog. } mZ : \text{boog. } ImZ$.

Ingevolge hiervan kan men ook Hab , of $ImZI$, als teelende cirkel beschouwen, welke over HK voort-

voortgaande en draaijende bewogen wordt, zoodanig, dat, als de cirkel in I komt, het punt H zich in Z bevindt, in dier voege, dat voor elk punt F der kromme lijn, de zoo even gevondene evenredigheid plaats heeft, zoo beschrijft het punt H onze reeds beschrevene kromme lijnen *fig. 119* en *120*; te weten: *fig. 119*, als $HI < \text{boog} . Im Z$, en *fig. 120*, als $HI > \text{boog} . Im Z$ is; waarom dan ook de Wiskundigen, *fig. 119* de *verkorte*, en *fig. 120* de *verlengde* cycloïde noemen, alzoo bij de gewone cycloïde $HI = \text{boog} . Im Z$ is.

Om te onderzoeken, of er bij deze kromme lijnen, *fig. 119* en *120*, ook een maximum der ordinaten plaats heeft, differentieere men de waarden van x en y , waardoor men bekomt $\delta x = (r \pm a) \sin . \phi$ en $\delta y = (r \pm a) \cos . \phi$, $\delta \phi + r \delta \phi$, dus moet $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(r \pm a) \cos . \phi}{(r \pm a) \sin . \phi} = 0$ zijn;

waaruit men vindt, $\cos . \phi = \frac{-r}{r \pm a}$ en $\sin . \phi =$

$\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{(r \pm a)^2}\right)}$; van deze waarden zijn al-

leen $\cos . \phi = \frac{-r}{r + a}$ en $\sin . \phi = \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{(r + a)^2}\right)}$

voor *fig. 119* mogelijk; daarentegen zijn $\cos . \phi =$

$\frac{-r}{r - a}$ en $\sin . \phi = \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{(r - a)^2}\right)}$ voor *fig.*

120 onmogelijke waarden, doordien $\frac{-r}{r - a} > -1$

en $\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{(r - a)^2}\right)}$ imaginair zijn; waaruit

blijkt, dat bij de kromme lijn *fig. 120* geen maximum der ordinaten plaats heeft; bij *fig. 119* daarentegen, heeft men voor het maximum, daar

$\sin . \phi = \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{(r + a)^2}\right)} = \frac{\sqrt{(2ra + a^2)}}{r + a}$ is,

$$x = (r + a) \left(1 + \frac{r}{r + a} \right) = 2r + a = ZB, \text{ en}$$

$$y = \sqrt{(2ra + a^2)} + r \text{ Arc. Cos. } \frac{-r}{r + a} = BX;$$

alzo, uit de waarde van x blijkt, dat de grootste ordinaat zich op de basis DE der cycloïde bevindt; dat is op den afstand HD = a van de basis HK der kromme lijn. Wij dienen nu nog aan te toonen, dat de gevondene waarde van BX, grooter dan BD is (*).

De $\text{Cos. } \phi = \frac{-r}{r + a}$, negatief zijnde, behoort tot eenen boog, die grooter dan het vierde gedeelte des omtreks is; om dezen boog te bepalen, rigte men in δ eene loodlijn op $\gamma\delta$, welke den grootsten cirkel in d snijdt; voorts trekke men uit d , door het middelpunt γ , tot den omtrek des kleinsten cirkels in ϵ , de lijn $d\epsilon$; zoo is $\delta d = \sqrt{(\gamma d^2 - \gamma \delta^2)} = \sqrt{[(r + a)^2 - r^2]} = \sqrt{(2ar + a^2)}$; en daar $\gamma d : \gamma \delta = 1 : \text{Cos. } d\gamma\delta$ en alzo $\text{Cos. } d\gamma\delta = \frac{\gamma \delta}{\gamma d} = \frac{r}{r + a}$ is, zoo behoort $\angle d\gamma\delta = \angle a\gamma\epsilon$ tot eenen boog, wiens cosinus is $\frac{r}{r + a}$; derhalve behoort $\angle a\gamma d = \angle \epsilon\gamma\delta$ tot eenen boog, welke $\frac{-r}{r + a}$ tot cosinus heeft; dus is $\text{boog } \epsilon D\delta = r \text{ Arc. Cos. } \frac{-r}{r + a}$; waar-

(*) Dat de gevondene waarde van y een wezenlijk maximum is, zou uit de verkennings-vergelijking $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \text{enz.}$ kunnen blijken, als men niet, uit de voortbrenging dezer figuur, oogenfchijnlijk daarvan overtuigd was.

waaruit dan volgt, dat de lijn $BX = \delta d + \text{boog. } \delta$ zijn zal; maar $\delta d > \text{boog. } \delta \lambda$, derhalve $BX = \delta d + \text{boog. } \delta > \text{boog. } \delta \lambda$; dat is $BX >$ dan den halven omtrek des cirkels $D\alpha\beta\delta$, en dus ook grooter dan DB . Voorts volgt hieruit, dat $XD = BX - BD = \delta d + \text{boog. } \delta - \text{boog. } \delta \lambda = \delta d - \text{boog. } \delta \lambda$ is.

Daar het punt H , hetwelk bij *fig. 119* de kromme beschrijft, zich van H , door X , naar Z beweegt, zal hetzelfde de lijn Hb ergens in een punt S snijden: het is opmerkingswaardig, dat, hoe zeer ook de ordinaat voor dit punt gelijk aan de bekende lengte DB is, hetzelfde zich echter niet, dan door eene transcendente vergelijking laat bepalen; want voor dit punt, $y = (r + a) \sin \phi + r \phi = BD = r\pi$ zijnde, zoo volgt hieruit,

dat $\sin \phi = \frac{r}{r+a} (\pi - \phi)$ wezen moet, en

deze vergelijking laat zich niet anders dan door eene oneindige reeks oplossen: want zoo men den $\text{boog. } \phi$ begeert te vinden, moet men in dezelve

$$\sin \phi = \phi - \frac{\phi^3}{2 \cdot 3} + \frac{\phi^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{enz.}$$

substitueren; begeert men echter de Sinus van dezen boog te vinden, zoo substitueere men in deze

$$\text{vergelijking, } \phi = \sin \phi + \frac{\sin^3 \phi}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 3 \sin^5 \phi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \sin^7 \phi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{enz.};$$

in beide gevallen echter moet de waarde van ϕ , of van $\sin \phi$, door omkeering van de gebruikte reeks, bepaald worden; doch, dewijl zulks niets belangrijks kan opleveren, zullen wij ons hiermede niet ophouden.

Ten einde een tangent Ft aan eenig punt F der kromme lijnen, *fig. 119* en *120*, te trekken, zullen wij ons van de bekende formule voor de sub-

subtangent $tG = \frac{y \delta x}{\delta y}$ bedienen, en hierin de gevondene waarden van $\delta x = (r \pm a) \sin. \phi \delta \phi$ en $\delta y = (r \pm a) \cos. \phi \delta \phi + r \delta \phi$ substitueren, waardoor wij bekomen

$$tG = \frac{[(r \pm a) \sin. \phi + r \phi] (r \pm a) \sin. \phi}{(r \pm a) \cos. \phi + r}$$

Maar $FG = (r \pm a) \sin. \phi + r \phi$, $mG = (r \pm a) \sin. \phi$ en $GB = (r \pm a) \cos. \phi + r$; derhalve is

$$tG = \frac{FG \times mG}{GB}, \text{ de vierde evenredige tot } GB,$$

FG en mG ; daarentegen is bij de gewone cijcloïde de tangent Mz' evenwijdig met de koorde QA ; want zoo men in onze gevondene waarden, $a = 0$ stelt, valt F in M , Z in A , t in t' , en G in P , en men heeft $MP = r \sin. \phi + r \phi$, $QP = r \sin. \phi$, $AP = r (1 - \cos. \phi)$ en $t'P = \frac{(r \sin. \phi + r \phi) r \sin. \phi}{r \cos. \phi + r} = \frac{(r \sin. \phi + r \phi) \sin. \phi}{1 + \cos. \phi}$;

$$\text{dus is } MP : t'P = r \sin. \phi + r \phi : \frac{(r \sin. \phi + r \phi) \sin. \phi}{1 + \cos. \phi}$$

$= 1 + \cos. \phi : \sin. \phi = 1 - \cos. \phi^2 : \sin. \phi$
 $(1 - \cos. \phi) = \sin. \phi^2 : \sin. \phi (1 - \cos. \phi) =$
 $\sin. \phi : 1 - \cos. \phi = r \sin. \phi : r (1 - \cos. \phi);$
 waaruit blijkt, dat bij de cijcloïde $MP : t'P = QP : AP$ is, en dat alzoo Mz' en QA evenwijdige lijnen zijn.

De formule voor de subtangent tG wordt $= 0$, als men in dezelve $\phi = 0$, of $\phi = \pi$ stelt, wijl in deze beide gevallen $\sin. \phi = 0$ wordt; en hieruit blijkt, daar in het eerste geval het punt F in Z valt, dat de tangent aan dit punt loodregt op de lijn der abscissen ZI staat, doordien er geen subtangent bij plaats heeft; hetwelk ook voor $\phi = \pi$ het geval is, waardoor het punt F in H is, en de tangent aan dit punt op YHI valt, en alzoo ook regthoekig op de lijn der abscissen ZI staat,

Als

Als men den hoek FOL of $\phi = \angle fCZ = 90^\circ$ stelt, valt F in f , en men heeft $\phi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, $\text{Sin.}\phi = 1$ en $\text{Cos.}\phi = 0$, dus is de subtangente voor het punt f gelijk $\frac{(r \pm a)^2}{r} + \frac{1}{2}(r \pm a) \cdot \pi$.

Om de subtangente voor het punt X, *fig.* 119, te bepalen, heeft men ingevolge het hier vóór gevondenene: $\text{Cos.}\phi = \frac{-r}{r+a}$, $\text{Sin}\phi = \frac{\sqrt{(2ra+a^2)}}{r+a}$

en $\phi = \text{Arc. Cos.} \frac{-r}{r+a}$; derhalve is de subtangente voor dit punt,

$$\frac{(\sqrt{(2ra+a^2)} + r \text{Arc. Cos.} \frac{-r}{r+a}) \sqrt{(2ra+a^2)}}{(r+a) \cdot \frac{-r}{r+a} + r} = \infty$$

wijl de noemer $-r + r = 0$ is, derhalve is de subtangente voor het punt X oneindig groot, waaruit volgt, dat de tangent aan dit punt evenwijdig met de lijn der abscissen ZI is, en dat alzoo het punt X geen keerpunt wezen zal, wijl bij een zoodanig punt de subtangente *nul* is, doordien de tangent van een zoodanig punt loodregt op de lijn der abscissen staat. Voorts blijkt ook nog hieruit, dat de kromme lijn HXS met hare holle zijde naar de lijn Hb gekeerd zij, wijl het tegengestelde bij een keerpunt plaats heeft. Uit dien hoofde, en dewijl BX, *fig.* 119, het eenigste gevonden *maximum* der ordinaten is, volgt hieruit, dat bij deze kromme lijn geen keerpunten plaats hebben, gelijk er ook geene bij *fig.* 120 kunnen voorkomen, alzoo bij deze figuur, gelijk wij gezien hebben, geen maximum der ordinaten mogelijk is.

Het zal nu nog noodig zijn te onderzoeken, of deze kromme lijnen, *fig.* 119 en 120, ook buigpunten hebben, waartoe ons de bekende vergelijking

king $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = 0$ dienen moet, (zie 4^{de} Stukje der Verz. van Voorst. pag. 245) daar echter in de tweede differentiaal van $y = (r \pm a) \sin \phi + r \phi$, de differentiale uitdrukking van den boog $r \phi$ uit de vergelijking verdwijnt, als men $\partial \phi$ als standvastig aanneemt, zoo zullen wij ons bij deze onderzoeking, van de hier voor gevondene vergelijking tusschen x en y , namelijk van

$$y = \sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)} + r \text{Arc. Cos.} \left(\frac{r \pm a - x}{r \pm a} \right)$$

bedienen, bij welke deze zwaartgheld geen plaats heeft.

Om de differentiaal van $\text{Arc. Cos.} \frac{r \pm a - x}{r \pm a}$ te vinden, merke men op, daar $\partial \text{Cos.} \phi = -\text{Sin.} \phi \partial \phi$ is, dat $\partial \phi = -\frac{\partial \text{Cos.} \phi}{\text{Sin.} \phi}$ zijn moet;

maar $\text{Cos.} \phi = \frac{r \pm a - x}{r \pm a}$; dus $\partial \text{Cos.} \phi = \frac{-\partial x}{r \pm a}$; en daar wijders $\text{Sin.} \phi = \sqrt{(1 - \text{Cos.} \phi^2)} = \frac{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}}{r \pm a}$ is, zoo is $\partial \phi$, of

$$\partial \text{Arc. Cos.} \frac{r \pm a - x}{r \pm a} = \frac{\partial x}{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}}$$

$$\text{en } \partial y = \frac{(r \pm a) \partial x - x \partial x}{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}} + \frac{r \partial x}{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}}$$

$$= \frac{(2r \pm a - x) \partial x}{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}}; \text{ derhalve is } \partial \partial y =$$

$$\frac{\sqrt{(2(r \pm a)x - x^2)}}{\partial x^2} + \frac{(2r \pm a - x)(r \pm a - x) \partial x^2}{(2(r \pm a)x - x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{[(2r \pm a)(r \pm a) - rx] \partial x^2}{(2(r \pm a)x - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ als men } \partial x$$

$$\text{als standvastig beschouwt. Diensvolgens is } \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = 0; \text{ en hier-}$$

door

door vindt men $x = \frac{(2r \pm a)(r \pm a)}{r} = 2r \pm 3a + \frac{a^2}{r}$;

namelijk voor *fig. 119* is $x = 2r + 3a + \frac{a^2}{r} =$

$ZI + a + \frac{a^2}{r}$; hetwelk aantoonst, dat, zoo deze

kromme lijn een buigpunt heeft, de ordinaat van dit punt onder de lijn HK valt, op eenen afstand,

welke $= a + \frac{a^2}{r}$ is, hetwelk niet zijn kan, door-

dien er geen gedeelte der kromme lijn onder HK bestaat, zoo als ook uit de vergelijking $y =$

$\sqrt{(2(r+a)x - x^2)} + r \text{ Arc. Cos. } \left(\frac{r+a-x}{r+a} \right)$

blijkt; want zoo men hierin $x = 2(r+a) + a + \frac{a^2}{r}$

substitueert, wordt $\sqrt{(2(r+a)x - x^2)}$ *imagi-*

naire en men bekomt voor de cosinus: $\frac{r+a-x}{r+a}$,

eene negatieve waarde, welke grooter dan -1 is;

derhalve is zulk eene ordinaat onmogelijk, en de-

ze kromme lijn heeft geen buigpunt. Geheel an-

ders is het met de kromme lijn *fig. 120* gelegen,

voor welke wij de abscis: $x = 2r - 3a + \frac{a^2}{r} =$

$ZI - a + \frac{a^2}{r} = ZI - \frac{a(r-a)}{r} = ZI - \frac{a \cdot CI}{r}$

hebben gevonden; want doordien $\frac{a \cdot CI}{r} < CI$ is,

zoo zal, als $IV = \frac{a \cdot CI}{r}$ gemaakt wordt, $x =$

$ZI - IV = ZV$ zijn, en de tot het punt V be-

hoorende ordinaat VX, zal die voor het buigpunt

X zijn; als men nu $x = \frac{(2r-a)(r-a)}{r}$ in de waarde van de ordinaat substitueert, bekomt men

men VX , of y , $= \sqrt{\frac{a(r-a)^2(2r-a)}{r^2}}$
 $+ r \text{ Arc. Cos. } \frac{-(r-a)}{r} = \frac{r-a}{r} \sqrt{a(2r-a)} +$
 $r \text{ Arc. Cos. } \frac{-(r-a)}{r}$, hetwelk eene mogelijke
 waarde is.

Ten einde de kromtestraal K , van eenig punt P
 aan deze kromme lijnen, *fig. 119 en 120*, te be-
 palen, zullen wij ons van de daartoe dienende
 bekende formule: $K = \frac{(\delta x^2 + \delta y^2)^{\frac{3}{2}}}{-\delta x \delta \delta y}$ bedienen,
 welke voor regthoekige coördinaten ingerigt is.
 Het bewijs van deze formule, te wijdoonpig zijn-
 de, hier bij te voegen, kan men vinden in *Vg-
 GA, Vorlesungen über die Mathematik, zweyter
 Band, § 698, 2te Auflage.*

Volgens onze laatst gevondene waarden van δy
 en $\delta \delta y$ heeft men:

$$\begin{aligned} \delta x^2 + \delta y^2 &= \delta x^2 + \frac{(2r \pm a - x)^2 \delta x^2}{2(r \pm a)x - x^2} \\ &= \frac{[(2r \pm a)^2 - 2rx] \delta x^2}{2(r \pm a)x - x^2} \\ (\delta x^2 + \delta y^2)^{\frac{3}{2}} &= \frac{[(2r \pm a)^2 - 2rx]^{\frac{3}{2}} \delta x^3}{[2(r \pm a)x - x^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \text{en } K &= - \frac{(\delta x^2 + \delta y^2)^{\frac{3}{2}}}{\delta x \delta \delta x} = \frac{[(2r \pm a)^2 - 2rx]^{\frac{3}{2}}}{(2r \pm a)(r \pm a) - rx} \end{aligned}$$

Deze vergelijking verandert in de bekende uit-
 drukking voor de kromtestraal der gewone cirkel-
 de, als men in dezelve $a = 0$ stelt, wijl men
 hierdoor bekomt

$$K = \frac{(4r^2 - 2rx)^{\frac{3}{2}}}{2r^2 - rx} = 2 \sqrt{2r(2r - x)}$$

Substitueert men in onze gevondene uitdruk-
 king, $x = (r \pm a)(1 - \text{Cos. } \phi)$, zoo bekomt men
 eene uitdrukking voor de kromtestraal, waarin de
 veranderlijke boog ϕ voorkomt, namelijk

$$K =$$

$$K = \frac{[a^2 + 2r(r \pm a)(1 + \cos \phi)]^{\frac{1}{2}}}{(r \pm a)(r \pm a + r \cos \phi)}$$

welke, voor $a = 0$, in die voor de cirkel, $\frac{[2r^2(1 + \cos \phi)]^{\frac{1}{2}}}{r^2(1 + \cos \phi)} = 2r \sqrt{2(1 + \cos \phi)} = 4r \cos \frac{1}{2} \phi$, verandert.

Stelt men in onze formule $\phi = 0$, zoo is $\cos \phi = 1$, en daar voor dit geval het punt F in Z valt, zoo is de kromtestraal voor dit punt

$$K = \frac{[a^2 + 4r(r \pm a)]^{\frac{1}{2}}}{(r \pm a)(2r \pm a)} = \frac{(2r \pm a)^2}{(r \pm a)(2r \pm a)} = \frac{(2r \pm a)^2}{(r \pm a)}$$

Stelt men daarentegen $\phi = \pi$, zoo valt F in H, en de kromtestraal voor dit punt is

$$\frac{(a^2)^{\frac{1}{2}}}{\pm a(r \pm a)} = \frac{\pm a^2}{r \pm a}; \text{ namelijk, voor fig. 119}$$

is dezelve $= \frac{a^2}{r \pm a}$ en voor fig. 120, $= \frac{-a^2}{r - a}$

hetwelk aantoon, dat deze kromtestraal (Fig. 120) voor het punt H, niet binnenwaarts, maar van H naar b , buiten de kromme lijn valt; daar bij fig. 119, voor het punt H, deze kromtestraal zich ook wel van H naar b uitstrekt, doch geen-zins eene tegenovergestelde kromming aantoon, zoo als bij fig. 120 plaats heeft. Voorts blijkt uit de tegengestelde teekens van de kromtestralen der punten Z en H bij deze figuur, dat dezelve noodzakelijk een buigpunt hebben moet, gelijk wij ook voor het punt X, fig. 120, gevonden hebben.

Om de lengte der kromtestraal voor dit buigpunt te vinden, substitueere men de voor dit punt ge-

vondene waarde der abscis $x = \frac{(2r - a)(r - a)}{r}$

in de uitdrukking der kromtestraal, zoo bekomt men

$$K = \frac{[(2r - a)^2 - 2(2r - a)(r - a)]^{\frac{1}{2}}}{(2r - a)(r - a) - (2r - a)(r - a)} = \infty$$

Dd

het-

hetwelk aantoonst, dat de kromtestraal voor het buigpunt X oneindig groot is, zoo als ook inderdaad behoort te zijn; want doordien de kromme lijn in het buigpunt, zich niet naar de eene of andere zijde kromt, zoo heeft deselve in dit punt hoegenaamd geene kromming, en is diensvolgens aldaar als eene regte lijn, of eenen cirkel te beschouwen, welke eenen radius van eene oneindige lengte heeft, zoo als wij ook werkelijk gevonden hebben.

De kromme lijn *fig. 119*, welke geen buigpunt heeft, gelijk *fig. 120*, heeft daarentegen eene andere eigenschap, die *fig. 120* niet bezit: namelijk, wanneer de rollende cirkels voortgaan, met twee dusdanige kromme lijnen nevens elkander te beschrijven, zoo vormen deselve een knoop; want als de cirkel Hab , *fig. 119*, met zijn middelpunt in γ' aangekomen is, waardoor de punten D en H zich in E en K zullen bevinden, en van daar voortgaat, met het schrijvende punt, in K beginnende, eene nieuwe kromme lijn $KG'T$ te beschrijven, zoo zal (daar deze kromme lijn volmaakt gelijk de eerste HXS is) het punt G' met het punt X der eerste kromme lijn overeenkomen, en diensvolgens zal dit punt tusschen B

lijp, in diervoege, dat $G'E = XD$ is zal het schrijvende punt ook de le basis in K , ergens in een punt met het punt S overeenkomt, zoo $= HS$ zijn zal, snijden; en daar

het overigen zichtbaar is, dat de tweede helft der eerste kromme lijn $ZTXK$, even zoo als de eerste helft derzelve, $ZSXH$, kan worden beschreven, en hier bij alles plaats vindt, wat van de eerste helft gezegd is, zoo zal ook deze tweede helft der kromme lijn, de loodrechte in K , op eenen afstand van K , welke gelijk HS is, dat is, in het reeds gemelde punt T snijden, en voortgaande de verlangde ordinat XB in X' ontmoeten, zoo-

da-

danig, dat $EX' = DX$ zij, alvorens in het punt K aan te komen; waaruit dan zichtbaar is, dat bij de tweede ronddraaijing des cirkels, door het beschrijvende punt, de knoop TX/KG/T beschreven wordt, van welke de breedte $G'X' = 2 XD = 2 (\delta d - \text{hoog. } \delta \lambda)$ is, en de hoogte $KT = HS$

van de oplossing der vergelijking $\text{Sin. } \varphi = \frac{r}{r+x}$ ($x = \varphi$) afhangt, zoo als wij hier voren reeds hebben aangemerkt; en daar wij deze vergelijking niet anders, dan door omkeering van eene oneindige reeks kunnen oplossen, en de bepaling der subtangent en kromtestraal voor dit knooppunt T mede van φ , $\text{Sin. } \varphi$ en $\text{Cos. } \varphi$, en alzoo ook van deze vergelijking afhangen, zoo zullen wij, om niet wijdloopig te zijn, zulks aan de beoefening der jonge liefhebbers overlaten.

Tot het bepalen van den inhoud der kromlijngige vlakke GFZ, fig. 119 en 120, substitueere men in de differentiaal uitdrukking van alle vlakken met rechtstandige coördinaten, $y \delta x$, de waarde van $y = (r \pm a) \text{Sin. } \varphi + r \varphi$ en $\delta x = (r \pm a) \text{Sin. } \varphi \delta \varphi$, waardoor wij voor ons geval hebben,

$y \delta x = (r \pm a)^2 \text{Sin. } \varphi \delta \varphi + r (r \pm a) \varphi \text{Sin. } \varphi \delta \varphi$ of integreerende

$\int y \delta x = (r \pm a)^2 \int \text{Sin. } \varphi \delta \varphi + r (r \pm a) \int \varphi \text{Sin. } \varphi \delta \varphi$
Ma is (zie bijvoegsel B), $\int \text{Sin. } \varphi \delta \varphi = \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \text{Sin. } \varphi \text{Cos. } \varphi$; en daar $\delta (\varphi \text{Cos. } \varphi) = \varphi \text{Sin. } \varphi \delta \varphi + \text{Cos. } \varphi \delta \varphi$ is, zoo is $\varphi \text{Sin. } \varphi \delta \varphi = \text{Cos. } \varphi \delta \varphi - \delta (\varphi \text{Cos. } \varphi)$; dus $\int \varphi \text{Sin. } \varphi \delta \varphi = \text{Sin. } \varphi - \varphi \text{Cos. } \varphi$. Substitueert men voorts deze waarden in onze integraal, zoo heeft men den inhoud der vlakke ZFG, of

$\int y \delta x = \frac{1}{2} (r \pm a)^2 \varphi - \frac{1}{2} (r \pm a)^2 \text{Sin. } \varphi \text{Cos. } \varphi + r (r \pm a) \text{Sin. } \varphi - r (r \pm a) \varphi \text{Cos. } \varphi$, waarbij geen standvastige grootheid behoeft gevoegd te worden, wijl voor $\varphi = 0$ alle de leden van deze integraal nul worden.

Om den inhoud van de geheele kromlijngige vlakke

vlakke IHXZI te bekomen, stelle men $\phi = \pi =$ den boog van 180° , zoo is $\text{Sin. } \phi = 0$, $\text{Cos. } \phi = -1$, en daar hierdoor de twee middelste leden $= 0$ worden, zoo heeft men voor den inhoud der vlakke

$$\text{HXSZ} = \frac{1}{2} (r \pm a)^2 \pi + r (r \pm a) \pi \dots \dots$$

$$\dots \dots = \frac{1}{2} (r \pm a) (3r \pm a) \pi$$

en daar de tweede helft IZX'K volmaakt gelijk de eerste is, zoo is dan de inhoud der geheele vlakke HXZX'K $= (r \pm a) (3r \pm a)$.

Stelt men hier in $a = 0$, zoo vindt men den inhoud der gewone cÿcloïde DAE $= 3r^2\pi$; dat is gelijk driemaal den inhoud des teelenden cirkels, zoo als ik vermeen het eerst door ROBERVAL in het jaar 1637 gevonden te zijn.

Voor fig. 119 laat zich hieruit nog den inhoud van het ringvormig gedeelte HXZX'KEADH afleiden; want zoo men den inhoud des reethoeks HDEK $= 2ar\pi$ en der cÿcloïde DAE $= 3r^2\pi$, van den gevondenen inhoud HXZX'K $= (r+a)(3r+a)\pi$ aftrekt, rest er de inhoud des gemelden rings $= a(2r+a)\pi$; die echter gelijk $3r^2\pi$, of den inhoud der cÿcloïde wordt; als men $a = r$ stelt; doch in dit geval is de inhoud onzer kromlijnige figuur HXZX'K $= 8r^2\pi$; dat is gelijk achtmaal den inhoud van den teelenden cirkel der cÿcloïde, of gelijk den dubbelen inhoud van den cirkel HabH.

Wanneer de kromlijnige vlakke HXFZI, fig. 119 en 120, om HK als as wordt rondgedraaid, beschrijft dezelve een rond ligchaam, hetwelk een cirkel tot grondvlakte heeft, waarvan ZI $= r \pm a$ de radius is. Laat ons den inhoud van dit ligchaam bepalen. Tot dit einde stelle men zich voor, dat de vlakke UFZI eene omwenteling om UI als as gedaan heeft, alsdan heeft FU een cirkel beschreven, van welken de inhoud $= FU^2\pi$ is; vermenigvuldigt men deze veranderlijke cirkelvlakke met de differentiaal van FG, dat is met δy ,

zoo

zoo heeft men voor het element, of de differentiaal van het beschrevene ligchaam, de uitdrukking $\pi FU^2 \cdot \delta y$; maar $FU = GI = ZI - ZG = 2(r \pm a) - (r \pm a)(1 - \cos. \varphi) = (r \pm a)(1 + \cos. \varphi)$; derhalve is $\pi FU^2 = \pi (r \pm a)^2 (1 + 2 \cos. \varphi + \cos. \varphi^2)$; hetwelk vermenigvuldigd met $\delta y = (r \pm a) \cos. \varphi \delta \varphi + r \delta \varphi$, geeft de differentiaal, van het door ronddraaijng voortgebrachte ligchaam, $\pi \cdot FU^2 \delta y = \pi (r \pm a)^3 \cos. \varphi^3 \delta \varphi + [2 \pi (r \pm a)^3 + \pi r (r \pm a)^2] \cos. \varphi^2 \delta \varphi + [\pi (r \pm a)^3 + 2 \pi r (r \pm a)^2] \cos. \varphi \delta \varphi + \pi r (r \pm a)^2 \delta \varphi = \pi (r \pm a)^3 \cos. \varphi^3 \delta \varphi + \pi (3r \pm 2a) (r \pm a)^2 \cos. \varphi^2 \delta \varphi + \pi (3r \pm a) (r \pm a)^2 \cos. \varphi \delta \varphi + \pi r (r \pm a)^2 \delta \varphi$.

Om deze uitdrukking te integreren, heeft men (zie *Bijvoegfel A*) $\int \cos. \varphi^3 \delta \varphi = \frac{1}{3} \sin. \varphi \cos. \varphi^2 + \frac{2}{3} \sin. \varphi = \sin. \varphi - \frac{1}{3} \sin. \varphi^3$; $\int \cos. \varphi^2 \delta \varphi = \frac{1}{2} \sin. \varphi \cos. \varphi + \frac{1}{2} \varphi$ en $\int \cos. \varphi \delta \varphi = \sin. \varphi$; derhalve is de integraal van dit ligchaam $\dots \int \pi FU^2 \delta y = \pi (r \pm a)^3 \sin. \varphi - \frac{1}{3} \pi (r \pm a)^3 \sin. \varphi^3 + \frac{1}{2} \pi (3r \pm 2a) (r \pm a)^2 \sin. \varphi \cos. \varphi + \frac{1}{2} \pi (3r \pm a) (r \pm a)^2 \varphi + \pi (3r \pm a) (r \pm a)^2 \sin. \varphi + \pi r (r \pm a)^2 \varphi = 2 \pi (2r \pm a) (r \pm a)^2 \sin. \varphi - \frac{1}{3} \pi (r \pm a)^3 \sin. \varphi^3 + \frac{1}{2} \pi (3r \pm 2a) (r \pm a)^2 \sin. \varphi \cos. \varphi + \frac{1}{2} \pi (5r \pm 2a) (r \pm a)^2 \varphi$; waarbij geen standvastige grootheid behoeft gevoegd te worden, wijl voor $\varphi = 0$, alle de leden dezer uitdrukking nul worden.

Stelt men, om de integraal het geheele ligchaam te bekomen, hetwelk door de omwenteling van HXFZI om HK wordt voortgebragt, $\varphi = \pi = 180^\circ$, zoo is $\sin. \varphi = 0$, en alle de leden van onze integraal worden $= 0$, uitgezonderd het laatste lid, hetwelk wordt: $\frac{1}{2} \pi^2 (5r \pm 2a) (r \pm a)^2$ en alzoo de geheele integraal; of de inhoud van gezochte ligchaam, hetwelk door de omwenteling van HXZX'K om HK wordt voortgebragt, $= \pi^2 (5r \pm 2a) (r \pm a)^2$.

Stelt men in deze uitdrukking $a = 0$, zoo heeft men $5 r^3 \pi^2$ voor den inhoud van het lig-

chaam, hetwelk door de omwenteling van de cirkel DAE, om DE als as, wordt voortgebracht.

Wanneer deselfde vlakke IHXFZ om ZI als as, fig. 119 en 120, eene omwenteling doet, zal dezelve een ligchaam beschrijven, hetwelk zeer verschillend van het voorgaande is, en ook een geheel anderen inhoud heeft. Bij deze omwenteling beschrijft FG $y = (r \pm a) \sin. \varphi + r \varphi$ eenen cirkel, welks inhoud is $y^2 = \pi (r \pm a)^2 \sin. \varphi^2 + 2 \pi r (r \pm a) \varphi \sin. \varphi + \pi r^2 \varphi^2$; en als men deze cirkelvlakke met de differentiaal van ZG, dat is met $\delta x = (r \pm a) \sin. \varphi \delta \varphi$ multiplieert, heeft men voor de uitdrukking van het element van dit ligchaam, $\pi y^2 \delta x = \pi (r \pm a)^2 \sin. \varphi^3 \delta \varphi + 2 \pi r (r \pm a)^2 \varphi \sin. \varphi^2 \delta \varphi + \pi r^2 (r \pm a) \varphi^2 \sin. \varphi \delta \varphi$.

Om de integraal van deze uitdrukking te vinden, heeft men, volgens bijvoegsel B, $\int \sin. \varphi^3 \delta \varphi = -\frac{1}{3} \cos. \varphi \sin. \varphi^2 - \frac{2}{3} \cos. \varphi = -\frac{1}{3} \cos. \varphi^3 - \cos. \varphi$; voorts is $\delta (\varphi \sin. \varphi \cos. \varphi) = \sin. \varphi \cos. \varphi \delta \varphi + \varphi \cos. \varphi^2 \delta \varphi - \varphi \sin. \varphi^2 \delta \varphi = \sin. \varphi \cos. \varphi \delta \varphi + \varphi \delta \varphi - 2 \varphi \sin. \varphi^2 \delta \varphi$, of $\varphi \sin. \varphi^2 \delta \varphi = \frac{1}{2} \sin. \varphi \cos. \varphi \delta \varphi + \frac{1}{2} \varphi \delta \varphi - \frac{1}{2} \delta (\varphi \sin. \varphi \cos. \varphi)$, en $\int \varphi \sin. \varphi^2 \delta \varphi = \frac{1}{2} \sin. \varphi^3 + \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} \varphi \sin. \varphi \cos. \varphi$. Daar wijders $\delta (\varphi^2 \cos. \varphi) = -\varphi^2 \sin. \varphi \delta \varphi + 2 \varphi \cos. \varphi \delta \varphi$ en $\delta (\varphi \sin. \varphi) = \varphi \cos. \varphi \delta \varphi + \sin. \varphi \delta \varphi$ is, zoo is ook $\delta (\varphi^2 \cos. \varphi) = -\varphi^2 \sin. \varphi \delta \varphi + 2 \delta (\varphi \sin. \varphi) - 2 \sin. \varphi \delta \varphi$, of $\varphi^2 \sin. \varphi \delta \varphi = 2 \delta (\varphi \sin. \varphi) - 2 \sin. \varphi \delta \varphi - \delta (\varphi^2 \cos. \varphi)$; derhalve is $\int \varphi^2 \sin. \varphi \delta \varphi = 2 \varphi \sin. \varphi + 2 \cos. \varphi - \varphi^2 \cos. \varphi$, en men heeft voor de integraal van het ligchaam, hetwelk door de omwenteling van FGZ om GZ wordt voortgebracht:

$$\begin{aligned} \int \pi y^2 \delta x = & \frac{1}{3} \pi (r \pm a)^3 \cos. \varphi^3 - \pi (r \pm a)^3 \cos. \varphi \\ & + \frac{1}{2} \pi r (r \pm a)^2 \sin. \varphi^2 + \frac{1}{2} \pi r (r \pm a)^2 \varphi^2 \\ & - \pi r (r \pm a)^2 \varphi \sin. \varphi \cos. \varphi + 2 \pi r^2 (r \pm a) \varphi \sin. \varphi \\ & + 2 \pi r^2 (r \pm a) \cos. \varphi - \pi r^2 (r \pm a) \varphi^2 \cos. \varphi + C_1 \end{aligned}$$

Stelt

Stelt men nu, om de standvastige grootheid C te bepalen, $\phi = 0$, zoo is $\sin. \phi = 0$, $\cos. \phi = 1$, en men heeft:

$$0 = \frac{1}{3} \pi (r \pm a)^3 - \pi (r \pm a)^2 + 2 \pi r^2 (r \pm a) + C.$$

dus $C = \frac{1}{3} \pi (r \pm a)^3 - 2 \pi r^2 (r \pm a).$

Substitueert men deze waarde in onze integraal, zoo heeft men:

$$\int \pi r^2 \delta x \pm \pi (r \pm a)^2 \left(\frac{1}{3} \cos. \phi^3 - \cos. \phi + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \pi r (r \pm a)^2 (\sin. \phi^2 + \phi^2 - 2 \phi \sin. \phi \cos. \phi) + \pi r^2 (r \pm a) (2 \phi \sin. \phi + 2 \cos. \phi - \phi^2 \cos. \phi - 2).$$

Ten einde nu de geheele inhoud van het door IHXFZ om ZI voortgebragte ligchaam te bekomen, stelde men $\phi = \pi = 180^\circ$, zoo is $\sin. \phi = 0$, $\cos. \phi = -1$ en de inhoud van het ligchaam is:

$$\frac{1}{3} \pi (r \pm a)^3 + \frac{1}{2} \pi r (r \pm a)^2 + \pi r^2 (r \pm a) - 4 \pi r^2 (r \pm a) = \frac{1}{3} \pi r (r \pm a) (3r \pm a) + 4 \pi (r \pm a) \left[\frac{1}{3} (r \pm a)^2 - r^2 \right]$$

Als men hierin $a = 0$ stelt, bekomt men den inhoud van het ligchaam, hetwelk men verkrijgt, als de halve cycloïde ADE zich om AB als as ronddraait

$$\frac{1}{3} \pi r^3 - \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{6} \pi r^3 (9\pi^2 - 16) (*)$$

Thans blijft ons nog over om onze kromme lijnen, fig. 119 en 120, te rectificeren, waartoe zich ook de differentiaal-vergelijking zeer gemakkelijk vinden laat; want stelt men de lengte des boogs FZ = s , zoo is de differentiaal derzelve, $\delta s = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$; maar $\delta y = [r + (r \pm a) \cos. \phi] \delta \phi$, der-

(*) Het is opmerkenwaardig, dat ROBÉRVAL, konstte dat hij den inhoud der cycloïde had gevonden (1637), ook den inhoud bepaalde, niet alleen van het ligchaam, hetwelk men bekomt door de omwenteling van de cycloïde om hare Basis, maar dat hij ook den inhoud heeft gevonden van het hier berekende ligchaam, hetwelk voor de wiskundige kennis van dien tijd zeer veel is. Zie *Discours sur la vie et les ouvrages de PASCAL*, door BOSSUT, gevoegd bij het 2de Deel van zijn *Essai sur l'Histoire Générale des Mathématiques*.

derhalve $\delta y^2 = [r^2 + 2r(r \pm a) \cos. \phi + (r \pm a)^2 \cos. \phi^2] \delta \phi^2$; addeert men hierbij $\delta x^2 = (r \pm a)^2 \sin. \phi^2 \delta \phi^2$, zoo bekomt men $\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = [r^2 + 2r(r \pm a) \cos. \phi + (r \pm a)^2] \delta \phi^2$; alzoo is

$$\delta s = \delta \phi \sqrt{[r^2 + (r \pm a)^2 + 2r(r \pm a) \cos. \phi]}.$$

Deze uitdrukking verandert in de differentiaal voor den boog der cycloïde, als men $a = 0$ stelt, waardoor men $\delta s = \delta \phi \sqrt{(2r^2 + 2r^2 \cos. \phi)} =$

$$2r \delta \phi \sqrt{\frac{1 + \cos. \phi}{2}} = 2r \delta \phi \cos. \frac{1}{2} \phi \text{ bekomt; en}$$

waarvan de integraal is,

$$s = 4r \int \cos. \frac{1}{2} \phi \delta \frac{\phi}{2} = 4r \sin. \frac{1}{2} \phi$$

zijnde hierbij geen standvastige grootheid noodig, wijl deze integraal nul wordt, als men $\phi = 0$ stelt.

Nu is $\angle QBA = \frac{1}{2} \angle QCA = \frac{1}{2} \phi$, en daar $\angle BQA = 90^\circ$ is, zoo is $QA = AB \sin. \frac{1}{2} \phi = 2r \sin. \frac{1}{2} \phi$; derhalve is de boog der cycloïde, s of $MA = 2QA$; en als men $\phi = \pi = 180^\circ$ stelt, is $\sin. \frac{1}{2} \phi = \sin. 90^\circ = 1$; gevolgelyk is de boog der halve cycloïde $= 4r = 2AB$, zoo als genoegzaam bekend is.

Doordien nu onze kromme lijnen in eene zeer naauwe betrekking met de gewone cycloïde staan, en de boog dezer laatste niet alleen kan worden geredificeerd, maar zelfs ook eene rationale waarde heeft, zoo zoude men vermoeden, dat onze kromme lijnen zich insgelijks door eindige uitdrukkingen moesten laten rectificeren; dan de ontdekking schijnt dit vermoeden niet te bevestigen: alle mijne pogingen, om de waarde van δs tot eenen integreerbaren vorm te brengen, zijn te vergeefs geweest, en het is te vermoeden, dat de differentiaal $\delta \phi \sqrt{(a + b \cos. \phi)}$, (welke ten opzichte van den vorm met de onze overeenkomt, en

$$\text{in de differentiaal } \frac{-x \frac{1}{2} \delta s}{\sqrt{(\beta^2 - a^2 + 2as - s^2)}} \text{ kan wor-}$$

worden veranderd, als men $a + b \cdot \text{Cos. } \phi = x$ (stelt) tot geen der als nog bekende integreerbare vormen te brengen, en daarom, even als de bekende differentiaal-uitdrukking $x^{\frac{1}{2}} \delta x \sqrt{a^2 + x^2}$, niet dan door eene oneindige reeks te integreren is. Daar voorts de differentiaal-uitdrukking van δs mede als factor in de differentiaal-uitdrukkingen ter bepaling van de oppervlakten der lichamen voorkomen, van welke wij den inhoud gevonden hebben, zoo zijn deze, ten minste voor een gedeelte, aan dezelfde zwaarigheid onderworpen, waarom wij ons dan ook hiermede niet verder zullen ophouden, alzoo hierin niets belangrijks voor ons oogmerk kan gelegen zijn; echter zullen wij tot besluit hierbij nog eene merkwaardige reeks afleiden, uit de differentiaal-vergelijking der cirkloïde,

$$\delta s = 2 r \delta \phi \sqrt{\frac{1 + \text{Cos. } \phi}{2}} = r \sqrt{2} \delta \phi \sqrt{1 + \text{Cos. } \phi}$$

Volgens de binomicaal-formule is;

$$\sqrt{1 + \text{Cos. } \phi} = 1 + \frac{1}{2} \text{Cos. } \phi - \frac{\text{Cos. } \phi^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \text{Cos. } \phi^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \text{Cos. } \phi^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \text{Cos. } \phi^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \&c.$$

$$\text{dus is } \delta \phi \sqrt{1 + \text{Cos. } \phi} = \delta \phi + \frac{\text{Cos. } \phi \delta \phi}{2} - \frac{1 \cdot \text{Cos. } \phi^2 \delta \phi}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot \text{Cos. } \phi^3 \delta \phi}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \text{Cos. } \phi^4 \delta \phi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \&c.$$

Door behulp van de formule, *Bijvoegsel A*, laten alle de leden dezer reeks zich integreren, en men bekomt:

$$\int \delta \phi = \phi; \int \text{Cos. } \phi \delta \phi = \text{Sin. } \phi; \int \text{Cos. } \phi^2 \delta \phi = \frac{1}{2} \text{Sin. } \phi \text{Cos. } \phi + \frac{1}{2} \phi; \int \text{Cos. } \phi^3 \delta \phi = \frac{1}{2} \text{Sin. } \phi \text{Cos. } \phi^2 + \frac{2 \text{Sin. } \phi}{3 \cdot 1}; \int \text{Cos. } \phi^4 \delta \phi = \frac{1}{4} \text{Sin. } \phi \text{Cos. } \phi^3 + \frac{3 \text{Sin. } \phi \text{Cos. } \phi}{4 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 1 \cdot \phi}{4 \cdot 2}; \int \text{Cos. } \phi^5 \delta \phi = \frac{1}{2} \text{Sin. } \phi \text{Cos. } \phi^4 +$$

444 ONTBINDINGEN VAN DE

$$\frac{4 \sin \phi \cos \phi^3}{5 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 2 \sin \phi}{5 \cdot 3 \cdot 1}; \int \cos \phi^5 d\phi =$$

$$\frac{1}{6} \sin \phi \cos \phi^5 + \frac{5 \sin \phi \cos \phi^3}{6 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3 \sin \phi \cos \phi}{6 \cdot 4 \cdot 2} +$$

$$\frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \phi}{6 \cdot 4 \cdot 2} \text{ enz.}$$

Substitueert men nu deze integralen in onze reeks, zoo bekomt men de reeks voor $\int d\phi \sqrt{1 + \cos \phi}$, waarbij geen standvastige grootheid noodig is, doordien voor $\phi = 0$ alle de leden $= 0$ worden; en als men $\phi = \pi = 180^\circ$ stelt, verdwijnen alle de leden, waarin $\sin \phi$ voorkomt, wijl $\sin 180^\circ = 0$ is, zoo dat er alsdan geen andere leden overblijven, dan die, welke den factor ϕ onthouden; uit hetwelke alzoo volgt, dat men voor de lengte van de halve cirkloïde vinden zal:

$$r\sqrt{2} \left(\pi - \frac{1 \cdot \pi}{2 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \pi}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \pi}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} - \right.$$

$$\left. \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \pi}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} - \&c. \right)$$

maar wij hebben ook voor de halve lengte der cirkloïde, $4 r$ gevonden, dus is

$$4 r = r\sqrt{2} \left(\pi - \frac{1 \cdot \pi}{2 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \pi}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \&c. \right)$$

en hieruit vindt men de som der reeks:

$$\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \dots$$

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} + \&c. = \pi - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\dots = 0,096838 \text{ ten naaste bij.}$$

BIJVOEGSEL A. Daar het dikwijls noodig is, differentialen van den vorm $\cos \phi^n d\phi$ te integreren, zal het niet ondienstig zijn, eene algemeene uitdrukking voor de integraal van dezelve te zoeken. Tot dit einde differentieert men $\sin \phi \cdot \cos \phi^n - 1$, waardoor men bekomt:

$$d \sin$$

$$\begin{aligned} d(\sin \phi \cos \phi^{n-1}) &= \cos \phi d\phi + (n-1) \sin \phi \cos \phi^{n-2} d\phi \\ &= \cos \phi d\phi + (n-1) (1 - \cos^2 \phi) \cos \phi^{n-2} d\phi \\ &= n \cos \phi^{n-1} d\phi - (n-1) \cos \phi^{n-2} d\phi. \end{aligned}$$

$$\text{dus } \cos \phi^{n-1} d\phi = \frac{d(\sin \phi \cos \phi^{n-1})}{n} + \frac{n-1}{n} \cos \phi^{n-2} d\phi.$$

Substitueert men nu in deze uitdrukking voor n , achterevoigens $n-2$, $n-4$, $n-6$ enz. tot $n-(n-2)=2$, zoo heeft men:

$$\cos \phi^{n-2} d\phi = \frac{d(\sin \phi \cos \phi^{n-3})}{n-2} + \frac{n-3}{n-2} \cos \phi^{n-4} d\phi$$

$$\cos \phi^{n-4} d\phi = \frac{d(\sin \phi \cos \phi^{n-5})}{n-4} + \frac{n-5}{n-4} \cos \phi^{n-6} d\phi$$

$$\cos \phi^{n-6} d\phi = \frac{d(\sin \phi \cos \phi^{n-7})}{n-6} + \frac{n-7}{n-6} \cos \phi^{n-8} d\phi$$

enz. tot

$$\cos \phi^{n-(n-2)} d\phi = \frac{d(\sin \phi \cos \phi^{n-(n-1)})}{n-(n-2)} + \dots$$

$$\dots \frac{n-(n-1)}{n-(n-2)} \cos \phi^{n-n} d\phi.$$

$$\text{Dat is tot } \cos \phi^2 d\phi = \frac{d(\sin \phi \cos \phi)}{2} + \frac{1}{2} d\phi$$

als n een even getal is; is n echter een oneven getal, zoo gaat deze differentiaal voort tot $\cos \phi^{n-(n-1)} d\phi = \cos \phi d\phi$.

Substitueert men nu achterevoigens deze waarden in die van $\cos \phi^n d\phi$, zoo bekomt men, na gedane integratie;

$$\begin{aligned} \int \cos \phi^n d\phi &= \frac{\sin \phi \cos \phi^{n-1}}{n} + \frac{(n-1) \sin \phi \cos \phi^{n-3}}{n(n-2)} \\ &+ \frac{(n-1)(n-3) \sin \phi \cos \phi^{n-5}}{n(n-2)(n-4)} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \sin \phi \cos \phi^{n-7}}{n(n-2)(n-4)(n-6)} \\ &+ \frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7) \sin \phi \cos \phi^{n-9}}{n(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)} + \&c. \text{ tot } \\ &\hspace{15em} (n-1) \end{aligned}$$

$$\frac{(n-1)(n-3)\dots[n-(n-1)]\phi}{n(n-2)\dots[n-(n-2)]} \text{ of } \frac{(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 1 \cdot \phi}{n(n-2)\dots 4 \cdot 2}$$

als n een even getal is, en tot

$$\frac{(n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2}{n(n-2)\dots 3 \cdot 1} \int \text{Cos. } \phi \cdot \delta \phi = \frac{(n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2}{n(n-2)\dots 3 \cdot 1} \text{Sin } \phi,$$

als n een oneven getal is.

Bijvoegsel B. Eene dergelijke uitdrukking vindt men ook voor $\int \text{Sin. } \phi^n \delta \phi$, als men $\text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-1}$ differentieert; want

$$\delta(\text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-1}) = -\text{Sin. } \phi^n \delta \phi + (n-1) \text{Cos. } \phi^2 \text{ Sin. } \phi^{n-2} \delta \phi = -n \text{Sin. } \phi^n \delta \phi + (n-1) \delta(\text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-1})$$

dus is $\text{Sin. } \phi^n \delta \phi = -\frac{(n-1)}{n} \delta(\text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-1})$

+ $\frac{n-1}{n} \text{Sin. } \phi^{n-2} \delta \phi$; en hieruit volgt, even als boven,

$$\text{Sin. } \phi^{n-2} \delta \phi = -\frac{\delta(\text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-3})}{n-2} + \frac{n-3}{n-2} \text{Sin. } \phi^{n-4} \delta \phi;$$

$$\text{Sin. } \phi^{n-4} \delta \phi = -\frac{\delta(\text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-5})}{n-4} + \frac{n-5}{n-4} \text{Sin. } \phi^{n-6} \delta \phi$$

enz.

Substitueert men nu deze waarden achtereenvolgens in de waarde van $\text{Sin. } \phi^n \delta \phi$ en neemt men de integraal van de geheele uitdrukking, zoo bekomt men:

$$\int \text{Sin. } \phi^n \delta \phi = -\frac{\text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-1}}{n} - \frac{(n-1) \text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-3}}{n(n-2)}$$

$$- \frac{(n-1)(n-3) \text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-5}}{n(n-2)(n-4)} \dots$$

$$- \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \text{Cos. } \phi \text{ Sin. } \phi^{n-7}}{n(n-2)(n-4)(n-6)}$$

$$- \&c. \text{ tot } + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 3 \cdot 1 \cdot \phi}{n(n-2)(n-4)\dots 4 \cdot 2},$$

als n een even getal is, en tot

(i . . .

+

$$+ \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \dots \dots \dots 4 \cdot 2}{n(n-2)(n-4) \dots \dots \dots 3 \cdot 1}$$

$$\int \sin. \phi \delta \phi = - \frac{(n-1)(n-3) \dots \dots 4 \cdot 2}{n(n-2) \dots \dots 3 \cdot 1} \cos. \phi,$$

als n een oneven getal is.

Nº. 133. Door

O. S. BANGMA.

Stel in figuur 62, $PQ = a$ en $NO = b$, dan is, volgens de samenstelling van de figuur (zie Voorst. 73), daar zijden en diagonalen van de parallelogrammen $ABCD$ en $PNQO$ alle, door de boomen, in dezelfde rede gedeeld zijn, $\frac{1}{2} PQ : PV = PV : PQ$; dus $PV = PQ \sqrt{\frac{1}{2}} = a \sqrt{\frac{1}{2}}$ en $QV = PQ - PV = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) a = PT$, dus $TV = PV - PT = (\sqrt{2} - 1) a$. Op gelijke wijze $\frac{1}{2} NO : NS = NS : NO$; dus $NS = NO \sqrt{\frac{1}{2}} = b \sqrt{\frac{1}{2}}$ en $OS = NO - NS = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) b = NR$, dus $RS = NS - NR = (\sqrt{2} - 1) b$. Hieruit volgt:

1º. $AM = ZT = \frac{1}{2} TV (\sqrt{2} - 1) = DL$, en $ML = PT = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) a$. Voorts $AD = AM + ML + LD = a \sqrt{\frac{1}{2}}$.

2º. $AE = ZS = \frac{1}{2} RS (\sqrt{2} - 1) = BF$, en $EF = SO = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) b$. Voorts $AB = AE + EF + FB = b \sqrt{\frac{1}{2}}$.

3º. $AC = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$. Stel dat $= c$; dan is $AB : AC = AE : AY = EF : YW$; dus $AY = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) c$ en $YW = (\sqrt{2} - 1) c$.

4º. $QF = ZW = \frac{1}{2} YW (\sqrt{2} - 1) = QE$, en $EG = AY = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) c = EM$.

5º. Om dat $PRQS$ een gelijkzijdig parallelogram is, is $PQ^2 + RS^2 = 4 PS^2$; dus $4 PS^2 = a^2 + 3 b^2 - 2 b^2 \sqrt{2} = 2 c^2 + 2 b^2 - 2 b^2 \sqrt{2}$ en $PS = \sqrt{\frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^2 \sqrt{2}} = PR$; maar PV

$PV : PS = PZ : PW = ZV : WS$; dus $PW = \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 + b^2 - b^2 \sqrt{2})}$ en $WS = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2}) \sqrt{(c^2 + b^2 - b^2 \sqrt{2})}$.

6°. Om dat TNVO een gelijkzijdig parallellogram is, is $NO^2 + TV^2 = 4 TO^2$; dus $4 TO^2 = b^2 + 3a^2 - 2a^2 \sqrt{2} = 2c^2 + 2a^2 - 2a^2 \sqrt{2}$ en $TO = \sqrt{(\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 \sqrt{2})} = VO$; maar $RO : TO = ZO : WO = RZ : TW$; dus $WO = \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 + a^2 - a^2 \sqrt{2})}$ en $TW = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2}) \sqrt{(c^2 + a^2 - a^2 \sqrt{2})}$.

Door deze formules kunnen nu alle de afstanden berekend worden, wanneer a en b gegeven zijn; want voor de afstanden op BQ hebben wij gevonden: $PT = QV = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})a$ en $TV = (-1 + \sqrt{2})a$; hierdoor zijn ook de afstanden op AD en hare drie gelijke evenwijdigen bekend, namelijk $AM = DL = \frac{1}{2} TV$ en $ML = PT = QV$.

Voor de afstanden op NO hebben wij gevonden, $NR = OS = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})b$ en $RS = (-1 + \sqrt{2})b$; hierdoor zijn ook de afstanden op AB en hare drie gelijke evenwijdigen bekend, namelijk: $AE = BF = \frac{1}{2} RS$ en $EF = NR = OS$.

Voor de afstanden op AC of BD hebben wij gevonden, $AY = CW = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})c = BU = DX$, en $YW = (-1 + \sqrt{2})c = UX$; hierdoor zijn ook de afstanden op QO of QN en hare gelijke evenwijdigen bekend, namelijk: $QF = OG = \frac{1}{2} YW = QE = NM$, en $FG = WC = AY = MB$.

Voor de afstanden op QC, QD, PB en PA, hebben wij gevonden: $PW = BS = \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 + b^2 - b^2 \sqrt{2})}$ en $WS = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2}) \sqrt{(c^2 + b^2 - b^2 \sqrt{2})}$.

Voor de afstanden op AO, DO, NC en NB, hebben wij gevonden: $AV = OU = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + a^2 - a^2 \sqrt{2}}$ en $VU = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2}) \sqrt{(c^2 + a^2 - a^2 \sqrt{2})}$. Zijnde s in deze uitdrukkingen $= \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2)}$.

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 409

N°. 134. Door

O. S. BANGMA.

Stel in figuur 61, $AP = QC = a$ en $DO = NB = b$, dan is, volgens de samenstelling van deze figuur (zie Voorst. 73), $\frac{1}{2} PQ : PV = PV : PQ$; dus $PV = PQ \sqrt{\frac{1}{2}}$, en $PZ = \frac{1}{2} PQ$; dus $PV : PZ = \sqrt{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} = \sqrt{2} : 1$; maar $PV : PZ = PR : PX$; dus $PR : PX = \sqrt{2} : 1$; dus $PR = PX \sqrt{2}$ of $AX = PX \sqrt{2}$; hier PX bijvoegende, komt $AX + PX = (1 + \sqrt{2}) PX = a$; dus $PX = \frac{a}{1 + \sqrt{2}}$ en $OB = a - PX = a - \frac{a}{1 + \sqrt{2}} = \frac{a(1 + \sqrt{2}) - a}{1 + \sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$, en $RX = PR - PX = \frac{a\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - \frac{a}{1 + \sqrt{2}} = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{2}}$. Op

gelijke wijze $\frac{1}{2} NO : RO = 1$
 $NO \sqrt{\frac{1}{2}}$, en $ZO = \frac{1}{2} NO$

$\sqrt{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} = \sqrt{2} : 1$; maar R
 dus $TO : WO = \sqrt{2} : 1$;

$DT \sqrt{2}$; hier DT bijvoegen
 $(1 + \sqrt{2}) DT = b$; dus D

AQ , $TO = \frac{b}{1 + \sqrt{2}}$
 $DW = DT = \frac{b}{1 + \sqrt{2}}$

Nu is $PQ = \sqrt{AP^2 + b^2}$
 $= \sqrt{a^2 + b^2}$; maar $PV = \frac{1}{2} PQ$

$\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$
 $\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$

$TV = PV - PT = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$
 Hierdoor zijn ook bekend; AP

en $ML = PT$. Dus de af-
 re gelijke evenwijdigen, als mede op QQ en hare

gelijke evenwijdigen, alle bekend.

Op gelijke wijze heeft men, $DB = \sqrt{DO^2 + OB^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$; maar $DU = DB \sqrt{\frac{1}{2}}$, dus

$DU = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + a^2}$; dus $BU = DB - DU = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + a^2}$

$DU = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} = DX$; dus $XU = DU - DX = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + a^2}$

Hierdoor zijn ook bekend: $QE = NM = ZU = \frac{1}{2} XU$, en $ME = DX$. Dus de afstanden op NQ
 en

en hare gelijke evenwijdigen; als mede op AB en hare gelijke evenwijdigen, alle bekend.

Blijft nog over, de afstanden te bepalen op AO, of een van hare gelijksoortige lijnen. Hiertoe heeft men: $VO = \sqrt{VB^2 + BO^2} = \sqrt{(-1 + \sqrt{2})^2 a^2 + (-1 + \sqrt{2})^2 b^2} = (-1 + \sqrt{2}) \sqrt{a^2 + b^2}$; maar $PR : AR = VQ : AV$; dus $AV = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{a^2 + b^2} = OU$; dus $VU = VO - UO = (-1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}) \sqrt{a^2 + b^2}$.

N^o. 135. Door

J. R. SCHMIDT, en R. Lobatto.

Laat ABEG (Fig. 121) de doorsnede zijn van het cilindervormig gat, dan is het blijkbaar, dat de inhoud van dit gat zal bestaan, uit den inhoud van den cilinder ABEG en tweemaal den inhoud van het bolvormig segment ADB, dat CD tot hoogte heeft, en waarvan AB de middellijn van de basis is. Stellende dan de middellijn van den bol m , en $AB = r$, dan is $FC = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - r^2}$, en dus de inhoud van den cilinder $ABEG = \frac{1}{4} \pi r^2 \sqrt{m^2 - r^2}$.

Stellende nu verder $CD = h$, dan hebben wij in de oplossing van het 74^{te} Voorstel voor den inhoud van het bolvormig segment ADB gevonden: $\frac{1}{8} \pi h^2 (3m - 2h)$; maar $CD = FD - FC$ zijnde, hebben wij $h = \frac{m - \sqrt{m^2 - r^2}}{2}$, en

deze waarde van h substituerende, verkrijgen wij, na herleiding:

$$\text{Bolv. Segm. ADB} = \frac{\pi}{24} (2m^3 - (2m^2 + r^2) \sqrt{m^2 - r^2})$$

dus twee zulke segmenten

$$= \frac{\pi}{12} (2m^3 - (2m^2 + r^2) \sqrt{m^2 - r^2})$$

hier

hier bijgevoegd de cilind. ABEG

$$= \frac{\pi}{12} (3 r^2 \sqrt{(m^2 - r^2)})$$

verkrijgen wij voor den inhoud van het cilindervormig gat $\frac{\pi}{12} (2 m^3 - (2 m^2 - 2 r^2) \sqrt{(m^2 - r^2)})$, dat is $\frac{1}{6} \pi (m^3 - (m^2 - r^2)^{\frac{3}{2}})$.

Volgens de opgave moet nu deze inhoud $\frac{1}{6}$ van den inhoud des gegebenen bols zijn: stellen wij algemeen, dat het $\frac{1}{p}$ moet zijn, dan hebben wij, om dat de inhoud des bols $\frac{1}{6} \pi m^3$ is,

$$\frac{1}{6} \pi (m^3 - (m^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{6p} \pi m^3$$

$$\text{dat is } m^3 - (m^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{p} m^3$$

$$\text{of } (m^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{p-1}{p} m^3, \text{ dus } m^2 - r^2 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}} m^2$$

$$\text{waaruit } r = m \sqrt{1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

waardoor de middellijn van den cilind. bepaald is, en dus het voorstel is opgelost.

$$\text{Zoo, nu } p = 8 \text{ genomen wordt, is } r = m \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}} = m \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sqrt[3]{49}} = 0,291845 m$$

$$1^{\circ}. \text{ AANMERKING. Wij hebben gevonden } CF = \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 - r^2)}, \text{ zoo is } AG = BE = \sqrt{(m^2 - r^2)}, \text{ dat is } AG = BE = m \sqrt[3]{\frac{p-1}{p}},$$

$$\text{of als } p = 8 \text{ is, } AG = BE = \frac{1}{2} m \sqrt[3]{7}.$$

$$2^{\circ}. \text{ AANMERKING. Wij hebben gevonden } AB = r = m \sqrt{1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}}, \text{ en bijgevolg}$$

$$AC = \frac{1}{2} m \sqrt{1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}}, \text{ hetwelk de radius}$$

Ee

dus

dus van den cilindrisch is; nu is $DC = h = \frac{m}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}}$, en brengende hierin de waarde

van r , komt er $DC = h = \frac{1}{2} m \left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$,

maar $AD = BD = \sqrt{AC^2 + CD^2}$ zijnde, is

alzo $AD = BD = \frac{1}{2} m \left(2 - 2 \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ en

hierdoor is de radius bepaald, waarmede men op den bol een cirkel beschrijven moet, om uit den-
zelfden het cilindervormig gat te kunnen boren;
zijnde deze radius in het geval van $p=8$, $AD=BD=$

$$\frac{1}{2} m \sqrt{2 - 2 \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} m \sqrt{2 - \sqrt[3]{7}} = 0,147537.m$$

3°. AANMERKING. Uit de vergelijking

$$m^3 - (m^3 - r^3)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{p}, \quad m^3 \text{ volgt ook } \dots$$

$$p = \frac{m^3}{m^3 - (m^3 - r^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{r^3}{m^3}\right)^{\frac{2}{3}}}; \text{ waar-}$$

door de betrekking der inhouds van den bol en
het cilindervormig gat bepaald is, wanneer de
redes van de middelen des bols tot die van den
cilinder gegeven is.

Eindelijk merken wij nog aan, dat de middel-
lijn des bols zoo gemakkelijk in die van den cil-
inder kan worden uitgedrukt, als die van den
cilinder in die van den bol; want de vergelij-

king $r = m \sqrt{1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}}$ geeft oogen-

$$\text{blikkelijk } m = \frac{r}{\sqrt{1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}}}$$

N^o. 136. Door

C. LANTS Jr.

Laat I (Fig. 123) het middelpunt des cirkels in den driehoek ABC zijn, en I', I'', I''' de middelpunten der cirkels welke eens zijde uitwendig en de beide andere zijden inwendig aanraken.

Trekkende dan de lijnen AI', BI'' en CI''', zoo zullen dese de hoeken A, B en C, des driehoeks midden door deelen, en dus alle door het middelpunt I des ingeschreven cirkels gaan. De driehoeken AFI en ADI hebben dus twee hoeken en eene zijde gelijk aan elkander; derhalve AF = AD, en op gelijke wijze BD = BE en FC = CE. Wanneer wij nu dit zelfde op de andere cirkels toepassen, zullen wij hebben:

$$AD = AF, BE = BD, CF = CE$$

$$AD' = AF', BE' = BD', CF' = CE'$$

$$AD'' = AF'', BE'' = BD'', CF'' = CE''$$

$$AD''' = AF''', BE''' = BD''', CF''' = CE'''$$

en bijgevolg:

$$1^{\circ}. AD \times BE \times CF = AF \times BD \times CE$$

$$2^{\circ}. AD' \times BE' \times CF' = AF' \times BD' \times CE'$$

$$CF' = AF' \times BD' \times CE'$$

$$CF'' = AF'' \times BD'' \times CE''$$

le bewezen is, zie de Ge-

le Beschouwingen en Werkdadi-

pag.

N^o. 137. Door

C. LANTS Jr.

Laat I (Fig. 122) het middelpunt des ingeschrevenen cirkels zijn, en I' dat van den cirkel, welke AB uitwendig en de twee andere zijden inwendig aanraakt. Trekkende dan door het mid-

E c 2

del-

delpunt van den ingeschrevenen cirkel de lijnen AE, BF en CD, dan zijn de hoeken CAB, CBA en ACB, als ook de bogen CEB, AFC en ADB, in E, F en D, midden door gedeeld; en CD verdengd zijnde, gaat door het middelpunt I'.

Nu moet bewezen worden, dat I en I' in den omtrek van eenen cirkel liggen, die met DA of DB als radius beschreven is: wij hebben dus slechts te bewijzen, dat $ID = AD = ID$ is, of dat de driehoeken AID en AI'D gelijkbeenig zijn. Nu is

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \quad \angle AID &= \frac{1}{2} \text{ boog } AD + \frac{1}{2} \text{ boog } CE \\ &= \frac{1}{2} \text{ boog } BD + \frac{1}{2} \text{ boog } EB \\ &= \frac{1}{2} \text{ boog } ED = \angle IAD \end{aligned}$$

$$\text{dus } AD = ID$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad \angle BI'D &= \frac{1}{2} \text{ boog } F'C - \frac{1}{2} \text{ boog } DB \\ &= \frac{1}{2} \text{ boog } AF' - \frac{1}{2} \text{ boog } AD \\ &= \frac{1}{2} \text{ boog } DF' = \angle IBD \end{aligned}$$

$$\text{dus } BD = I'D$$

N^o. 138. Door

J. R. SCHMIDT.

Stellen wij op de onbepaalde lijn CD (Fig. 124, 125 en 126) eene loodlijn BA = a; en laat uit eenig punt F, naar welgevallen in CD genomen, als middelpunt, en met FR = b als radius, eenen cirkel beschreven worden; zoo wij dan de lijn RA trekken, zal het snijpunt P, waarin deze lijn den cirkel snijdt, een punt van de begeerde kromme zijn.

Want zoo wij PQ en PS loodregt op CD en BA trekken, en wij BQ = x en PQ = y stellen, zullen wij hebben:

$$AS \approx PS = PQ : RQ \text{ of } a - y : x = y : RQ; \text{ dus}$$

$$RQ = \frac{xy}{a-y}; \text{ nu is } PQ^2 = RQ \times QE = RQ (RE - RQ);$$

dat

dat is $x^2 = \frac{xy}{a-y} \left(2b - \frac{xy}{a-y} \right)$, of alles door y deelende en met $(a-y)^2$ multiplicerende.

$y(a-y)^2 = 2bx(a-y) - x^2y$; dat is

$x^2 - \frac{2b(a-y)}{y}x = -(a-y)^2$ en lossende deze

vierkants-vergelijking door den bekenden regel

op, $x = \frac{a-y}{y} (b \pm \sqrt{b^2 - y^2})$, hetgeen juist onze

opgegevene vergelijking is.

De eerste aanmerking, die ons hier voor den geest moet komen is deze: Dat de vergelijking voor iedere waarde van y , twee verschillende waarden voor x geeft: en de vraag is dan natuurlijk, hoe deze eigenschap met onze gegeven constructie kan overeenstemmen, welke voor ieder punt F slechts eene waarde voor BQ oplevert: Maar merken wij op, dat het punt F de geheelen lijn CD kan doorloopen, dan is het, na PE getrokken te hebben, klaar, dat de standvastige cirkel RPE eens in eenen stand R'P'E' moet komen, zoodanig dat R'P' = EP zij, en dan is noodzakelijk P'Q' = PQ; zoodat wij alsdan twee verschillende waarden BQ en BQ' voor x verkrijgen, welke met eene zelfde waarde BS van y overeenstemmen; en dit gezegde gaat door voor elken stand van het punt F.

Wanneer nu PP' midden door wordt gedeeld in H, hebben wij $x = SH \pm HP$; daar nu onze

vergelijking is: $x = \frac{a-y}{y} (b \pm \sqrt{b^2 - y^2})$; zal

H een punt zijn van de kromme lijn, uitgedrukt

door de vergelijking $x' = \frac{b(a-y)}{y}$, dat is

$(x' + b)y = ab$; dit is nu de vergelijking van de hyperbool op hare asymptoten, en uit de oplossing van het 129^{de} Voorstel blijkt het, dat de-

ze hyperbool in ons geval geconstrueerd wordt, door slechts uit de punten F loodlijnen FI op CD te stellen, tot dat zij AR in I snijden, zijnde alsdan I punten van de gezochte hyperbool zijn, en dat deze hyperbool door A zal gaan, en MM' tot asymptote zal hebben, welke loodrecht op de asymptote CD is, en op eenen afstand $BN = FR = b$ van het punt B getrokken is. Deze hyperbool dan alzoo beschreven hebbende, zal zij alle lijnen PP' , tusschen de kromme besloten, en evenwijdig aan CD lopende, midden door deelen, en zal alzoo eene middellijn van onze kromme zijn. — Hiernit volgt dan ook nog deze merkwaardige eigenschap van onze kromme.

„Dat wanneer men eene koorde PP' , welke evenwijdig is aan CD , midden door deelt in H , en door H de lijn AHG , en de loodlijn HK trekt, het stuk GK hierdoor van CD afgesneden, altoos $= RF = b$ en dus een constante grootheid zal zijn.”

Onze vergelijking geeft, wanneer wij in dezelve $y = 0$ stellen $x = \infty (b \pm b)$ de eerste waarde $x = \infty \cdot 2b$ is oneindig en toont aan, dat CD asymptote van onze kromme is. Doch de andere waarde $x = \infty (b - b)$ of $\infty \times 0$ is onbepaald, en om dezelve te bepalen, moeten wij onderzoeken, wat $\frac{(a - y)(b - \sqrt{b^2 - y^2})}{y}$ wordt

in de onderstelling van $y = 0$; differentieren wij dan den teller en den noemer van deze breuk, dan komt er, na onder en boven door δy gedeelt te hebben, — $(b - \sqrt{b^2 - y^2}) + \frac{y(b - y)}{\sqrt{b^2 - y^2}}$,

en stellende nu $y = 0$, wordt ook deze uitdrukking 0 , waarnit volgt, dat de onderstelling van $y = 0$ ook $x = b$ maakt, en dat dus de kromme in alle gevallen door het punt B moet gaan. Deze eigenschappen worden ook volkomen bevestigd,

rigd, door, bij onze constructie, het punt F in de gedachte de geheele lijn CD te laten doorwandelen; want hoe grooter wij BF ter linker- of rechterzijde van B nemen, des te scherper wordt de hoek PRE, de hoog BE wordt dus hoe langer hoe kleiner, en bijgevolg ook de ordinaat PQ, zonder ondertuschen ooit $= 0$ te kunnen worden, waaruit dan volgt, dat CD asymptote is zoowel van de tak, die ter rechterzijde, als van die, welke ter linkerzijde van AA' ligt; en komt F in N, dan valt R in B, AR valt derhalve op AB, en wordt tangens van den cirkel, zoodat alsdan en PR en PQ \perp o wordende, de kromme door het punt B moet gaan.

Het blijkt ook uit de vergelijking, dat y niet groter dan b en niet kleiner dan $-b$ kan zijn; want anders zou $\sqrt{b^2 - y^2}$, en dus ook x , imaginair worden. Dit maximum en minimum van y stemt nu overeen met $x = \frac{(a - b)b}{b}$ en

$x = \frac{(a + b)b}{-b}$, dat is met $x = (a - b)$ en $x = -(a + b)$; het maximum L. wordt dus gevonden, door $BO = AB - RF$, en het minimum L', door $BO' = AB + RF$ te nemen, en dan zullen OL en OL' $= RF = b$ zijn. Het is uit hetgeen wij boven gezegd hebben, dat namelijk de hyperbool alle de lijnen PP' midden door deelt, nu duidelijk intezien, dat deze punten L en L' juist overeen moeten komen met de punten, waarin onze kromme door de hyperbool gesneden wordt; en daar $NO = NO' = a$ is, volgt hier nog uit dat de lijn LL', welke het maximum L. met het minimum L' vereenigt, door het middelpunt N van de hyperbool zal gaan, en dat LL' dus een diameter van de hyperbool moet zijn.

Al wat wij van onze kromme tot nog toe gezegd

zegd hebben, betreft dezelve in het algemeen, en is op alle drie de Figuren even toepasselijk. Het is hier nu de plaats, om van de verschillende vormen te spreken, welke onze kromme aanneemt, naarmate a groter, gelijk of kleiner dan b is.

1°. Wij hebben (*Fig. 124*) geconstrueerd in de onderstelling dat $a > b$ is, daar nu y niet groter dan b kan zijn, kan y niet $= a$ genomen worden en de kromme kan dus niet door het punt A gaan, daar dus alleen de onderstelling van $y = 0$ in dit geval ook $x = 0$ kan maken, snijdt de kromme AA' alleen in het punt B, en de eene tak ligt dus geheel ter rechterzijde en de andere geheel ter linkerzijde van AA' , en daar het bovendien uit de vergelijking blijkbaar is, dat $a > b$ zijnde, x voor iedere positieve waarde van y positief, maar voor iedere negatieve waarde van y negatief moet zijn, volgt hieruit, dat de eene tak der kromme geheel in den hoek CBA en de andere tak geheel in de hoek DBA' moet liggen.

($a - b$) is hier positief; en het maximum L , dat met $x = (a - b)$ overeenstemt, valt dus ter linkerzijde van AA' , terwijl het minimum L' , dat met $x = -(a + b)$ overeenkomt, ter rechterzijde van AA' valt.

2°. Als $a = b$ is, verkrijgt de kromme den vorm, zoo als in *Fig. 125* is aangewezen. De

vergelijking wordt dan $x = \frac{(b - y)(b \pm \sqrt{b^2 - y^2})}{y}$,

en x wordt nu niet alleen $= 0$, als $y = 0$ is, maar ook als $y = b = a$ is, zoo dat de kromme hier door het punt B en door het punt A moet gaan. Nemen wij nu in acht, 1°. dat y niet groter dan b kan zijn, 2°. dat $y = b$ zijnde $x = 0$ is, en 3°, dat voor alle positieve waarden van y , beide de waarden van x positief zijn, dan volgt hieruit, dat in ons tegenwoordig geval, waarin $a = b$ is, de kromme noodzakelijk in A een keer-

keerpunt moet hebben: want om dat voor iedere positieve waarde van BS , of y de beide waarden van x , dat is SP en SP' beide positief moeten zijn, en dus de punten P en P' beide ter linkerzijde van AA' moeten liggen, kan de kromme niet door het punt A gaan, ten zij A of een keerpunt, of een raakpunt van AA' met de kromme zij; zoo nu AA' een raaklijn aan het punt A was, zou iedere andere lijn, welke door A gaat, en dus ook AV evenwijdig DC , de kromme in A moeten snijden, hetgeen onmogelijk is, daar y niet grooter dan b kunnen zijn, er geen punt der kromme boven AV kan liggen. A kan bijgevolg geen raakpunt en moet dus een keerpunt zijn, en wij hebben hier voorbedachtelijk zoo lang over uitgeweid, om te doen zien, hoe men in sommige gevallen, het bestaan van keerpunten en maxima of minima uit de omstandigheden kan opmaken, zonder dat men tot de differentiaal-rekening zijne toevlugt behoeft te nemen.

Is echter y negatief, dan worden hier de beide waarden van x negatief, en de kromme, na van A door B gegaan te zijn, valt dus wederom geheel in den hoek DBA' ; verder moeten wij hier nog opmerken, dat het maximum van y , waarbij $x = a - b$ is, hier $x = 0$ geeft, en dit bevestigt dus volkomen dat de kromme hier in A haar hoogste punt bereikt heeft, terwijl het minimum L' , waarvoor $x = -(a + b)$ is, hier $x = -2b$ geeft, en dus gevonden wordt, door $BO' = 2AB$ te nemen.

3°. Laat ons nu den vorm der kromme uit de vergelijking zien opmaken, in het geval waarin $a < b$ zijnde, de kromme met de constructie van *Fig. 126* moet overeenkomen. Stellen wij ten dien einde in de vergelijking . . .

$$\frac{(a - y)(b \pm \sqrt{b^2 - y^2})}{y}; y \text{ positief van } 0 \text{ tot } a,$$

zoo zijn de beide waarden van x altijd positief, tot dat $y = a$, $x = 0$ maakt; voor alle de waarden van BS , kleiner dan BA , ligt dus de kromme geheel ter linkerzijde van AB , en zij gaat door de punten A en B ; maar voor alle waarden van y , tusschen a en de grootste waarde b , zijn beide de waarden van x negatief, tot dat $y = b$, x in de enkele waarde $a - b$ doet overgaan, welke hiermede negatief is. Voor $y = b$ is er dus slechts eene negative waarde van x , welke het hoogste punt L oplevert, voor elke waarde van y tusschen b en a , of tusschen BV en BA , liggen er altijd twee punten P en P' ter regterzijde van AB , welke zich in het punt A vereenigen, wanneer $y = BA$ wordt, en wordt y tusschen a en 0 en dus op BA genomen, liggen die beide punten P en P' ter linkerzijde van AB , en verwijderen zich hoe langs hoe meer van elkander, tot dat $y = 0$, de eene waarde van x oneindig en de andere $= 0$ maakt. Zie daar dan de juiste beschrijving van de knoop $ALP'A$, welke in den hoek $A'BD$ ligt, en welker bestaan dus uit de beschouwing der vergelijking noodzakelijk is. Daar nu alle negatieve waarden van y , x noodzakelijk negatief maken, ligt de kromme, na van A door B gegaan te zijn, wederom geheel in den hoek $A'BD$. De maxima en minima van y liggen hier eindelijk beide ter regterhand van AA' , want $a - b$ is negatief en het punt L wordt hier gevonden door $BO = FR - AB = AV$ te nemen, en het punt L' , door $BO' = FR + AB$ te maken.

Differentieren wij nu onze vergelijking, dan zullen wij voor de achtervolgende differentialen vinden:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-ab(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \pm (y^3 - ab^2)}{y^2(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2ab(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \pm b(2ab^2 - 3ay^2 + by^3)}{y^3(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} =$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6ab(b^2 - y^2) + 3b(-2ab^2 + 5ab^2y^2 - 4aby^4 + by^6)}{y^4(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

De uitdrukking van $\frac{dy}{dx}$ dient ons tot twee verschillende oogmerken, 1°. geeft deze uitdrukking, zoo als bekend is, ons de tangens des hoeks, welke de raaktlijn van enig punt P met den as AA' der ordinaten maakt, zoo dat deze hoek ϕ stellende, wij hebben zullen $Tang \phi =$

$$\frac{2b\sqrt{b^2 - y^2} - (y^2 - ab^2)}{y^2\sqrt{b^2 - y^2}},$$

geldende het bovenste teken voor eenig punt P en het benedenste voor eenig daarmede overeenstemmend punt P'. Laat ons deze formule op eenige der voornaamste punten van onze kromme toepassen.

1°. Het blijkt van zelf, dat voor de hoogste punten L en L' de tangens parallel aan CD moet zijn, en indedaad stellende $y = \pm b$, wordt in Fig. 124 en 126, waar $a >$ of $< b$ is, $Tang \phi = \pm \infty = Tang. 90^\circ$, hetwelk aantoon, dat de tangens in die punten loodrecht op AA' is, en dus evenwijdig aan CD.

Maar in Figuur 125, waarin $a = b$ is, wordt, $y = \pm b$ stellende, wel $Tang \phi = \infty = Tang. 90^\circ$ voor de tangens aan het punt L'; maar stellende

$y = 0$, wordt $Tang \phi = \frac{0}{0}$ en om deze waarde

te bepalen, moeten wij teller en noemer van de breuk $\frac{b^2(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} - (y^2 - ab^2)}{y^2(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$ differen-

tiëren; zulks nu verrichtende, vinden wij, na al-
les door dy gedeeld te hebben, na herleiding

$$\frac{b^2 - 3y\sqrt{b^2 - y^2}}{2b^2 - 3y^2},$$

en stellende hierin $y = b$,
zoo hebben wij $Tang \phi = -1 = Tang. 135^\circ$,
makende dan BZ = BA en trekkende AZ, zal
deze

deze de tangens aan het keerpunt A zijn, want dan is $\angle ZAB = 45^\circ$ en dus $\angle ZAA' = 135^\circ$.

2°. Stellen wij, om de tangens aan het punt B te vinden, $y = 0$, dan wordt $Tang. \phi = \frac{-ab^2 \pm ab^2}{0} = \infty$ of $\frac{0}{0}$: Daar wij nu reeds

opgemerkt hebben, dat de bovenste waarde van $Tang. \phi$ voor het punt P, en de benedenste voor het punt P' dient, blijkt het, dat $Tang. \phi = \infty$ niet tot het punt B behoort, maar tot de punten, welke op eenen oneindigen afstand de asymptote CD raken, en waarvan de asymptote, zelve tangens zijnde, regthoekig op AA' staat.

De waarde $Tang. \phi = \frac{0}{0}$ behoort dus tot het punt B; teller en noemer van $Tang. \phi = \frac{-ab\sqrt{b^2 - y^2} \pm (y^3 - ab^2)}{y^2\sqrt{b^2 - y^2}}$ dan wederom dif-

ferentierende, komt er $\frac{ab - 3y\sqrt{b^2 - y^2}}{2b^2 - 3y^2}$ en

hierin $y = 0$ gesteld, komt er $Tang. \phi = \frac{ab}{2b}$ voor de tangens van den hoek UBA', zijnde deze tangens in Fig. 124, waar $a = b$ is, gelijk $\frac{1}{2}$.

3°. Willen wij eindelijk in Fig. 126 de tangens aan het punt A berekenen, in welk punt de beide takken der kromme elkander snijden, zoo moeten wij in de algemeene uitdrukking voor $Tang. \phi$, $y = a$ stellen, en dan verkrijgen wij

$$Tang. \phi = \frac{-b\sqrt{b^2 - a^2} \pm (a^3 - b^2)}{a\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

gevende het bovenste teeken den hoek WAA' en het benedenste den hoek WAA', en in opmerking

king nemende, dat $Tang.(x-y) = \frac{Tang.x Tang.y}{1+Tang.xTang.y}$ is, zullen wij voor de tangens van den hoek 'WAW', dat is voor de tangens van den hoek waaronder de beide takken der kromme elkander in het punt A snijden, vinden: $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$

Maar de waarde van $\frac{\partial x}{\partial y}$ kan ons ook ten anderen dienen, om de grootste waarde van x te bepalen, want dan moet $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, en dus $-(ab\sqrt{b^2 - y^2}) = \pm (y^2 - ab^2)$ zijn. Dit quadraterende, komt er na behoorlijke herleiding $y^4 - 2ab^2y + a^2b^2 = 0$, voor de vergelijking welke de waarden van y moet bevatten, welke x een maximum of minimum zullen maken: wij zullen ook deze vergelijking op de drie vormen van onze kromme toepassen.

In Fig. 124, waar $a > b$ is, stellen wij tot een voorbeeld $a = 2b$, zijnde die Figuur op deze afmeting geteekend, de vergelijking voor het maximum van x wordt dan $y^4 - 4b^2y + 4b^4 = 0$, welke vergelijking, geen bestaanbare wortels hebbende, aantoon, dat de kromme in dit geval voor geen maximum of minimum ten opzichte van x vatbaar is, en dit verscheijnsel zullen wij altijd zien plaats hebben, als $a > b$ is.

In Fig. 125 is $a = b$ en de vergelijking wordt alsdan $y^4 - 2b^2y + b^4 = 0$, of stellende $y = az$, $z^4 - 2z + 1 = 0$, waaruit $z = 1$ en $z = 0,55$ ten naasten bij, zijnde de twee andere wortels onbestaanbaar, zoo dat $y = a$, en y ten naasten bij $= 0,55a$; de eerste waarde van y geeft het punt A of L, waarin x een minimum is, en de tweede het punt T, waarin x een maximum is.

In Fig. 126 stellen wij, om dat $a < b$ moet we-

wezen, tot een voorbeeld $b = 2a$, zijnde dit de maat, waarop *fig.* 126 geconstrueert is, dan wordt de vergelijking voor het maximum of minimum van x , $y^4 - 8a^3y + 4a^4 = 0$, of $y = 0,5$ stellende; $z^4 - 8z + 4 = 0$; deze vergelijking heeft nu eene wortel $= 0,5$ en eene $= 1,8$, beide bij nadering, en de twee andere wortels zijn onbestaanbaar, de eerste, of $y = 0,5a$ verschaft ons het maximum T , en de tweede, $y = 1,8a$, het minimum T' .

Wij hebben hier de benadering der wortels niet verder voortgezet, om dat dit tot de discussie niets afdoet, en hebben ons ook onthouden, van de gevondene waarde van y , die wij voor de maxima en minima van x vonden, aan de uit-

drukking $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ te toetsen, om dat het bestaan van

deze maxima en minima hier uit den aart der zaak en het boven gezegde klaarlijk was; Wij merken alleen aan, dat men bij deze substitutie

in sommige gevallen voor $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ de waarde $\frac{0}{0}$ verkrijgt, en dat men dan tot de bekende regels toevlugt moet nemen, om deze waarde te bepalen.

De waarde van $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ zullen wij ondertusschen gebruiken om de buigpunten van onze kromme te bepalen, want in die punten moet ϕ een maxi-

mum of minimum zijn, en dus ook $Tang. \phi$ of $\frac{\partial x}{\partial y}$

en wij moeten bijgevolg $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$ stellen en heb-

ben alzoo, om de buigpunten aan onze kromme te vinden,

$$2a(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \pm (2ab^3 - 3aby^2 + by^3) = 0$$

dat is $2a(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} = \pm (2ab^3 - 3aby^2 + by^3)$

deze

deze vergelijking gequadrateert en behoorlijk herleid, zal voortbrengen

$$(b^2 + 4a^2)y^3 - 6ab^2y^2 - 3a^2b^2y + 4a^3b^2 = 0$$

wij merken echter hierbij aan, dat de waarden van y , uit deze vergelijking gevonden, aan de

uitdrukking, die wij voor $\frac{\delta^3 x}{\delta y^3}$ vonden, moeten

getoetst worden en dat $\frac{\delta^3 x}{\delta y^3} = 0$ wordende, ook

$\frac{\delta^4 x}{\delta y^4} = 0$ moet zijn &c. (Zie hierover nader de oplossing van het 92^{de} Voorstel).

Is nu, zoo als in *Fig. 124*, waar zijn, $a = 2b$, dan wordt deze vergelijking $17y^3 - 12b^2y^2 - 12b^3y + 4b^4 = 0$, waarvan de wortels, slechts tot in t benaderd, zijn $y = 0,9b$; $y = 0,6b$ en, makende dus $BY = \frac{1}{8}FR$; $BY' = \frac{1}{8}FR$, zullen wij de drie buigpunten X , X' en X'' verkrijgen.

In *Fig. 125* is $a = b$, en de vergelijking is dus $5y^3 - 6b^2y^2 - 3b^3y + 4b^4 = 0$, waaruit y twee wortels heeft $= a$ en de derde gelijk $= \frac{1}{5}a$, niet ten naasten bij, maar volkomen, de twee eerste geven ons het dubbelde of het keerpunt A , en de laatste het buigpunt X .

Stellen wij eindelijk in *Fig. 126*, waar $a < b$ is, b wederom $= 2a$, dan hebben wij de volgende vergelijking $2y^3 - 6a^2y^2 - 3a^3y + 16a^4 = 0$, waaruit een wortel ten naasten bij $= -\frac{1}{4}b$, zijnde de twee andere imaginair, en de kromme van *Fig. 126* heeft dus slechts een buigpunt X , dat met $BY = -\frac{1}{4}a$ of $= \frac{1}{4}b$ overeenstemt.

Wij zullen deze oplossing besluiten, met nog eenige woorden over de inhoudvinding van onze kromme te zeggen. Wij kunnen hieromtrent in geene bijzonderheden treden, wijl deze oplossing

alsdan veel te wijdloopig zou worden, en vergo-
noegen ons alzoo met het volgende aantewijzen.

Hier is bekend, dat de inhoud van eenig stuk

BSP'B (Fig. 124) $= \int x \delta y$ is, wijl wij nu

hebben $x = \frac{(a-y)(b \pm \sqrt{b^2 - y^2})}{y}$ is

$x \delta y = \frac{(a-y)(b \pm \sqrt{b^2 - y^2}) \delta y}{y}$, hetwelk

geïntegreert geven zal

$\int x \delta y = ab \text{ Log. } y - b y \pm (ab \text{ Log. } \frac{b - \sqrt{b^2 - y^2}}{y} +$

$\frac{(a-y)\sqrt{b^2 - y^2}}{y} \mp \frac{1}{2} b^2 \text{ Boog. Sin. } \frac{y}{b}) + C. \quad (A)$

gelden

BSPS

BC

vóór

denste

voor eenig stuk

de asymptote

het benedenste

dan het bene-

BSP'B $= ab \text{ Log. } \frac{y^2}{b - b \sqrt{b^2 - y^2}} + \frac{1}{2} b^2 \text{ boog. Sin. } \frac{y}{b}$

$- \frac{2 b y + (a - y) \sqrt{b^2 - y^2}}{2} + C$

daar nu dit stuk $= 0$ moet worden, als $y = 0$ is,
hebben wij $C = ab (1 - \text{Log. } 2b)$: waardoor
de verbeterde integraal voor het benedenste tee-
ken wordt

BSP'B $= ab \text{ Log. } \frac{y^2}{2b(b - \sqrt{b^2 - y^2})} + \frac{1}{2} b^2 \text{ boog. Sin. } \frac{y}{b}$

$+ b(a - y) - \frac{(2a - y) \sqrt{b^2 - y^2}}{2}$

en stellende hierin $y = b$; komt er voor den in-
houd van het geheele stuk BVLP'B deze waarde,
 $ab \text{ Log. } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} b^2 \pi + b(a - b)$ en dus in Fig.
125, waar $a = b$ is, $AP'TBA = b^2 (\text{Log. } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pi)$
maar

maar nemen wij het bovenste teeken van (A), zullen wij vinden, dat het stuk BSPS'C oneindig groot is.

Stellen wij nu (Fig. 124) $VS = z$, dan is $y = (b - z)$, en dit in (A) substituerende, verkrijgen wij,

$$(B) \dots \int x dx = -ab \text{Log.}(b - z) + b(b - z) \pm \\ (ab \text{Log.} \frac{b - \sqrt{2bz - z^2}}{b - z} + \frac{(2a - b + z)\sqrt{2bz - z^2}}{2} \\ - \frac{1}{2} b^2 \text{Boog. Sin.} \frac{b - z}{b}) + C$$

waarin het bovenste teeken voor eenig stuk VSPLV en het benedenste voor eenig stuk VSP'LV moet dienen, nemende nu het benedenste teeken, dan wordt

$$\text{VSP'LV} = -ab \text{Log.} \frac{(b - z)^2}{b - \sqrt{2bz - z^2}} - \frac{1}{2} b^2 \text{Boog. Sin.} \frac{b - z}{b} + \\ \frac{2b(b - z) + (2a - b + z)\sqrt{2bz - z^2}}{2} + C$$

maar dit stuk moet = 0 zijn, in de onderstelling van $z = 0$, en wij hebben dus

$$C = ab \text{Log.} b + \frac{1}{4} b^2 \pi - b^2$$

en stellende nu $z = b$, hebben wij voor den inhoud van het stuk VLP'BV wederom

$$ab \text{Log.} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} b^2 \pi + b(a - b), \text{ even als boven.}$$

De formule (B) strekt ons echter tot een nuttiger einde, want wij kunnen door dezelve gemakkelijk den inhoud van eenig stuk PLP'P, bevat tusschen de kromme en eenige koorde PP', welke evenwijdig aan CD is, bepalen; want daar het bovenste teeken van (B) voor VSPLV, en het benedenste voor VSP'LV dient, hebben wij door die waarden van elkander aftrekken,

$$\text{PLP'P} = -2ab \text{Log.} \frac{b - \sqrt{2bz - z^2}}{b - z} - \\ (2a - b + z)\sqrt{2bz - z^2} + b^2 \text{Boog. Sin.} \frac{b - z}{b} + C$$

en daar deze inhoud 0 moet zijn, als $x = 0$ is, vinden wij $C = -\frac{1}{2} b^2 \pi$, zoo dat de verbeterde inhoud zal zijn,

$$PLP'P = a a b \text{ Log. } \frac{b + \sqrt{2 b x + x^2}}{(b - x)}$$

$$(2a - b + x) \sqrt{2 b x + x^2} + b^2 \text{ Boog-Sin. } \frac{b-x}{b} = \frac{1}{2} b^2 \pi$$

waardoor de inhoud van ieder stuk PLP'P ten vollen bepaald is: en stellen wij hierin $x = b$, word deze waarde oneindig groot, uit hoofde

van $a a b \text{ Log. } \frac{2 b}{0}$: waaruit blijkt, dat de ruim-

te, beïloten tusschen de kromme en de asymptote, oneindig is; hetgeen ook uit de bekende eigenschap der snijdende hyperbool gemakkelijk is afte leiden; en het zal nu niet moeilijk zijn, om deze formule voor den inhoud, op alle vormen der kromme, die wij opgegeven hebben, toe te passen.

Nº. 139. Door

I. R. SCHMIDT.

Laat op eene onbepaalde lijn DE (Fig. 127) eene perpendicular BA = a genomen worden: wanneer dan uit A eenige rechte lijn AR tot DE getrokken wordt, en uit R eene loodlijn RT = b wordt opgericht, dan zal het punt P, waarin de cirkel, uit P met TR als radius beschreven, de lijn AR snijdt, een punt van de begeerde kromme zijn.

Want laat uit P de loodlijnen PQ en PS op DE en AB worden nedergeleten, zoo wij dan BQ = x en PQ = y stellen, dan is, TP trekkende,

$$RQ = \sqrt{TP^2 - (PQ - TR)^2} = \sqrt{TP^2 - (y - b)^2}$$

$$= \sqrt{(2 b y - y^2)}. \text{ Verder is}$$

$$RQ^2 : PQ^2 :: PS^2 : AS^2 \text{ of } 2 b y - y^2 : x^2 :: x^2 : (x - y)^2$$

waar-

waaruit $x^2 = \frac{(a - y)^2 (2by - y^2)}{y^2}$ en

$$x = \pm \frac{a - y}{y} \sqrt{2by - y^2} = \pm (a - y) \sqrt{\frac{2b - y}{y}}$$

Deze constructie dan op verschillende punten R toepasfende, word de gevraagde kromme zeer gemakkelijk geconstrueerd.

Nu is $RP = \sqrt{[RQ^2 + PQ^2]} = \sqrt{2by}$ en $AR = \sqrt{(RB^2 + AB^2)} = \sqrt{[(\sqrt{2by} - y^2 + x)^2 + a^2]}$

$= \frac{a}{y} \sqrt{2by}$; dus $AR \times RP = 2ab$, waaruit

deze merkwaardige eigenschap van onze kromme volgt, *dat de regthoek uit de lijnen AR en RP overal gelijk eene standvastige groothed is.*

Het blijkt nu, zoo wel uit de constructie, als uit de vergelijking,

1°. Dat y nooit grooter dan $2b$ kan zijn. Uit de constructie, omdat de koorde RP niet grooter dan de middellijn kan zijn; en uit de ver-

gelijking, omdat $y > 2b$ stellende, $\sqrt{\frac{2b - y}{y}}$

imaginair wordt, en dus voor x eene imaginaire waarde geeft; en deze grootste waarde van y stemt overeen met $x = 0$, waaruit blijkt, dat het punt C, waarin de kromme lijn de lijn AB snijdt, voor y een maximum geeft: namelijk $BC = 2b = 2RT$, en wij hebben dus overal $AR \times RP = AB \times BC$.

2°. Dat het maximum, dat wij voor y gevonden hebben, namelijk $y = 2b$, het eenigste is, waarvoor y vatbaar is; want wanneer y kleiner wordt, wordt $2b - y$, en dus zoo veel te meer $\frac{2b - y}{y}$ grooter; $a - y$ wordt in die onderstel-

ling mede grooter; waaruit volgt, dat x aangroeit naarmate y afneemt, en dat dus y omgekeerd bestendig kleiner wordt, naarmate x toeneemt. Dit

Ff 2

volgt

volgt ook uit de constructie; want naarmate x grooter wordt, wordt ook $\angle TRP$ grooter, en dus de koorde RP kleiner. Stellen wij eindelijk $y = 0$, dan wordt x oneindig en DE is dus asymptote van de kromme.

3°. Dat y ook niet negatief kan zijn, want y negatief stellende, wordt $\sqrt{\frac{2b - y}{y}}$ en dus ook x altoos imaginair. Alle waarden van y zijn dus begrepen tusschen de limieten $2b$ en 0 , en er kan geen punt der kromme beneden de lijn DE vallen.

Offchoon nu al wat wij tot hiertoe gezegd hebben, deze kromme in het algemeen betreft, is hare vorm ondertusschen zeer verschillend, naarmate a grooter, gelijk of kleiner dan $2b$ is; *Fig. 127* is geconstrueerd in de onderstelling van $a > 2b$, en de kromme lijn kan hier niet door het punt A gaan, omdat y niet grooter dan $2b$ kunnende zijn, niet $= a$ kan genomen worden. *Fig. 128* is geconstrueerd in de onderstelling van $a = 2b$, de vergelijking wordt alsdan

$$x = \pm (a - y) \sqrt{\frac{a - y}{y}}, \quad y \text{ hier op zijn grootst}$$

$= 2b = a$ zijnde, gaat de kromme hier door het punt A , daar de punten A en C hier op elkander vallen; maar is $a < 2b$ zoo als in *Fig. 129*, dan maakt de onderstelling van $y = a$ zoo wel $x = 0$, als de onderstelling van $y = 2b$; het punt C staat hier dus boven A , en de kromme moet de lijn AB in de punten A en C snijden; daar nu de kromme uit hoofde van het dubbele teeken, dat de waarde van x heeft, symmetriek moet zijn ten opzichte van den z s der ordinaten AB , is dit niet mogelijk, ten zij de takken der kromme elkander in A snijden, en de kromme alzoo een knoop hebbe; eene waarheid welke de constructie volkomen bevestigt.

Om

Om den hoek te bepalen, welke de tangens van eenig punt P der kromme met den as AB der ordinaten maakt, moeten wij de waarde van $\frac{\delta x}{\delta y}$ zoeken, welke, zoo als bekend is, de tangens van die hoek uitdrukt.

$$\text{Nu is } x = \pm \left(\frac{a - y}{y} \right) \sqrt{(2by - y^2)}$$

$$\text{dus } \delta x = \pm \left[\frac{-a - b + y}{y \sqrt{(2by - y^2)}} \right] \delta y$$

$$\text{zoo dat } \frac{\delta x}{\delta y} = \pm \left(\frac{-a - b + y}{y \sqrt{(2by - y^2)}} \right), \text{ zijnde}$$

dit de uitdrukking voor de tangens des hoeks, welken de raaktlijn uit eenig punt P van de kromme, met de lijn AB maakt.

Stellen wij nu in deze uitdrukking $y = 2b$, word dezelve $\pm \left(\frac{-a - b + 2b}{0} \right)$, eene uitdruk-

king, welke voor *Fig. 127* en *129*, waarin $a >$ of $< 2b$ is, oneindig wordt, en dus $\pm \text{Tang } 90^\circ$ is, en dus bevestigt, dat die tangens in *Fig. 127* en *128* evenwijdig aan den as DE is, en dat dus het punt C een maximum is.

Maar in *Fig. 128*, waar $a = 2b$ is, wordt deze uitdrukking $\frac{0}{0}$, en om de tangens van het punt C voor *Fig. 128* te bepalen, moeten wij bijgevolg onderzoeken wat $\frac{-2b^2 - by + y^2}{y \sqrt{(2by - y^2)}}$

wordt, in de onderstelling van $y = 2b$; differencieren wij dan den teller en den noemer, komt er, na onder en boven met $\sqrt{(2by - y^2)}$ gemultipliceerd en door δy gedeeld te hebben:

$$\frac{(-b + 2y) \sqrt{(2by - y^2)}}{3by - 2y^2}, \text{ en stellende hier in}$$

$y = a$, wordt deze uitdrukking $= 0 = \text{Tang. } 0^\circ$. BA is dus in *Fig. 128* tangens aan beide takken der kromme, en het punt A is bijgevolg een keerpunt.

In *Fig. 129* heeft de kromme, zoo als wij reeds boven gezien hebben, eene knoop, en de takken snijden elkander in het punt A, waar $y = a$ is; om dan de tangenten aan dit punt A te bepalen, moeten wij in de uitdrukking

$$\pm \left(\frac{-ab - by + y^2}{y \sqrt{(2by - y^2)}} \right), \quad y = a \text{ stellen, en de}$$

zelve verandert hierdoor in $\pm \sqrt{\frac{2ba - a^2}{a}}$ of

$$\pm \frac{\sqrt{(2ba - a^2)}}{a}, \text{ waardoor de tangenten aan dit}$$

punt A gemakkelijk te construeren zijn.

Om eindelijk te onderzoeken, in welke gevallen onze kromme voor buigpunten vatbaar is, moeten wij opmerken, dat de gevondene hoek der tangens met den as AB, in dit geval een maximum of minimum moet zijn en dat dus

$\frac{\delta \delta x}{\delta y}$ gelijk 0 moet worden gesteld; nu hebben wij gevonden:

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \pm \frac{(-ab - by + y^2)}{y \sqrt{(2by - y^2)}}, \text{ wij hebben dus}$$

$$\frac{\delta \delta x}{\delta y^2} = \frac{3ab^2 + (b^2 - 2ab)y}{y(2by - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{en bijgevolg } (b^2 - 2ab)y + 3ab^2 = 0 \\ \text{of } (2ab - b^2)y = 3ab^2$$

waaruit

$$y = \frac{3ab}{2a - b}$$

voor de waarde van y , welke een buigpunt zal aanwijzen. Wij zullen nu deze waarde op de drie verschillende vormen van onze kromme toepassen.

In

In Fig. 127, waar $a > 2b$ is, is $y = \frac{3ab}{2a-b}$ altijd positief, en toont dus een buigpunt aan (want y kan, zoo als gezegd is, niet negatief worden), en dit is gemakkelijk te construeren, want wij hebben $2a-b : 3b = a : y$ of $aAB \sim RT : 3RT = AB : BM$, waardoor het punt M en dus de buigpunten V en V' bepaald worden.

Is, zoo als in Fig. 128, $a = 2b$, dan wordt $y = \frac{6b^2}{3b} = 2b$, en deze waarde stemt dus overeen met het gevondene keerpunt A of C , welke punten hier op elkander liggen.

Wij moeten nu nog onderzoeken, wat er gebeurt, wanneer $a < 2b$ is, zoo als in Fig. 129, wij kunnen hier $a = 2b - c$ stellen, zijnde c zelden de waarde van CA , en wij hebben hierdoor voor het buigpunt

$$y = \frac{3ab}{2a-b} = \frac{3b(2b-c)}{2(2b-c)-b} = \frac{6b^2-3bc}{3b-2c} = 2b + \frac{bc}{3b-2c}$$

herinneren wij ons nu, dat y niet grooter dan $2b$ en niet negatief of kleiner dan 0 kan zijn, om dat anders x imaginair wordt, dan is het klaar, dat er voor Fig. 129 geen buigpunt be-

staan kan, ten zij $\frac{bc}{3b-2c}$ negatief, en wel tusschen 0 en $-2b$ zij; c kan echter niet grooter dan $2b$ zijn, want was c grooter dan $2b$, zou x negatief zijn, en dan was onze vergelijking niet

$$\text{meer } \pm(a-y)\sqrt{\frac{2b-y}{y}}, \text{ maar } \pm(a+y)\sqrt{\frac{2b-y}{y}},$$

over welke vergelijking wij straks nader spreken zullen: laten wij dan de waarde van $y = 2b + \frac{bc}{3b-2c}$

voor alle waarden van C van 0 tot $2b$ beschouwen.

Is $c = 0$ dan is $y = 2b$, en wij vervallen alsdan in het geval van Fig. 128, maar c latende aangroeijen, van 0 tot $\frac{2}{3}b$, wordt $\frac{bc}{3b - 2c}$ grooter en grooter, tot dat $c = \frac{2}{3}b$, $\frac{bc}{3b - 2c}$ oneindig maakt, voor al de waarden van c van 0 tot $\frac{2}{3}b$ zal men dus $y > 2b$ vinden, en er zal dus geen buigpunt mogelijk zijn, maar c verder van $\frac{2}{3}b$ tot $2b$ latende aangroeijen, word y altijd negatief, en er bestaat ook voor die waarden van c bijgevolg geen buigpunt, de kromme van Fig. 129 kan bijgevolg geen buigpunt hebben.

Is echter $c > 2b$ en dus a negatief, dan verandert onze vergelijking in $x = \pm (a + y) \sqrt{\frac{2b - y}{y}}$, deze nu wordt even gemakkelijk geconstrueert als de voorgaande, de loodlijn RT moet dan in plaats van aan denzelfden kant der lijn DE, als AB, genomen te worden, slechts aan den anderen kant genomen worden, zoo als in Fig. 130 te zien is, en wanneer wij dan al het gezegde op deze nieuwe Figuur op eene analogische wijze toepassen, zullen wij de volmaakte overeenkomst van deze Figuren gemakkelijk opmerken: $AP \times PR$ zal hier wederom altijd eene standvastige grootheid zijn, doch de kromme, die dan beneden DE valt, is niet meer voor die afwisseling van vorm vatbaar. Zij heeft altijd twee buigpunten, welke gevonden worden door y , dat is $BM = \frac{3ab}{2a + b}$ te nemen, en of wij deze en de overige eigenschappen, welke wij voor de kromme der eerste vergelijking gevonden hebben, uit de Figuur zelve affeiden, of wel door a in onze berekeningen overal negatief te stellen, zullen wij voortdurend dezelfde uitkomsten verkrijgen.

N^o. 140. Door

C. Lants Jr., MOSES LEMANS, en
R. Lobatto.

De drie zijden des driehoeks gegeven zijnde,
 a , b en c , zoo is de radius des ongeschreven
cirkels

$$r = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{a+b+c}$$

en die des omgeschreven cirkels

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}$$

Stellende nu de zijden des gelijkvormigen drie-
hoeks, om den cirkel, x , y en z , zoo is:

$$x; a = R : r$$

$$\text{waaruit } x = a \times \frac{R}{r}$$

$$= \frac{2a^2bc}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

en op gelijke wijze

$$y = \frac{2ab^2c}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

$$\text{en } z = \frac{2abc^2}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

N^o. 141. Door

C. Lants Jr., N. Bondt, R. Lobatto,
en A. van der Swan.

Van de reeks $\frac{1}{3}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{17}{13}$ enz. is de algemeene
term $\frac{3 + (n-1) \cdot 7}{9 + (n-1) \cdot 2} = \frac{7n-4}{2n+7}$; zal nu deze
breuk gelijk een geheel getal a zijn, zoo moet
Ff 5 men

men hebben $7a - 4 = 3n + 7a$, waaruit
 volgt $n = \frac{7a + 4}{7 - 2a}$. Hieruit blijkt, dat a klei-
 ner dan 7 en dus $a = 1, 2$ of 3 moet zijn;
 maar $a = 1$ geeft voor n een gebroken; terwijl
 $a = 2$ en $a = 3$, voor n de waarden van 6
 en 25 opleveren; dus zullen de zesde en vijfen-
 twintigste breuken geheele getallen zijn.

Nº. 142. Door

*C. Lants Jr., N. Bondt, en
 R. Lobatto.*

Stel voor het gebroken x , zoo is $x - x^2 = x^2$,
 dus $1 - x^2 = x$, $x^2 + x = 1$, en $x^2 + x + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$;
 dus $x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Nº. 143. Door

*A. van der Swan, C. Lants Jr.,
 en R. Lobatto.*

Laat de evenredigheid zijn $x : nx = y : ny$,
 zoo is $x + 1 : nx + 1 = 1 : 2$; $nx + 1 : y - 1$
 $= 4 : 5$ en $x + ny = nx + y + 6$. Uit de eer-
 ste evenredigheid volgt $nx + 1 = 2x + 2$, dus
 $nx = 2x + 1$ en $n = \frac{2x + 1}{x}$; deze waarde van
 n in de evenredigheid $nx + 1 : y - 1 = 4 : 5$
 en in de vergelijking $x + ny = nx + y + 6$
 overbrengende, komt $2x + 2 : y - 1 = 4 : 5$, en
 $x + \frac{2xy + y}{x} = 2x + y + 7$; of $4y - 4 = 10x + 10$ en
 $x^2 + 2xy + y = 2x^2 + xy + 7x$, of $2y - 2 = 5x + 5$
 en $xy + y = x^2 + 7x$. Door de eerste van
 deze

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 457

deze vergelijkingen tusschen x en y heeft men

$$y = \frac{5x+7}{2} \text{ en } xy = \frac{5x^2+7x}{2}; \text{ dus } xy+y$$

$$= \frac{5x^2+7x}{2} + \frac{5x+7}{2} = x^2+7x, \text{ waaruit volgt:}$$

$$5x^2+12x+7=2x^2+14x, \quad 3x^2=2x-7$$

$$\text{en deze vergelijking oplofende: } x = \frac{1 \pm 2\sqrt{-5}}{3};$$

$$\text{dus } y = \frac{5x+7}{2} = \frac{13 \pm 5\sqrt{-5}}{3}, \quad n = 2 + \frac{1}{x} =$$

$$2 + \frac{3}{1 \pm 2\sqrt{-5}} = 2 + \frac{1 \mp 2\sqrt{-5}}{7} = \frac{15 \mp 2\sqrt{-5}}{7};$$

$$nx = \frac{5 \pm 4\sqrt{-5}}{3} \text{ en } ny = \frac{35 \pm 7\sqrt{-5}}{3}.$$

Nº. 144. Door

N. Bondt, R. Lobatto, en C. Lants Jr.

Stel voor het gebroken $\frac{1}{x}$, zoo moet $x = \frac{1}{x}$

$= n \cdot \frac{1}{x}$ zijn; dus $x^2 - 1 = n$, $x^2 = n + 1$,

en $x = \sqrt{n+1}$. Stel tot een voorbeeld $n=3$,

zoo wordt $x = \sqrt{4} = 2$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{x} = 1\frac{1}{2}$

$= n \cdot \frac{1}{x}$; neem $n = 8$, komt $x = \sqrt{9} = 3$,

$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{x} = 2\frac{2}{3} = 8 \times \frac{1}{3} = n \times \frac{1}{x}$ enz.

Nº. 145.

N^o. 145. Door*De Wetenschappelijke Commissie.*

Van dit Voorstel is geen voldoende ontbinding ingekomen, en het komt ons voor, dat hetzelfde ook niet opgelost kan worden, ten zij men eerst voor y een getal geraden hebbe, waardoor $ay^3 - b$ een rationaal quadraat wordt, als wanneer het gemakkelijk is, meer dergelijke waarden voor y te vinden:

Stel, bij voorbeeld, dat $y = a$ de formule $ay^3 - b$ tot een quadraat maakt, dan stelle men, om nog eene andere waarde voor y te vinden, $y = a + z$, waardoor

$$ay^3 - b = a a^3 - b + 3 a a^2 z + 3 a a z^2 + a z^3,$$

Stel verder $\sqrt{ay^3 - b} = \sqrt{a a^3 - b} + p z$, komt

$$ay^3 - b = a a^3 - b + 2 p z \sqrt{a a^3 - b} + p^2 z^2$$

en om deze vergelijking met de vorige overeen te brengen, stelle men

$$2 p \sqrt{a a^3 - b} = 3 a a^2$$

$$\text{en } p^2 z^2 = 3 a a z^2 + a z^3, \text{ komt}$$

$$p = \frac{3 a a^2}{2 \sqrt{a a^3 - b}} \text{ en } z = \frac{p^2 - 3 a a}{a}, \text{ en hier}$$

in de waarde van p brengende:

$$z = \frac{9 a a^4}{4 (a a^3 - b)} - 3 a = \frac{-3 a a^4 + 12 b a}{4 (a a^3 - b)}$$

en hier a bijvoegende, om dat wij $y = a + z$ gesteld hebben, komt

$$y = a + z = \frac{a a^4 + 8 b a}{4 (a a^3 - b)}.$$

Dus, wanneer $y = a$, de formule $ay^3 - b$ tot een quadraat maakt, zal $y = \frac{a a^4 + 8 b}{4 (a a^3 - b)} \cdot a$, dezelfde ook tot een quadraat maken.

Stel, bij voorbeeld, $a = 3$ en $b = 2$, zoo dat men hebbe $x = \sqrt{3 y^3 - 2}$, dan voldoet

klaar-

klaarblijkelijk $y \equiv 1$, en hierdoor vindt men verder

$$y = \frac{3a^3 + 8 \cdot 2}{4(3a^3 - 2)} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$$

N^o. 146. Door

U. Huguenin, en ABRAHAM FOCK.

Als men van de voorgestelde vergelijkingen:

$$x^{x+y} = y^n \text{ en } y^{x+y} = x^m$$

de logarithmen $(x+y) \text{ Log. } x = n \text{ Log. } y$ en $(x+y) \text{ Log. } y = m \text{ Log. } x$ met elkander multiplicéert, en het product door $\text{Log. } x \times \text{Log. } y$ deelt, heeft men $(x+y)^2 = mn$, of $x+y = \sqrt{mn}$. Deelt men daarentegen de tweede logarithmische vergelijking door de eerste, zoo bekomt men $\frac{\text{Log. } y}{\text{Log. } x} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\text{Log. } x}{\text{Log. } y}$, of $\left(\frac{\text{Log. } y}{\text{Log. } x}\right)^2 = \frac{m}{n}$; $\frac{\text{Log. } y}{\text{Log. } x} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ en $\text{Log. } y = \sqrt{\frac{m}{n}} \times \text{Log. } x$; derhalve

is $y = x^{\sqrt{\frac{m}{n}}}$; hetwelk in $x+y = \sqrt{mn}$ gesubstitueerd zijnde, geeft de eindvergelijking

$$x + x^{\sqrt{\frac{m}{n}}} = \sqrt{mn}$$

Wanneer \sqrt{mn} en dus ook $\frac{\sqrt{mn}}{n} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ een rationaal getal is, heeft de oplossing van deze vergelijking geene andere zwaarigheid, dan die, welke in den graad zelve gelegen is. Stelt men in dezelve, zoo als bij de oplossing van dit Voorstel in het I Deel der Wisk. Verlust.,

$$m = 12 \text{ en } n = 3, \text{ zoo is } \sqrt{mn} = 6, \sqrt{\frac{m}{n}} = 2, \text{ en}$$

en men heeft slechts de vierkants-vergelijking $x^2 + x = 6$ oplossen; welke $x = 2$ en $x = -3$ tot wortelen heeft; waardoor men $y = 4$ vindt, als men van den positieven wortel van x gebruik maakt.

Worden echter m en n zoodanig aangenomen, dat \sqrt{mn} irrationaal zij, zoo laat zich onze vergelijking geenzins op de gewone wijze oplossen, maar men moet zich alsdan van een, daartoe geschikte naderingswijze bedienen, en deze nadering kan op verschillende wijzen geschieden: bij voorbeeld, als men $x = 1 + z$; $\sqrt{mn} = p$ en $\sqrt{\frac{m}{n}} = q$ stelt, verandert onze eindverge-

lijking in $1 + z + (1 + z)^q = p$; of volgens de bekende Newtonsche binomicaal-formule, in

$$p = 2 + (q+1)z + \frac{q(q+1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{q(q+1)(q+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \dots$$

waaruit men, door omkeering van deze reeks, de waarde van z bij nadering vinden kan; wij zullen echter eenen anderen weg inslaan, om eene reeks met minder zamengestelde coëfficiënten te bekomen.

Men stelde tot dit einde in $x + x = \sqrt{mn} = p$ en $\text{Log. } y = \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \text{Log. } x = \frac{p}{n} \text{Log. } x$, $x = \frac{1}{2}p + z$ en $y = \frac{1}{2}p + z$, zoo heeft men $\text{Log.}(\frac{1}{2}p + z) = \frac{p}{n} \text{Log.}(\frac{1}{2}p - z)$, of

$$\frac{p}{n} = \frac{\text{Log.}(\frac{1}{2}p + z)}{\text{Log.}(\frac{1}{2}p - z)} = \frac{\text{Log.}\frac{1}{2}p + \text{Log.}\left(1 + \frac{2z}{p}\right)}{\text{Log.}\frac{1}{2}p + \text{Log.}\left(1 - \frac{2z}{p}\right)}$$

en hieruit:

$$\frac{p}{n} \text{Log.}\frac{1}{2}p + \frac{p}{n} \text{Log.}\left(1 - \frac{2z}{p}\right) = \text{Log.}\frac{1}{2}p + \text{Log.}\left(1 + \frac{2z}{p}\right)$$

of

$$\text{of } (p-n) \text{Log.} \frac{1}{2}p = n \text{Log.} \left(1 + \frac{2x}{p}\right) - p \text{Log.} \left(1 - \frac{2x}{p}\right)$$

Zij nu $\frac{2x}{p} = v$, zoo is $x = \frac{1}{2}pv$, $x = \frac{1}{2}p(1-v)$,
 $y = \frac{1}{2}p(1+v)$ en men heeft:
 $(p-n) \text{Log.} \frac{1}{2}p = n \text{Log.}(1+v) - p \text{Log.}(1-v)$;
 maar volgens de eigenschap der natuurlijke, of
 Hïperbolische logarithmen, is:
 $n \text{Log.}(1+v) = n(v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \text{enz.})$
 $p \text{Log.}(1-v) = -p(v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4 + \text{enz.})$
 dus $n \text{Log.}(1+v) - p \text{Log.}(1-v) =$
 $(p-n) \text{Log.} \frac{1}{2}p = (p+n)v + \frac{1}{2}(p-n)v^2 + \frac{1}{3}(p+n)v^3 + \text{enz.}$
 of $\frac{p-n}{p+n} \text{Log.} \frac{p}{2} = v + \frac{1}{2} \left(\frac{p-n}{p+n} \right) v^2 + \frac{1}{3} v^3 + \text{enz.}$

Om de waarde van v uit deze reeks te vinden,
 zullen wij, om te verkorten $a = \frac{p-n}{p+n} \text{Log.} \frac{p}{2}$

en $b = \frac{p-n}{p+n}$ stellen, waardoor men heeft:

$a = v + \frac{1}{2}bv^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}bv^4 + \frac{1}{5}v^5 + \text{enz.}$
 Voorts stelde men, om deze reeks om te keeren:
 $v = Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 + Ea^5 + \text{enz.}$
 en zoo men hiervan de magten $v^2, v^3, \text{enz.}$ in
 onze vergelijking substitueert, en dezelve op 0
 reduceert, bekomt men de vergelijking:

$$0 = Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 + Ea^5 + \text{enz.}$$

$$-a + \frac{1}{2}bA^2a^2 + bABa^3 + \frac{1}{2}bB^2a^4 + \frac{1}{3}A^3a^3 + bACa^4 + A^2Ba^4 + \frac{1}{2}A^2ba^5 + \text{enz.}$$

$$+ (E + bAD + bBC + A^2C + AB^2 + A^2bD + \frac{1}{2}A^3) a^5 + \text{enz.}$$

en als men de coëfficiënten van de magten van a
 gelijk 0 stelt, vindt men

$$A = 1; B = -\frac{1}{2}b; C = \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3};$$

$$D = -\frac{1}{4}b^3 + \frac{1}{2}b; E = \frac{1}{5}b^4 - b^2 + \frac{1}{2}; \text{enz.}$$

der-

derhalve is de waarde van

$$v = a - \frac{1}{2} b a^2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} b^2\right) a^3 + \left(\frac{7}{12} b - \frac{5}{8} b^3\right) a^4 + \left(\frac{2}{15} - b^2 + \frac{7}{8} b^4\right) a^5 - \text{enz.}$$

en deze waarde gevonden hebbende, heeft men volgens het voorgaande:

$$z = \frac{1}{2} p v, \quad x = \frac{1}{2} p (1 - v), \quad \text{en} \quad y = \frac{1}{2} p (1 + v)$$

Laat ons tot een voorbeeld $m = 5$ en $n = 3$

stellen, zoo is $p \sqrt{15} = 3,8729833$; $b = \frac{p-n}{p+n} =$

$$\frac{\sqrt{15}-3}{\sqrt{15}+3} = 4 - \sqrt{15} = 0,1270167; \text{ en daar}$$

onze formule op de natuurlijke logaritmen ge-

grond is, is $\text{Log.} \frac{p}{2} = \text{Nat. Log.} \sqrt{15} - \text{Nat. Log.} 2 =$

$$1,35402510 - 0,69314718 = 0,66087792; \text{ der}$$

halve heeft men $d = \frac{p-n}{p+n} \text{Log.} \frac{p}{2} = b \text{Log.} \frac{p}{2} =$

$$0,1270167 \times 0,66087792 = 0,0839425; \quad a^2 =$$

$$0,00704634; \quad a^3 = 0,0005915; \quad a^4 = 0,0000497;$$

$$a^5 = 0,00000417; \quad b^2 = 0,01613324; \quad b^3 = 0,00204924;$$

$$b^4 = 0,00026028, \text{ enz. en hierdoor:}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} b^2 = 0,3252666$$

$$\frac{7}{12} b - \frac{5}{8} b^3 = 0,0728123$$

$$\frac{2}{15} b^4 - b^2 + \frac{2}{15} = 0,11742793$$

$$\frac{1}{2} b a^2 = 0,0004475$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} b^2\right) a^3 = 0,0001924$$

$$\left(\frac{7}{12} b - \frac{5}{8} b^3\right) a^4 = 0,0000036$$

$$\left(\frac{2}{15} b^4 - b^2 + \frac{2}{15}\right) a^5 = 0,0000005$$

$$\text{Voorts} \quad a = 0,0839425$$

$$\left(\frac{7}{12} b - \frac{5}{8} b^3\right) a^4 = 0,0000036$$

$$\left(\frac{2}{15} b^4 - b^2 + \frac{2}{15}\right) a^5 = 0,0000005$$

$$\text{Som} = 0,0839466$$

$$- \frac{1}{2} b a^2 = -0,0004475$$

$$- \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} b^2\right) a^3 = -0,0001924$$

$$\text{Som} = 0,0839466$$

deze

deze som van de eerste aftrekkende, rest $v = 0,0833067$; alzoo is $1 - v = 0,9166933$; $1 + v = 1,0833067$; $x = \frac{1}{2} p (1 - v) = 1,7751689$ en $y = \frac{1}{2} p (1 + v) = 2,0978143$; van welke de som $x + y = 3,8729832$ is.

Om nu te onderzoeken, in hoe verre onze gevondene waarden voor x en y met de waarheid overeenstemmen, stelle men dezelve in de vergelijking $(x + y) \text{ Log. } x = n \text{ Log. } y$; waardoor men heeft:

$3,8729833 \text{ Log. } 1,7751689 = 3 \text{ Log. } 2,0978143$; en daar het om het even is, van welk logaritmisch systeem men zich bij deze vergelijking bedient, zullen wij van de gewone logarithmen gebruik maken; en hierdoor heeft men:

$$3,8729833 \times 0,2492397 = 3 \times 0,3217671$$

$$\text{of } 0,9653012 = 0,9653013$$

hetwelk aantoonst, dat de gevondene waarden voor x en y , tot op de laatste cijfer na, geheel naauwkeurig zijn: ook kan men zulks nog nader bevestigen, als men de gevondene waarden voor x en y in de tweede vergelijking substitueert; want alsdan moet, volgens $(x + y) \text{ Log. } y = m \text{ Log. } x$, ook

$$3,8729833 \times 0,3217671 = 5 \times 0,2492397$$

zijn, en hierdoor verkrijgt men:

$$1,2461986 = 1,2461985$$

waaruit wederom blijkt, dat de zes eerste decimalen, in de waarden van x en y geheel naauwkeurig zijn; doch, dat de laatste decimaal van x iets te klein en die van y iets te groot is.

N^o. 147. Door

ABRAHAM FOCK.

Laten AA' , BB' , CC' (*Fig. 131*) de stokken zijn, welke loodrecht op den horizon ABC staan, en zij D het punt, waarin de uiteinden hunner schaduwen te zamen komen; dan is $AA' = 9$, $BB' = 7$, $CC' = 4$, $AB = 7\frac{1}{2}$, $BC = 9\frac{1}{2}$ en $AC = 16\frac{3}{8}$. Stel $A'D = B'D = C'D = x$, dan is $AD = \sqrt{(A'D^2 - A'A^2)} = \sqrt{(x^2 - 81)}$, $BD = \sqrt{(B'D^2 - B'B^2)} = \sqrt{(x^2 - 49)}$, en $CD = \sqrt{(C'D^2 - C'C^2)} = \sqrt{(x^2 - 16)}$. Men heeft nu eenen platten vierhoek $ABCD$, waarvan de betrekking tusschen de zijden en diagonalen in de *Meetk. Anal.*, I Deels 1^{ste} Stukje, pag. 112, opgegeven is. In de aldaar opgegevene vergelijking, de bovenstaande waarden substituerende, en dezelve uitwerkende, verkrijgt men $-6099,9939 x^2 + 1788320,359225 = 0$

$$\text{of } x^2 = \frac{1788320,359225}{6099,9939} = 293,167565171663$$

$$\text{en } x = \sqrt{293,167565171663} = 17,122137$$

$$\text{dus } AD = \sqrt{(x^2 - 81)} = 14,565973$$

$$BD = \sqrt{(x^2 - 49)} = 15,625862$$

$$\text{en } CD = \sqrt{(x^2 - 16)} = 16,64835$$

$$\text{Nu is } A'D : A'A = Rad : Sin. \angle A'DA$$

$$B'D : B'B = Rad : Sin. \angle B'DB$$

$$\text{en } C'D : C'C = Rad : Sin. \angle C'DC$$

$$\text{waaruit } \angle A'DA = 31^{\circ} 42' 40'', \angle B'DB = 24^{\circ} 7' 30''$$

$$\text{en } \angle C'DC = 13^{\circ} 30' 35''. \text{ Voorts is}$$

$$Sin. \frac{1}{2} ADB = \sqrt{\left(\frac{(AB - AD + BD)(AB + AD - BD)}{4 AD \times BD} \right)}$$

$$Sin. \frac{1}{2} CDB = \sqrt{\left(\frac{(CB - CD + BD)(CB + CD - BD)}{4 CD \times BD} \right)}$$

$$\text{waaruit } \angle ADB = 28^{\circ} 29' 20'' \text{ en } \angle CDB = 34^{\circ} 3' 0''.$$

H. t.

Het Voerstel is dus nu gebragt tot het volgende: gegeven zijnde drie zonshoogten, te weten: $31^{\circ} 42' 40''$, $24^{\circ} 7' 30''$ en $13^{\circ} 30' 35''$, en het verloop van azimuth tusschen iedere twee van dezelve, als tusschen de beide eerste $28^{\circ} 29' 30''$ en tusschen de beide laatste $34^{\circ} 3'$; te vinden de zons declinatie, (welke voor alle drie de hoogten gelijk verondersteld wordt), de poolshoogte en de uurhoeken.

Zij dan HETPZQ (*Fig. 132*) de middagcirkel; HZ de horizon; EQ de equator; T het toppunt; P de pool; A, B en C de gegevene zonsplaatsen; dan zijn AT, BT en CT de complementen der gegevene zonshoogten; $AP = BP = CP$, het complement van de zonsdeclinatie; en men zal hebben

$$\begin{aligned} AT &= 90^{\circ} - (31^{\circ} 42' 40'') = 58^{\circ} 17' 20'' \\ BT &= 90^{\circ} - (24^{\circ} 7' 30'') = 65^{\circ} 52' 30'' \\ CT &= 90^{\circ} - (13^{\circ} 30' 35'') = 76^{\circ} 29' 25'' \\ \angle ATB &= 28^{\circ} 29' 30''; \angle BTC = 34^{\circ} 3' 0'' \\ \text{en } \angle ATC &= \angle ATB + \angle BTC = 62^{\circ} 32' 30'' \end{aligned}$$

Laten voorts de punten A, B en C, door bogen van groote cirkels vereenigd worden, en AG loodregt op BT getrokken zijn, dan is $Tang. TG = Tang. AT \times Cos. \angle ATB$; waaruit $TG = 54^{\circ} 53' 35''$ en $BG = BT - TG = 10^{\circ} 58' 55''$; voorts is $Cos. TG : Cos. BG = Cos. AT : Cos. AB$ en hierdoor $AB = 26^{\circ} 12' 5''$.

Op gelijke wijze vindt men door de driehoeken BTC en ATC, $BC = 33^{\circ} 49' 30''$ en $AC = 59^{\circ} 43' 10''$.

De beide driehoeken APB en ACB staan op dezelfde basis AB; van dezelve zijn bekend AB, AC en BC; men stelle $AP = BP = CP = x$; dan heeft men (BANOMAN, *Drieh. pag. 126*) voor den boog CP, welke de toppen dezer driehoeken vereenigt:

$$Cos. CP = Cos. AP \times Cos. BP + Sin. AP \times Sin. BP \times Cos. \angle APB$$

$$\sin. a^2 \cos. x = \cos. p \cdot \cos. x + \cos. q \cdot \cos. x \dots$$

$$\dots - (\cos. p \cdot \cos. x + \cos. q \cdot \cos. x) \cos. a$$

$$+ 2\sqrt{\sin. \frac{a+p+q}{2} \cdot \sin. \frac{p+q-a}{2} \sin. \frac{a+p-q}{2} \cdot \sin. \frac{a+q-p}{2}}$$

$$\times 2\sqrt{\sin. (x + \frac{1}{2}a) \sin. (x - \frac{1}{2}a) \sin. \frac{1}{2}a \sin. \frac{1}{2}a}$$

waarin $a = AB = 26^\circ 12' 5''$; $p = BC = 33^\circ 49' 30''$;

$$q = AC = 59^\circ 43' 10''; \frac{a+p+q}{2} = 59^\circ 52' 23'';$$

$$\frac{p+q-a}{2} = 33^\circ 40' 18''; \frac{a+p-q}{2} = 0^\circ 9' 13''$$

$$\text{en } \frac{a+q-p}{2} = 26^\circ 2' 53''. \text{ Stel, om te be-}$$

korten; $A =$

$$\sqrt{\sin. \frac{a+p+q}{2} \sin. \frac{p+q-a}{2} \sin. \frac{a+p-q}{2} \sin. \frac{a+q-p}{2}}$$

dan heeft men

$$\sin. a^2 \cos. x = (\cos. p + \cos. q)(1 - \cos. a) \cos. x +$$

$$4 \cdot A \sin. \frac{1}{2}a \sqrt{\sin. (x + \frac{1}{2}a) \sin. (x - \frac{1}{2}a)};$$

$$\text{maar } \sin. a = 2 \sin. \frac{1}{2}a \cos. \frac{1}{2}a; \sin. a^2 =$$

$$4 \sin. \frac{1}{2}a \cos. \frac{1}{2}a^2 \text{ en } 1 - \cos. a = 2 \sin. \frac{1}{2}a^2; \text{ dus}$$

$$2 \sin. \frac{1}{2}a \cos. \frac{1}{2}a^2 \cos. x = (\cos. p + \cos. q) \sin. \frac{1}{2}a \cos. x$$

$$\dots + 2A \sqrt{\sin. (x + \frac{1}{2}a) \sin. (x - \frac{1}{2}a)}.$$

$$\text{maar } \sin. (x + \frac{1}{2}a) \sin. (x - \frac{1}{2}a) = \cos. \frac{1}{2}a^2 - \cos. x^2, \text{ en}$$

$$\cos. p + \cos. q = 2 \cos. \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q), \text{ dus}$$

$$\sin. \frac{1}{2}a (\cos. \frac{1}{2}a^2 - \cos. \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q)) \cos. x =$$

$$A \sqrt{(\cos. \frac{1}{2}a^2 - \cos. x^2)}$$

en hiervan de tweede magt nemende:

$$\sin. \frac{1}{2}a^2 (\cos. \frac{1}{2}a^2 - \cos. \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q))^2 \cos. x^2$$

$$= A^2 \cos. \frac{1}{2}a^2 - A^2 \cos. x^2.$$

waaruit volgt:

$$\cos. x = \frac{A \cos. \frac{1}{2}a}{\sqrt{(A^2 + (\cos. \frac{1}{2}a^2 - \cos. \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q))^2 \sin. \frac{1}{2}a^2)}}$$

Deze vergelijking geeft $x = 70^\circ 6' 20''$; dus is de zonsdeclinatie $19^\circ 53' 40''$, waarvan men den dag door de astronomische tafelen vindt den 19 Mei te zijn.

Ver-

Verder is van den regthoekigen driehoek AGB,
 $\text{Cos. } \angle \text{ABG} = \text{Tang. BG. Cos. AB}$
 en van den gelijkbeenigen driehoek ABP

$$\text{Cos. } \angle \text{ABP} = \text{Cot. AP. Tang. } \frac{1}{2} \text{AB}$$

Hierdoor vindt men $\angle \text{ABG} = 66^{\circ} 46' 30''$ en
 $\angle \text{ABP} = 85^{\circ} 10'$; dus $\angle \text{TBP} = \angle \text{ABP} -$
 $\angle \text{ABG} = 18^{\circ} 23' 30''$.

Trek in den driehoek BTP de loodlijn TF,
 dan is $\text{Tang. BF} = \text{Tang. TB. Cos. } \angle \text{TBP}$;
 voorts $\text{PF} = \text{PB} - \text{BF}$, en $\text{Cos. BF} : \text{Cos. PF} =$
 $\text{Cos. TB} : \text{Cos. TP}$; waardoor gevonden wordt
 $\text{TP} = 17^{\circ} 34' 25''$; dus is de poolshoogte $\text{PZ} =$
 $72^{\circ} 25' 35''$.

Eindelijk is in de driehoeken TPA, TPB en
 TPC,

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{TPA} = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} (\text{TP} + \text{PA} + \text{TA}) \text{Sin. } \frac{1}{2} (\text{TP} + \text{PA} - \text{TA})}{\text{Sin. TP. Sin. PA}}}$$

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{TPB} = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} (\text{TP} + \text{PB} + \text{TB}) \text{Sin. } \frac{1}{2} (\text{TP} + \text{PB} - \text{TB})}{\text{Sin. TP. Sin. PB}}}$$

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{TPC} = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} (\text{TP} + \text{PC} + \text{TC}) \text{Sin. } \frac{1}{2} (\text{TP} + \text{PC} - \text{TC})}{\text{Sin. TP. Sin. PC}}}$$

en hierdoor vindt men :

$$\angle \text{TPA} = 44^{\circ} 51' 50'' = 2^{\text{u}} 59^{\text{m}} 27^{\text{s}}$$

$$\angle \text{TPB} = 72^{\circ} 43' 20'' = 4^{\text{u}} 50^{\text{m}} 53^{\text{s}}$$

$$\angle \text{TPC} = 108^{\circ} 39' 0'' = 7^{\text{u}} 14^{\text{m}} 36^{\text{s}}$$

hetwelk de respective tijden zijn, op welke de
 zon is waargenomen in A, B en C.

Nº. 148. Door

ABRAHAM FOCK.

Verleng AB, AC en CB (Fig. 133) en neem
 $\text{AG} = \text{AD}$ en $\text{BH} = \text{BD}$; maak $\angle \text{AGI} = \angle \text{ADE}$
 en $\text{BHK} = \angle \text{BDF}$, waardoor de stukken AI,
 GI, BK en HK bekend zijn; verleng IG en maak

G g 3

GL =

$GL = HK$; trek CM evenwijdig aan GI en EN evenwijdig aan HK , dan kan men den driehoek CMN berekenen; want door de gelijkvormige driehoeken JGA en MCA vindt men MC en $\angle AMC$, zijnde het supplement van $\angle CMN$, welke dus ook bekend is. Eveneens vindt men door de gelijkvormige driehoeken KHB en NCB , de lijn CN en $\angle CNM$, waardoor dan de driehoek MNC bepaald is.

Door de beweging van den hoek CAD om het punt A , veranderen de lijnen AD en CAG van stelling; en komen in AD' en $C'AG'$, zoo dat de hoeken $D'AD$, $G'AG$ en $C'AC$ gelijk zijn: even zoo door de beweging van den hoek CBD , komen BD en CBH in de stelling van BD' en $C'BH'$, makende de gelijke hoeken $D'BD$, $H'BH$ en $C'BC$. Het nieuwe snijpunt D' der lijnen AD' en BD' valt, volgens het Voorstel, op de lijn EF ; de driehoeken $AD'D$ en $AG'G$ zijn gelijk en gelijkvormig; als mede de driehoeken $BD'D$ en $BH'H$; daarom $D'D = G'G$ en $D'D = H'H$; dus ook $G'G = H'H$, en $L'G = H'K$ om dat $LG = HK$ is.

Trek nu uit het nieuwe snijpunt C' , der lijnen AC' en BC' , de lijnen $C'M'$ en $C'N'$ evenwijdig aan CM en CN , dan is $\triangle C'N'M'$ gelijkvormig $\triangle CNM$, $\triangle BC'N'$ gelijkvormig $\triangle BKH'$ en $\triangle AC'M'$ gelijkvormig $\triangle AG'I$.

Neem nu BN' voor de abscis en $C'N'$ voor de ordinaat van het punt C' der kromme, door de beweging van het punt C ontstaande. Stel $BN' = x$, $C'N' = y$, $AB = m$, $AI = a$, $BK = c$, $IL = IG + HK = b$, $CN = d$, $CM = e$ en $MN = f$; dan heeft men:

$$BN' : C'N' = BK : H'K = \frac{cy}{x} = LG'$$

$$\text{en } LI = LG' = GI = b - \frac{cy}{x} = \frac{bx - cy}{x}$$

10

Voorts

$$\text{Voorts } CN : CM = C'N' : C'M' = \frac{cy}{d}$$

$$\text{en } CN : MN = C'N' : M'N' = \frac{fy}{d}$$

$$\text{daarom } AM' = AB - BN' - M'N = a - x - \frac{fy}{d}$$

$$\text{Eindelijk } AM' : C'M' = AI : IG$$

$$\text{of } a - x - \frac{fy}{d} : \frac{cy}{d} = a : \frac{bf - cy}{x}$$

$$\text{of } dm - dx - fy : cy = ax : bx - cy$$

waaruit volgt:

$$xfy + (dc - ac - bf)xy - bdx^2 - cdmx + bdmx = 0$$

waaruit blijkt dat deze kromme lijn tot de kegelsneden behoort, vermits hare vergelijking van den

tweeden graad is.

Wanneer men nu op AB (F) kelfsegment beschrijft, hetwelk gelijk aan het supplement van c gende hoeken CAD en CBD, teken, welk segment de lijn EF in D' snijdt; als dan het punt D, weging, langs EF in een der gekomen is, worden de lijnen AC' en BG' of AC' en BC' evenwijdig, en het snijpunt C valt. In dit geval is de kromme eene hyperbool, terwijl de lijnen AC' en BC, of AC' en BC', evenwijdig aan een der asymptoten van de kromme zijn. Indien het beschrevene segment de lijn EF slechts raakt, worden de lijnen AC en BC slechts eens evenwijdig, en alsdan is de kromme eene parabool; doch indien dit segment de lijn EF noch raakt, noch snijdt, blijft er altijd een snijpunt der lijnen AC en BC bestaan, en in dit geval is de kromme een Ellips.

N^o. 149. Door*R. Labatto.*

Laat ABCD (*Fig. 135*) de cilindre en ADE de kegel zijn, dan zal de hoogte EI van den kegel gelijk driemaal de hoogte FI van den cilindre moeten zijn, om gelijke inhouden te hebben. Men stelde dan AB, of den middellijn van het grondvlak der beide lichamen $= 2r$, de hoogten FI $= h$ en EI $= 3h$; dan is de omtrek van het grondvlak $= 2r\pi$, de inhoud van het grondvlak $= r^2\pi$, twee zulke grondvlakken $= 2r^2\pi$, de ronde oppervlakte van den cilindre $= 2r \cdot 2\pi h$, dus de geheele oppervlakte van den cilindre $= 2r(r + h)\pi$. De zijde van den kegel is AE $= \sqrt{AI^2 + EI^2} = \sqrt{r^2 + 9h^2}$, dus de ronde oppervlakte van denzelfden $= r\pi\sqrt{r^2 + 9h^2}$ en de geheele oppervlakte $= r^2\pi + r\pi\sqrt{r^2 + 9h^2}$, en deze gelijk gesteld aan de geheele oppervlakte des cilindres, geeft:

$$2r(r + h)\pi = r^2\pi + r\pi\sqrt{r^2 + 9h^2}$$

$$\text{of } 2r^2 + 2rh = r^2 + r\sqrt{r^2 + 9h^2}$$

$$\text{of } 2r + 2h = r + \sqrt{r^2 + 9h^2}$$

$$\text{of } r + 2h = \sqrt{r^2 + 9h^2}$$

$$\text{of } r^2 + 4rh + 4h^2 = r^2 + 9h^2$$

$$\text{of } 4rh = 5h^2 \text{ en } 4r = 5h$$

waaruit volgt, dat AB $= 2r$ nemende, FI $= h = \frac{4}{5}r$ en EI $= 3h = 2\frac{2}{5}r$ genomen zal moeten worden, om aan den eisch van het Voorstel te voldoen.

N^o. 150. Door

C. Lants Jr., R. Lobatto, en N. Bondt.

Laten de getallen zijn x, y, z, u en v , en stel derzelve som $= f$, dan is uit het opgegevene

$$\begin{aligned} 2x &= f - x, 3y = f - y, 4z = f - z, 5u = f - u \\ \text{dus } 3x &= f, 4y = f, 5z = f, 6u = f \\ \text{dus } x &= \frac{1}{3}f, y = \frac{1}{4}f, z = \frac{1}{5}f, u = \frac{1}{6}f \\ \text{dus } x + y + z + u + v &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)f + v = f \\ \text{waaruit volgt } v &= \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)f = \frac{1}{20}f \end{aligned}$$

Daar nu het product der getallen gelijk een gegeven getal a zijn moet, zoo heeft men

$$xyzuv = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 20} f^5 = a$$

dus $f^5 = 2^5 \cdot 225 a$ en $f = 2 \sqrt[5]{225 a}$; derhalve zijn de getallen: $x = \frac{1}{3} f = \frac{2}{3} \sqrt[5]{225 a}$,
 $y = \frac{1}{4} f = \frac{1}{2} \sqrt[5]{225 a}$, $z = \frac{1}{5} f = \frac{2}{5} \sqrt[5]{225 a}$,
 $u = \frac{1}{6} f = \frac{1}{3} \sqrt[5]{225 a}$ en $v = \frac{1}{20} f = \frac{1}{10} \sqrt[5]{225 a}$.

N^o. 151. Door

N. Bondt, en R. Lobatto.

Stel het eerste px , het tweede qx , en het derde $a - px - qx$; dan moet $pqx^2(a - px - qx)$ of $ax^3 - px^3 - qx^3$ een maximum zijn, derhalve

$$2ax^2 - 3px^2 - 3qx^2 = 0$$

en alles door x^2 deelende,

$$2a - 3px - 3qx = 0$$

$$\text{dus } x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{p+q}, px = \frac{2}{3} \cdot \frac{ap}{p+q}, qx = \frac{2}{3} \cdot \frac{aq}{p+q}$$

$$\text{en } a - px - qx = a - \frac{2}{3} \frac{ap + aq}{p+q} = a - \frac{2}{3} a = \frac{1}{3} a.$$

J. A. Buin, en M. J. ZUIDHOF.

Volgens den regel van den Heer O. S. BANGMA, te vinden in het eerste Deel der Verhandelingen, van de eerste klasse van het Hollandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, kan de breedte op de volgende wijze berekend worden:

Eerste waarneming ten 11^u 0'

Tweede waarneming ten 12 . 9

Verloopene tijd . . . 1 . 9 = 17° 15'

2

8° 37' 30"

1 Verloopene tijd 8° 37' 30" Log. Sin. 9.17599

Zuider-Declinatie 4° 13' 0" Log. Cos. 9.99882

Som = 9.17481

is Log. Sin. $\frac{1}{2}r = 8° 36' . .$ Log. Sec. 0.00491

2

Getal B = 0.00982

58° 53 Zonshoogten 65° 25'

90 . 0

90 . 9

31 . 7

24 . 35

2

2

15 . 33 . 30

12 . 17 . 30

12 . 17 . 30

Som 27 . 51 Log. Cos. 9.94654

Ver. 3 . 16 Log. Cos. 9.99929

Decl. 4 . 13 Log. Sin. 8.86645

Get. B. 0.00982

Som 28.82210

af 25.

3.82210 Log. 6639 Get. D

27°

$$\begin{array}{r}
 27^{\circ} 51' \\
 8 \cdot 36 \\
 3 \cdot 16 \\
 \hline
 36 \cdot 27 \text{ Log. Sin. } 9.77387 \\
 19 \cdot 15 \text{ Log. Sin. } 9.51811 \\
 11 \cdot 52 \text{ Log. Sin. } 9.31310 \\
 5 \cdot 20 \text{ Log. Sin. } 8.96825 \\
 \hline
 \text{Som } 37.57333 \\
 2 \quad \hline
 18.78666 \\
 \text{Log. Cot. } \frac{1}{2} \text{ Verl. Tijd } 10.81907 \\
 \text{Get. B. } 0.00982 \\
 \hline
 \text{Som } 29.61555 \\
 \text{af } 25. \\
 \hline
 4.61555 \text{ Log. } 41262 \text{ Get. W} \\
 W + D = 47901 \text{ N. Sin.} \\
 \text{van } 28^{\circ} 37' \text{ , Zuider breedte.}
 \end{array}$$

AANMERKING. Als men D van W aftrekt, verkrijgt men $W - D = 34623$; dit in de *Nat. Sinus* opzoekende, komt, volgens den regel in het hoofd dezer oplossing vermeld, $20^{\circ} 15'$ Noorder breedte, op welke dezelfde hoogten, met een gelijk verloop in tijd, zouden kunnen worden waargenomen.

N^o. 153. Door

U. HUGUENIN.

De voorgestelde differentiaal $\frac{\delta x}{\delta x}$ is in de algemeenere

$$\frac{(a + bx^3)^6 \sqrt{(a + 2bx^3)}}{\delta x}$$

uitdrukking $\frac{(a + bx^n)^{2n} \sqrt{(a + 2bx^n)}}{\delta x}$ begrepen,

van

van welke de Heer EULER zegt (*Nova Acta Petrop.* T. IX), dat zij tot eenen rationalen vorm kan gebragt worden, als men daarin

$s = \sqrt[2n]{(a + 2bx^n)}$ en $x = st$ stelt; daar echter deze laatste differentiaal in de nog algemeenere

$$\frac{dx}{x} \cdot \frac{(a + bx^n)^{mn}}{(a + bx^n)^{m-1} + m a^{m-1} b x^n + \dots + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-3} b^2 x^{2n} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-4} b^3 x^{3n} + \dots + m b^{m-1} x^{(m-1)n}}$$

vervat is (waarin de coëfficiënten met die der binomische formule overeenkomen), zoo zullen wij deze laatste uitdrukking trachten rationaal te maken. Wij stellen tot dat einde

$$\sqrt[2n]{(a^{m-1} + m a^{m-2} b x^n + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-3} b^2 x^{2n} + \dots + m b^{m-1} x^{(m-1)n})} = s,$$

$$\dots + m b^{m-1} x^{(m-1)n}) = s, \text{ waardoor}$$

$$s^{2n} = a^{m-1} + m a^{m-2} b x^n + \dots + m b^{m-1} x^{(m-1)n}$$

$$\text{en } a s^{2n} + b^n x^{2n} = a^m + m a^{m-1} b x^n +$$

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 x^{2n} + \dots + m a b^{m-1} x^{(m-1)n}$$

$$\dots + b^n x^{2n} = (a + b x^n)^m$$

$$\text{dus } s^{2n} = \frac{(a + b x^n)^m - b^n x^{2n}}{a}$$

$$\text{en } s = \left[\frac{(a + b x^n)^m - b^n x^{2n}}{a} \right]^{\frac{1}{2n}}$$

Hierdoor verandert onze differentiaal in

$$\frac{dx}{x} \cdot \frac{(a + b x^n) \left[\frac{(a + b x^n)^m - b^n x^{2n}}{a} \right]^{\frac{1}{2n}}}{\left[\frac{(a + b x^n)^m - b^n x^{2n}}{a} \right]^{\frac{1}{2n}}}$$

$$\text{Zij nu } x = st, \text{ zoo is } t = \frac{x}{s} = \dots$$

x

$$\dots \frac{x}{\left[\frac{(a + bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a} \right]^{\frac{1}{mn}}} = \dots$$

$$\dots \frac{1}{a^{\frac{1}{mn}} x}$$

waarvan de differentiaal is,

$$\delta t = a^{\frac{1}{mn}} \left[\frac{1}{[(a + bx^n)^m - b^m x^{mn}]^{\frac{1}{mn}}} - \dots \right]$$

$$\dots \frac{(a + bx^n)^{m-1} b x^n - b^m x^{mn}}{[(a + bx^n)^m - b^m x^{mn}]^{\frac{1}{mn}}} \delta x \dots$$

$$= a^{\frac{1}{mn}} \frac{[(a + bx^n)^m - b^m x^{mn}]^{1 + \frac{1}{mn}}}{\frac{1}{mn} [(a + bx^n)^m - (a + bx^n)^{m-1} b x^n] \delta x}$$

$$\dots = \frac{(a + bx^n)^{m-1} \delta x}{\left[\frac{(a + bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a} \right]^{\frac{mn+1}{mn}}}$$

Derhalve is

$$\delta x = \frac{\delta t \left[\frac{(a + bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a} \right]^{\frac{mn+1}{mn}}}{(a + bx^n)^{m-1}}$$

en als men deze waarde van δx in onze differentiaal substitueert, verandert dezelve in

$$\frac{\delta t \left[\frac{(a + bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a} \right]}{(a + bx^n)^m} = \frac{s^{mn} \delta t}{(a + bx^n)^m}$$

$$\text{maar } s^{mn} = \frac{x^{mn}}{t^{mn}} = \frac{(a + bx^n)^m - b^m x^{mn}}{a}$$

dus

$$\text{dus } (a + bx^n)^m = \frac{ax^{mn}}{t^{mn}} + b^m x^{mn} = \\ \frac{x^{mn}(a + b^m t^{mn})}{t^{mn}} = s^{mn}(a + b^m t^{mn})$$

en als men deze waarde in onze differentiaal sub-
stitueert, heeft men $\frac{\partial x}{a + b^m t^{mn}}$, eene differen-
taal-uitdrukking, welke in alle gevallen kan wor-
den geïntegreerd, als m en n in geheele positieve
gevallen gegeven zijn.

Daar nu onder het wortelteeken zoo vele leden
voorkomen, als m eenheden bevat, zoo verandert
deze differentiaal voor $m = 2$, in

$$\frac{\partial x}{(a + bx^n)^{2n}} = \frac{\partial t}{a + b^2 t^{2n}}$$

Stelt men voorts $n = 3$, zoo blijkt, dat
onze voorgestelde differentiaal

$$\dots \frac{\partial x}{(a + bx^3)^6} = \frac{\partial t}{a + b^2 t^6} \dots \\ \dots = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial t}{1 + \frac{b^2}{a} t^6} \text{ zijn zal, en als men } y^6 =$$

$$\frac{b^2}{a} t^6 \text{ stelt, wordt } y = t \sqrt[6]{\frac{b^2}{a}}, \partial t = \partial y \sqrt[6]{\frac{a}{b^2}} \text{ en} \\ \frac{\partial t}{a + b^2 t^6} = \frac{1}{a} \sqrt[6]{\frac{a}{b^2}} \cdot \frac{\partial y}{1 + y^6} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5 b^2}} \cdot \frac{\partial y}{1 + y^6}.$$

In verscheidene Wiskundige Werken wordt be-
wezen, als π den halven omtrek voor den radius
een beteekent, (zie J. DE GELDER, *Wiskun-
dige Lesfen*, 2^{de} Cursus, pag. 379), dat

$$1 + y^6 = (y^2 - 2y \cos. \frac{\pi}{6} + 1) \times (y^2 - 2y \cos. \frac{3\pi}{6} + 1) \\ \times (y^2 -$$

$\times (y^2 - 2y \cos \frac{5\pi}{6} + 1)$ is. Daar nu $\cos \frac{\pi}{6} =$

$\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$; $\cos \frac{3\pi}{6} = \cos 90^\circ = 0$ en

$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$

is, zoo is $1 + y^6 =$

$$(y^2 - y\sqrt{3} + 1)(y^2 + 1)(y^2 + y\sqrt{3} + 1)$$

en als men de breuk $\frac{1}{y^6 + 1}$ op de bekende wijze

in drie andere breuken ontbindt, welke deze factoren tot noemer hebben, vindt men

$$\frac{\frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}}{y^2 + y\sqrt{3} + 1}; \frac{\left(\frac{y}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right)}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} \text{ en } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y^2 + 1}$$

derhalve is $\frac{\partial y}{y^6 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{y \partial y}{y^2 + y\sqrt{3} + 1}$

$$- \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{y \partial y}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y \partial y}{y^2 + 1}$$

$$\dots + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial y}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial y}{y^2 + 1}.$$

$$\text{Maar } \int \frac{y \partial y}{y^2 + y\sqrt{3} + 1} = \frac{1}{2} \text{Log} \cdot (y^2 + y\sqrt{3} + 1)$$

$$- \sqrt{3} \cdot \text{Arc} \cdot \text{Tang} \cdot (2y + \sqrt{3})$$

$$\int \frac{y \partial y}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} = \frac{1}{2} \text{Log} \cdot (y^2 - y\sqrt{3} + 1)$$

$$- \sqrt{3} \cdot \text{Arc} \cdot \text{Tang} \cdot (2y - \sqrt{3})$$

$$\int \frac{\partial y}{y^2 + y\sqrt{3} + 1} = 2 \text{Arc} \cdot \text{Tang} \cdot (2y + \sqrt{3})$$

$$\int \frac{\partial y}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} = 2 \text{Arc} \cdot \text{Tang} \cdot (2y - \sqrt{3})$$

en

$$\text{en } \int \frac{\delta y}{y^2 + 1} = \text{Arc. Tang. } y$$

(Zie VEGA, *Vorlesungen über die Mathematik*, 2^{er} band, § 727). Gevolgelyk

$$\int \frac{\delta y}{y^6 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{Log.}(y^2 + y\sqrt{3} + 1) \dots$$

$$- \frac{1}{4\sqrt{3}} \text{Log.}(y^2 - y\sqrt{3} + 1) - \frac{1}{2} \text{Arc. Tang.}(2y + \sqrt{3})$$

$$+ \frac{1}{2} \text{Arc. Tang.}(2y - \sqrt{3}) + \frac{2}{3} \text{Arc. Tang.}(2y + \sqrt{3})$$

$$+ \frac{2}{3} \text{Arc. Tang.}(2y - \sqrt{3}) + \frac{1}{3} \text{Arc. Tang. } y \dots$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \text{Log.} \frac{y^2 + y\sqrt{3} + 1}{y^2 - y\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{6} \text{Arc. Tang.}(2y + \sqrt{3})$$

$$+ \frac{5}{6} \text{Arc. Tang.}(2y - \sqrt{3}) + \frac{1}{3} \text{Arc. Tang. } y$$

$$\text{Daar eindelijk } y = t \sqrt[6]{\frac{b^2}{a}}, \quad t = \frac{x}{\sqrt[6]{a + 2bx^3}} \text{ en}$$

$$\text{dus } y = \frac{x \sqrt[6]{\frac{b^2}{a}}}{\sqrt[6]{a + 2bx^3}} = \frac{x}{\sqrt[6]{\frac{a}{b^2} (a + 2bx^3)}} \text{ is,}$$

zoo heeft men:

$$\int \frac{\delta x}{(a + bx^3) \sqrt[6]{a + 2bx^3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5 b^2}} \int \frac{\delta y}{y^6 + 1} =$$

$$\frac{\sqrt[6]{3}}{12\sqrt[6]{a^5 b^2}} \text{Log.} \frac{x^2 + x\sqrt[6]{3} \sqrt[6]{\frac{a}{b^2} (a + 2bx^3)} + \sqrt[6]{\frac{a}{b^2} (a + 2bx^3)}}{x^2 - x\sqrt[6]{3} \sqrt[6]{\frac{a}{b^2} (a + 2bx^3)} + \sqrt[6]{\frac{a}{b^2} (a + 2bx^3)}}$$

$$+ \frac{1}{6\sqrt[6]{a^5 b^2}} \text{Arc. Tang.} \left(\frac{\frac{2x}{\sqrt[6]{\frac{a}{b^2} (a + 2bx^3)}}}{\sqrt[6]{\frac{a}{b^2} (a + 2bx^3)}} + \sqrt[6]{3} \right)$$

+

$$\begin{aligned}
 & + \frac{5}{6 \sqrt{a^5 b^2}} \text{Arc. Tang.} \left(\frac{\frac{2x}{\sqrt{\frac{a}{b^2}} (a + 2bx^3)} - \sqrt{3}}{\sqrt{\frac{a}{b^2}} (a + 2bx^3)} \right) \\
 & + \frac{1}{3 \sqrt{a^5 b^2}} \text{Arc. Tang.} \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b^2}} (a + 2bx^3)} \right)
 \end{aligned}$$

N°. 154. Door

U. HUGURNIN, en J. R. Schmidt.

Het is zichtbaar, dat de voorgestelde differentiaal-vergelijking $\delta y + ay \delta \phi = b \text{Cos. } \phi \delta \phi$, waarin a en b standvastige grootheden zijn, niet onmiddellijk kan worden geïntegreerd. Het tweede gedeelte dezer vergelijking kan op zich zelf geïntegreerd worden, hetwelk echter geen plaats heeft ten aanzien van het eerste gedeelte derzelve, waarin de beide veranderlijke grootheden, y en ϕ , of liever, hare differentiaalën voorkomen; doch het is mogelijk, dat dit gedeelte integrabel wordt, als men hetzelfde met eene, daartoe dienende functie multiplicceert; doch, daar als dan ook het tweede gedeelte met dezelfde functie gemultipliceerd moet worden, ten einde de gelijkheid tuschen de beide deelen te behouden, zoo mag in deze functie geene andere veranderlijke grootheid dan ϕ voorkomen: wijl anders het tweede gedeelte der vergelijking geenen integreerbaren vorm zoude behouden. Stelt men nu, dat $(f\phi)$ eene zoodanige functie van ϕ zij, zoo is het noodig, dezelve zoodanig te bepalen, dat het eerste en tweede gedeelte der vergelijking:

$$(f\phi) \delta y + ay (f\phi) \delta \phi = b (f\phi) \text{Cos. } \phi \delta \phi$$

ieder bijzonder kunnen worden geïntegreerd.

Hh

Ten

480 ONTBINDINGEN VAN DE

Ten einde eene zoodanige functie, voor deze en andere dergelijke vergelijkingen te verkrijgen, zullen wij onze nasporingen op de meer algemeene vergelijking

$$\delta y + y P \delta x = - y^n Q \delta x$$

$$\text{of } \delta y + y P \delta x + y^n Q \delta x = 0$$

in het werk stellen, in welke vergelijking P en Q functiën van de veranderlijke grootheid x , met of zonder standvastige grootheden, beteekenen. (*)

Men deele deze vergelijking door y^n , zoo heeft men

$$\frac{\delta y}{y^n} + \frac{P \delta x}{y^{n-1}} + Q \delta x = 0$$

waarin het laatste lid $Q \delta x$ alleen de veranderlijke grootheid x onthoudt; voorts stelde men dat (fx) eene zoodanige functie van x beteekent, met welke de vergelijking gemultipliceerd zijnde, dezelve den integreerbaren vorm:

$$\frac{(fx) \delta y}{y^n} + \frac{(fx) P \delta x}{y^{n-1}} + (fx) Q \delta x = 0$$

verkrijgt; in dier voege, dat de beide eerste leden te zamen de differentiaal van een product van twee verschillende functiën uitmaken, en het laatste lid $(fx) Q \delta x$, hetwelk geen andere veranderlijke grootheid, dan x bevat, op zich zelf geïntegreerd kan worden.

$$\text{Om nu de beide eerste leden } \frac{(fx) \delta y}{y^n} + \frac{(fx) P \delta x}{y^{n-1}}$$

te integreren, vergelijke men dezelve met de differentiaal van het product XY , namelijk met $\delta(XY) = X \delta Y + Y \delta X$, waarin X en Y functiën van de veranderlijke grootheden x en y zijn,

200

(*) Het is alleen voor minder geoefenden, dat ik de ontwikkeling van deze, anderszins niet onbekende kunstgreep der integraalrekening, hier bijgevoegd heb.

zoo is het terstond zichtbaar, dat, doordien

$$X \int (\partial Y) = Y \int (\partial X) = XY \text{ is, } (fx) \int \frac{\partial y}{y^n} =$$

$$y^{-(n-1)} \int (fx) P \partial x \text{ moet zijn; maar alzoo}$$

$$\int \frac{dy}{y^n} = \frac{y^{-(n-1)}}{-(n-1)} \text{ is, moet } \frac{(fx) y^{-(n-1)}}{-(n-1)} =$$

$$y^{-(n-1)} \int (fx) P \partial x, \text{ of } \frac{(fx)}{-(n-1)} = \int (fx) P \partial x$$

zijn; en als men deze vergelijking differentieert,

$$\text{heeft men } \frac{\partial (fx)}{-(n-1)} = (fx) P \partial x, \text{ of } \frac{\partial (fx)}{(fx)} =$$

$$-(n-1) P \partial x, \text{ waarvan de integraal is:}$$

$$\text{Log.}(fx) = -(n-1) \int P \partial x; \text{ neemt men}$$

verder aan, dat e het grondgetal der Hyperbolische logaritmen is, zoo is $1 = \text{Log.} e$ en

$$\text{Log.}(fx) = -(n-1) \int P \partial x. \text{ Log.} e =$$

$$\text{Log.} e = -(n-1) \int P \partial x; \text{ derhalve moet}$$

$$(fx) = e^{-(n-1) \int P \partial x} \text{ zijn, in welke uit-}$$

drukking de integraal van $P \partial x$ voor de meeste

gevallen kan worden gevonden, wñ P eene func-

tie van x is.

Substitueert men nu deze waarde van (fx) in

onze algemeene vergelijking, zoo heeft men:

$$\frac{e^{-(n-1) \int P \partial x} \cdot \partial y}{y^n} + \frac{e^{-(n-1) \int P \partial x} \cdot P \partial x}{y^{n-1}}$$

$$+ \frac{e^{-(n-1) \int P \partial x} \cdot Q \partial x}{y^{n-1}} = 0; \text{ waarvan de}$$

integraal is:

$$\frac{e^{-(n-1) \int P \partial x} \cdot y^{-(n-1)}}{-(n-1)} + \int e^{-(n-1) \int P \partial x} \cdot Q \partial x = 0$$

$$\text{of } \frac{1}{e^{(n-1) \int P \partial x} \cdot y^{(n-1)}} - (n-1) \int e^{-(n-1) \int P \partial x} \cdot Q \partial x = 0$$

$$\text{H h 2} \quad \text{het-}$$

hetwelk overeenkomt met de formule, die de Heer VEGA, in het 2^{de} Deel zijner *Vorlesungen über die Mathematik*, pag. 612, zonder bewijs gegeven heeft.

Om nu eene toepassing van deze formule op onze vergelijking $\delta y + a y \delta \phi - b \cos. \phi \delta \phi = 0$ te maken, heeft men $n=0$, $Q \delta x = -b \cos. \phi \delta \phi$, $P \delta x = a \delta \phi$ en $\int P \delta x = a \phi$; derhalve is de integraal van de voorgestelde vergelijking:

$$\frac{1}{e^{-a\phi} \cdot y} + \int e^{a\phi} x - b \cos. \phi \delta \phi = 0$$

$$\text{of } e^{a\phi} \cdot y - b \int e^{a\phi} \cdot \cos. \phi \delta \phi = 0$$

$$\text{of wel } e^{a\phi} \cdot y = b \int e^{a\phi} \cdot \cos. \phi \delta \phi$$

waarvan nog het tweede gedeelte moet worden geïntegreerd.

Laat ons tot dit einde $e^{a\phi} \cdot \sin. \phi$ differentieren, zoo bekomt men:

$$\delta e^{a\phi} \cdot \sin. \phi = e^{a\phi} \cdot \cos. \phi \delta \phi + a e^{a\phi} \sin. \phi \delta \phi$$

en als men $e^{a\phi} \cdot \cos. \phi$ differentieert, vindt men

$$\delta e^{a\phi} \cos. \phi = a e^{a\phi} \cdot \cos. \phi \delta \phi - e^{a\phi} \cdot \sin. \phi \delta \phi$$

men multiplicere voorts deze differentiaal met a en addere dit product bij de eerste differentiaal, zoo ontstaat hieruit de som:

$$\delta e^{a\phi} \cdot \sin. \phi + a \delta e^{a\phi} \cdot \cos. \phi = (1 + a^2) e^{a\phi} \cdot \cos. \phi \delta \phi$$

waarvan de integraal is:

$$e^{a\phi} \sin. \phi + a e^{a\phi} \cdot \cos. \phi = (1 + a^2) \int e^{a\phi} \cos. \phi \delta \phi$$

$$\text{dus } \int e^{a\phi} \cdot \cos. \phi \delta \phi = \frac{e^{a\phi} (\sin. \phi + a \cos. \phi)}{1 + a^2}$$

en

en als men deze waarde in de gevondene integraal substitueert, heeft men

$$e^{a\varphi} \cdot y = \frac{b(\sin \cdot \varphi + a \cos \cdot \varphi)e^{a\varphi}}{1+a^2} + C$$

waarin de standvastige grootheid C, uit de eigenschappen van het Voorstel, waaruit de differentiaal-vergelijking is afgeleid, moet worden bepaald.

N^o. 155. Door

U. HUGUENIN, en J. R. Schmidt.

De voorgestelde vergelijking $\delta y - x^2 \delta y + y \delta x - b y^2 \delta x + b y^2 x^2 \delta x = 0$ laat zich door de in het laatst voorgaande Voorstel ontwikkelde formule integreren; want zoo men dezelve door $1 - x^2$ deelt, bekomt men de vergelijking

$$\delta y + y \cdot \frac{\delta x}{1 - x^2} - y^2 b \delta x = 0$$

$$\text{of } \frac{\delta y}{y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\delta x}{1 - x^2} - b \delta x = 0$$

Vergelijkt men nu deze vergelijking met onze algemeene formule van het laatst voorgaande Voorstel, zoo is hier $n = 2$, $Q \delta x = -b \delta x$ en $P \delta x = \frac{\delta x}{1 - x^2}$; derhalve

$$\int P \delta x = \int \frac{\delta x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\delta x}{1 - x} + \frac{\delta x}{1 + x} \right)$$

$$\dots = \frac{1}{2} \text{Log} \cdot \frac{1+x}{1-x} = \text{Log} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\text{en } e^{(n-1) \int P \delta x} = e^{\text{Log} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} :$$

Hh 3

want

want zoo men $e^{\text{Log} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = s$ stelt, is

$$\text{Log} \cdot e^{\text{Log} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \text{Log} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \text{Log} \cdot e =$$

$$\text{Log} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \text{Log} \cdot s; \text{ derhalve } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = s.$$

Substitueert men deze waarde in de voornoemde formule, zoo bekomt men de integraal

$$\frac{1}{y \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} + b \int \frac{\delta x}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \dots$$

$$\dots \frac{\sqrt{(1-x)}}{y \sqrt{(1+x)}} + b \int \frac{\delta x \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}}.$$

$$\text{Maar } \frac{\delta x \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}} = \frac{(1-x) \delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} -$$

$$\frac{x \delta x}{\sqrt{(1-x^2)}}; \int \frac{\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. Tang.} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\text{en } \int \frac{-x \delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \sqrt{(1-x^2)}, \text{ derhalve is de ge-}$$

$$\text{zochte integraal } \frac{\sqrt{(1-x)}}{y \sqrt{(1+x)}} + b \sqrt{(1-x^2)},$$

$$+ b \text{ Arc. Tang.} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} = C; \text{ of } \frac{1-x}{y \sqrt{(1-x^2)}} +$$

$$b \sqrt{(1-x^2)} + b \text{ Arc. Tang.} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} = C,$$

in welke de standvastige grootheid C uit de omstandigheden van het Voorstel moet worden opgemaakt.

N^o. 156. Door

U. HUGUENIN, en J. A. SCHMIDT.

De differentiaal-vergelijking $\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\sin \varphi^2 \partial y}{\partial x} + \frac{a \partial \varphi}{y} - ab \partial \varphi + ab \sin \varphi^2 \partial \varphi = ab \sin \varphi \cos \varphi \partial \varphi - 2b \cos \varphi \sin \varphi^2 \partial \varphi$, laat zich tot den vorm $(1 - \sin \varphi^2) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a \partial \varphi}{y} - ab(1 - \sin \varphi^2) \partial \varphi =$

$2b \sin \varphi \cos \varphi (1 - \sin \varphi^2) \partial \varphi$, of $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a \partial \varphi}{y \cos \varphi^2} - ab \partial \varphi = 2b \sin \varphi \cos \varphi \partial \varphi$

brengen, waardoor men heeft $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a \partial \varphi}{y \cos \varphi^2} - b(a + 2 \sin \varphi \cos \varphi) \partial \varphi = 0$, eene vergelijking, die met de algemeene formule van Voorstel 154 de noodige overeenstemming heeft, om volgens dezelve geïntegreerd te worden.

Tot dit einde is hier $n=2$, $\int P \partial x = a \int \frac{\partial \varphi}{\cos \varphi^2} = a \text{Tang} \cdot \varphi$, en $(f x) = e^{-a \text{Tang} \cdot \varphi}$; diensvolgens wordt de integraal $\frac{1}{e^{-a \text{Tang} \cdot \varphi}} +$

$b \int e^{-a \text{Tang} \cdot \varphi} \cdot (a + 2 \sin \varphi \cos \varphi) \partial \varphi = C$.

Om te onderzoeken, of het tweede lid zich volkomen integreren laat, zoo differentieere men de grootheid $e^{-a \text{Tang} \cdot \varphi} \cdot x$; hierdoor verkrijgt

men $\delta(e^{-a \text{Tang. } \phi} \cdot x) = e^{-a \text{Tang. } \phi} \left(-\frac{ax \delta \phi}{\text{Cos } \phi^2} + \delta x \right)$

derhalve moet x zoodanig worden aangenomen,

dat $\frac{-ax \delta \phi}{\text{Cos. } \phi^2} + \delta x = a \delta \phi + 2 \text{Sin. } \phi \text{ Cos. } \phi \delta \phi$

zij, en dit heeft plaats, als men $x = -\text{Cos. } \phi^2$

stelt, wijl hierdoor $\frac{-ax \delta \phi}{\text{Cos. } \phi^2} = a \delta \phi$, en $\delta x =$

$2 \text{Sin. } \phi \text{ Cos. } \phi \delta \phi$ is. Hieruit volgt

$$\int e^{-a \text{Tang. } \phi} (a + 2 \text{Sin. } \phi \text{ Cos. } \phi) \delta \phi =$$

$$e^{-a \text{Tang. } \phi} \cdot \text{Cos. } \phi^2$$

en de integraal is:

$$\frac{1}{e^{a \text{Tang. } \phi} \cdot y} = b e^{-a \text{Tang. } \phi} \cdot \text{Cos. } \phi^2 = C$$

$$\text{of } 1 = b y \text{Cos. } \phi^2 = C y e^{a \text{Tang. } \phi}$$

waaruit zich de waarde

$$y = \frac{1}{b \text{Cos. } \phi^2 + C e^{a \text{Tang. } \phi}}$$

laat afleiden.

Nº: 157. Door

U. HUGUENIN, en J. R. Schmidt.

Om de differentiaal-vergelijking van de tweede
 orde, $\text{Cos. } m \phi (\text{Sin. } m \phi)^n \delta \delta \phi + m n (\text{Cos. } m \phi)^2 \times$
 $(\text{Sin. } m \phi)^{n-1} \delta \phi^2 - m (\text{Sin. } m \phi)^{n+1} \delta \phi^2 + \dots$
 $a \text{Cos. } m \phi (\text{Sin. } m \phi)^n \delta \phi \delta x + b (\text{Cos. } m \phi)^2 \times \dots$
(Sin

$(\text{Sin. } m\phi)^{2n} \delta\phi^2 = 0$ te integreren, als δx standvastig is, stelde men:

$$\text{Cos. } m\phi (\text{Sin. } m\phi)^n \delta\phi = z \delta x, \text{ zoo is}$$

$$b (\text{Cos. } m\phi)^2 (\text{Sin. } m\phi)^{2n} \delta\phi^2 = b z^2 \delta x^2, \text{ en}$$

$$\delta \text{Cos. } m\phi (\text{Sin. } m\phi)^n \delta\phi = \text{Cos. } m\phi (\text{Sin. } m\phi)^n \delta\delta\phi + mn (\text{Cos. } m\phi)^2 (\text{Sin. } m\phi)^{n-1} \delta\phi^2 - m \text{Sin. } (m\phi)^{n+1} \delta\phi^2 = \delta z \cdot \delta x, \text{ wijl } \delta x \text{ als standvastig aangenomen is.}$$

Substitueert men deze waarden in de vergelijking, zoo heeft men:

$$\delta z \cdot \delta x + a z \delta x^2 + b z^2 \delta x^2 = 0$$

$$\text{of } \delta z + a z \delta x + b z^2 \delta x = 0$$

Deze vergelijking kan door de algemeene formule van Voorstel 154 geïntegreerd worden; doch men kan de integraal ook zonder dezelve vinden; want door de vergelijking heeft men

$$-\delta x = \frac{\delta z}{a z + b z^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{\delta z}{z} - \frac{b \delta z}{a + b z} \right) \dots$$

$$\dots = \frac{1}{a} \left(\frac{\delta z}{z} - \frac{\frac{b}{a} \delta z}{1 + \frac{b}{a} z} \right); \text{ en als men}$$

deze vergelijking integreert, vindt men:

$$-x = \frac{1}{a} [\text{Log. } z - \text{Log. } (1 + \frac{b}{a} z) + \text{Log. } C]$$

$$\dots = \frac{1}{a} [\text{Log. } z - \text{Log. } \frac{a + b z}{a} + \text{Log. } C]$$

$$\text{dus is } -a x = \text{Log. } \frac{a z C}{a + b z} \text{ en } e^{-a x} = \frac{a z C}{a + b z}$$

$$\text{Voorts vindt men hieruit } x = \frac{ae^{-ax}}{aC - be^{-ax}},$$

$$\text{en uit } \cos . m \phi (\sin . m \phi)^n \delta \phi = x \delta x \text{ is } x = \frac{\cos . m \phi (\sin . m \phi)^n \delta \phi}{\delta x}; \text{ derhalve}$$

$$\cos . m \phi (\sin . m \phi)^n \delta \phi = \frac{ae^{-ax} \cdot \delta x}{aC - be^{-ax}}$$

Om de integraal van deze vergelijking te vinden, merke men op, dat

$$\delta (\sin . m \phi)^{n+1} = (n+1) m \cos . m \phi (\sin . m \phi)^n \delta \phi$$

en alzoo

$$\int \cos . m \phi (\sin . m \phi)^n \delta \phi = \frac{(\sin . m \phi)^{n+1}}{m(n+1)} \text{ is.}$$

Voorts heeft men nog

$$\frac{ae^{-ax} \delta x}{aC - be^{-ax}} = \frac{\frac{1}{aC} \cdot e^{-ax} \cdot a \delta x}{1 + \frac{b}{aC} (-e^{-ax})} \dots \dots \dots$$

$$\dots = \frac{x}{b} \cdot \frac{\frac{b}{aC} \cdot e^{-ax} \cdot a \delta x}{1 + \frac{b}{aC} (-e^{-ax})} \text{ te integreren;}$$

maar doordien $\delta (-e^{-ax}) = e^{-ax} \delta ax$ en
 alzoo $\frac{b}{aC} \delta (-e^{-ax}) = \frac{b}{aC} \cdot e^{-ax} \cdot a \delta x$ is,
 heeft men

§

$$\int \frac{a e^{-ax} \cdot dx}{aC - be^{-ax}} = \frac{1}{b} \text{Log.} \left[1 + \frac{b}{aC} (-e^{-ax}) \right]$$

$$= \frac{1}{b} \text{Log.} \left(\frac{aC - be^{-ax}}{aC} \right) = \frac{1}{b} \text{Log.} \left(\frac{Cae^{ax} - b}{Cae^{ax}} \right)$$

derhalve is de geheele integraal:

$$\frac{(\text{Sin. } m\Phi)^{n+1}}{m(n+1)} = \frac{1}{b} \left(\text{Log.} \frac{Cae^{ax} - b}{Cae^{ax}} + \text{Log. } C' \right)$$

$$= \frac{1}{b} \text{Log. } C' \left(1 - \frac{b}{Cae^{ax}} \right); \text{ waaruit men vindt}$$

$$\text{Sin. } m\Phi = \sqrt[n+1]{\frac{m(n+1)}{b} \cdot \text{Log. } C' \left(1 - \frac{b}{Cae^{ax}} \right)}$$

Om daarentegen de waarde van x te bekomen, heeft men

$$\frac{b(\text{Sin. } m\Phi)^{n+1}}{m(n+1)} = \text{Log.} \frac{C'(Cae^{ax} - b)}{Cae^{ax}}$$

$$\text{dus ook } \frac{b(\text{Sin. } m\Phi)^{n+1}}{m(n+1)} = \frac{C'(Cae^{ax} - b)}{Cae^{ax}}$$

$$\text{of } Cae^{ax} \cdot \frac{b(\text{Sin. } m\Phi)^{n+1}}{m(n+1)} = C'(Cae^{ax} - b)$$

waaruit volgt:

$$\left(C' - \frac{b(\text{Sin. } m\Phi)^{n+1}}{m(n+1)} \right) Cae^{ax} = bC'$$

dus

$$\text{dus } e^{ax} = \frac{b C'}{\left(C' - e^{\frac{b (\sin. m \phi)^{n+1}}{m(n+1)}} \right) C a}$$

$$\text{dus } ax = \text{Log.} \frac{b C'}{\left(C' - e^{\frac{b (\sin. m \phi)^{n+1}}{m(n+1)}} \right) C a}$$

$$\text{of } x = \frac{1}{a} \text{Log.} \frac{b C'}{\left(C' - e^{\frac{b (\sin. m \phi)^{n+1}}{m(n+1)}} \right) C a}$$

De standvastige grootheden C en C' moeten uit de eigenschappen van het Voorstel, waaruit de eerste vergelijking gesproten is, bepaald worden.

Nº. 158. Door

U. HUGUENIN, en J. R. Schmidt.

Het eerste gedeelte der differentiaal-vergelijking:

$$\frac{\delta x}{1+x^3} = y \delta x + 2 x \delta y + \frac{x^2 \delta \delta y}{2 \delta x}$$

waarin δx standvastig is, kan onafhankelijk van het tweede gedeelte derzelve geïntegreerd worden; het tweede gedeelte, hetwelk uit twee veranderlijke grootheden en hare differentiaalen is zamengesteld, dient alzoo ook op zich zelve integreerbaar te zijn, of eenen daartoe benoodigden vorm te bekomen, als men hetzelfde met eene functie of magt van x multiplificeert, bij aldien de volmaakte integratie mogelijk is: wij zullen het laatste beproeven, en de geheele vergelijking met x^m mul.

multipliceren, op dat het eerste gedeelte derzelve, eenen integreerbaren vorm behoudt; hierdoor verkrijgt men

$$\frac{x^m \delta x}{1+x^3} = y x^m \delta x + 2x^{m+1} \delta y + \frac{x^{m+2} \delta \delta y}{2 \delta x}$$

waarin de exponent m nader bepaald moet worden.

Bij eenige opmerking, en vergelijking met de differentiaal-uitdrukking van de tweede orde, ziet men ligt, dat de integraal van het tweede gedeelte dezer vergelijking, uit twee leden moet bestaan, welke de integraal van het eerste en derde lid van dit gedeelte onthouden; wij zullen derhalve aannemen, dat de integraal dezer vergelijking zij:

$$\int \frac{x^m \delta x}{1+x^3} = A x^{m+1} \cdot y + B x^{m+2} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$$

de differentiaal hiervan is, als men δx als standvastig beschouwt:

$$\begin{aligned} \frac{x^m \delta x}{1+x^3} &= A x^{m+1} \delta y + (m+1) A y x^m \delta x \dots \\ &\dots + (m+2) B x^{m+1} \delta y + B x^{m+2} \cdot \frac{\delta \delta y}{\delta x} \end{aligned}$$

Op dat deze vergelijking met de eerste overeen zal komen, moet $(m+1)A=1$, $A+(m+2)B=2$ en $B=\frac{1}{2}$ zijn; waaruit volgt $A=\frac{1}{m+1}$ en

$\frac{1}{m+1} + \frac{m+2}{2} = 2$; door deze laatste vergelijking heeft men $m^2 - m = 0$, en daar deze vergelijking de wortels $m=0$ en $m=1$ onthoudt, zoo kan men hieruit besluiten, dat onze differentiaal-vergelijking op tweeërleij wijze integreer-

greerbaar wordt; namelijk door $m = 0$ en $m = 1$ te stellen.

Wij zullen de eerste waarde van m , als de gemakkelijkste, aannemen, waardoor $A = 1$ en $B = \frac{1}{2}$ is, zoo dat de integraal van onze voorgestelde vergelijking zijn zal

$$\int \frac{\delta x}{1+x^3} = xy + \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{\delta y}{\delta x} + C.$$

$$\text{Daar voorts } \frac{\delta x}{1+x^3} = \frac{1}{3} \left[\frac{\delta x}{1+x} + \frac{(2-x)\delta x}{x^2-x+1} \right] \\ = \frac{1}{3} \left[\frac{\delta x}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\delta x - \delta x}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta x}{x^2-x+1} \right] \text{ is,}$$

$$\text{heeft men } \int \frac{\delta x}{1+x^3} = \frac{1}{3} \text{Log.}(1+x) - \frac{1}{6} \text{Log.}(x^2-x+1)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc. Tang.} \cdot \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = xy + \frac{x^2 \delta y}{2 \delta x} + C.$$

$$\text{derhalve is } \frac{1}{3} \delta x \text{Log.}(1+x) - \frac{1}{6} \delta x \text{Log.}(x^2-x+1) \\ + \frac{\delta x}{\sqrt{3}} \cdot \text{Arc. Tang.} \cdot \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = xy \delta x + \frac{1}{2} x^2 \delta y + C \delta x.$$

Nu is de integraal van het tweede gedeelte dezer vergelijking $= \int (xy \delta x + \frac{1}{2} x^2 \delta y) + \int C \delta x = \frac{1}{2} x^2 y + Cx$; derhalve blijft ons nog alleen over, het eerste gedeelte derzelve te integreren.

Laat ons tot dit einde vooreerst $x \text{Log.}(1+x)$ differentieren, zoo bekomt men:

$$\delta (x \text{Log.}(1+x)) = \delta x \text{Log.}(1+x) + \frac{x \delta x}{1+x} \\ \dots = \delta x \text{Log.}(1+x) + \delta x - \frac{\delta x}{1+x}$$

waarvan de integraal is:

$$x \text{Log.}(1+x) = \int \delta x \text{Log.}(1+x) + x - \text{Log.}(1+x) \\ \text{of } \int \delta x \text{Log.}(1+x) = (1+x) \text{Log.}(1+x) - x$$

Men

Men differentieere voorts $x \text{ Log.}(x^2 - x + 1)$,
zoo vindt men

$$\begin{aligned} \delta [x \text{ Log.}(x^2 - x + 1)] &= \delta x \text{ Log.}(x^2 - x + 1) \\ &+ \frac{2x^2 \delta x - x \delta x}{x^2 - x + 1} = \delta x \text{ Log.}(x^2 - x + 1) \dots \\ &+ 2\delta x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x \delta x - \delta x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta x}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

waarvan de integraal is

$$\begin{aligned} x \text{ Log.}(x^2 - x + 1) &= \int \delta x \text{ Log.}(x^2 - x + 1) + 2x \\ &+ \frac{1}{2} \text{ Log.}(x^2 - x + 1) - \sqrt{3} \cdot \text{Arc. Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

en alzoo heeft men:

$$\begin{aligned} \int \delta x \text{ Log.}(x^2 - x + 1) &= \frac{2x-1}{2} \text{ Log.}(x^2 - x + 1) \\ &\dots - 2x + \sqrt{3} \cdot \text{Arc. Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Eindelijk differentieere men $\frac{2x}{\sqrt{3}} \text{ Arc. Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$,
alsdan bekomt men:

$$\begin{aligned} \delta \left[\frac{2x}{\sqrt{3}} \cdot \text{Arc. Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] &= \frac{2\delta x}{\sqrt{3}} \cdot \text{Arc. Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ &+ \frac{x \delta x}{x^2 - x + 1} = \frac{2\delta x}{\sqrt{3}} \cdot \text{Arc. Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x \delta x - \delta x}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta x}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

hetwelk geïntegreerd wordende, geeft:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{\sqrt{3}} \text{ Arc. Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} &= 2 \int \frac{\delta x}{\sqrt{3}} \text{ Arc. Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ &\dots + \frac{1}{2} \text{ Log.}(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Arc. Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

of

$$\text{of } \int \frac{\delta x}{\sqrt{3}} \cdot \text{Arc.Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{3}} \text{Arc.Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ \dots - \frac{1}{4} \text{Log.}(x^2 - x + 1).$$

Substitueert men nu deze bijzondere integralen in onze gevondene integraal-vergelijking, zoo heeft men:

$$\frac{1}{2}[(1+x)\text{Log.}(1+x) - x] - \frac{1}{8} \left[\frac{(2x-1)}{2} \text{Log.}(x^2 - x + 1) \right. \\ \left. - 2x + \sqrt{3} \text{Arc.Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] + \frac{2x-1}{2\sqrt{3}} \text{Arc.Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ \dots - \frac{1}{4} \text{Log.}(x^2 - x + 1) = \frac{1}{2} x^2 y + Cx;$$

en als men deze waarden te zamen trekt, vindt men:

$$\frac{1}{2}(1+x)\text{Log.}(1+x) - \frac{1}{8}(1+x)\text{Log.}(x^2 - x + 1) \\ \dots + \frac{x-1}{\sqrt{3}} \text{Arc.Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} x^2 y + Cx; \text{ of}$$

$$\frac{1}{8}(1+x)\text{Log.} \frac{(1+x)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{(x-1)}{\sqrt{3}} \text{Arc.Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ \dots = \frac{1}{2} x^2 y + Cx; \text{ of wel:}$$

$$\frac{1}{2}(1+x)\text{Log.} \frac{(1+x)}{\sqrt{3}(1+x^3)} + \frac{x-1}{2\sqrt{3}} \text{Arc.Tang.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ \dots = \frac{1}{2} x^2 y + Cx + C', \text{ als } C' \text{ de stand-}$$

vastige grootheid voor de tweede integratie be-
teekent.

Nº. 159. Door

U. HUGUENIN, en J. R. Schmidt.

De differentiaal-vergelijking van de derde orde

$$\frac{\delta x}{1+x^2} = y \delta x + 3x \delta y + \frac{3x^2 \delta \delta y}{2 \delta x} + \frac{x^3 \delta^2 y}{6 \delta x^2},$$

in

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 495

In welke δx als standvastig aangenomen wordt, laat zich op dezelfde wijze als die van het voorgaande Voorstel integreren. Wij zullen tot dit einde dezelve met x^n vermenigvuldigen, waardoor men de vergelijking

$$\frac{x^n \delta x}{1+x^2} = \frac{n}{2} x^{n-1} \delta x + 3x^{n+1} \delta y + \frac{3x^{n+2} \delta \delta y}{2 \delta x} + \frac{x^{n+3} \delta^2 y}{6 \delta x^2}$$

bekomt; voorts laat zich uit de aard dezer vergelijking ligtelijk besluiten, dat de eerste integraal derzelve, den vorm

$$\int \frac{x^n \delta x}{1+x^2} = A y x^{n+1} + B x^{n+2} \frac{\delta y}{\delta x} + C x^{n+3} \frac{\delta \delta y}{\delta x^2}$$

hebben moet; want, zoo men deze uitdrukking differentieert, bekomt men de vergelijking

$$\frac{x^n \delta x}{1+x^2} = (n+1) A x^n \delta x + A x^{n+1} \delta y + n(n+2) B x^{n+1} \delta y + B x^{n+2} \frac{\delta \delta y}{\delta x} + \dots + (n+3) D x^{n+3} \frac{\delta \delta y}{\delta x} + D x^{n+3} \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$$

welke dezelfde veranderlijke grootheden en differentiaal onthoudt, als de voorgaande, vermenigvuldigd met x^n .

Daar nu deze beide vergelijkingen met elkander overeen moeten komen, heeft men $(n+1) A = 1$; $A + (n+2) B = 3$; $B + (n+3) D = \frac{1}{2}$; $D = \frac{1}{6}$; waaruit volgt, dat

$$A = \frac{1}{n+1}; B = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \text{ en } \frac{3n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n+3}{6} = \frac{1}{2}$$

geijking $n^3 - 3n^2 + 2n = 0$, waarvan de wortels zijn $n = 0$, $n = 1$ en $n = 2$, hetwelk te kennen geeft, dat onze vergelijking zich op drie verschillende wijzen integreren laat; wij zullen echter $n = 0$ stellen, waardoor $A = x$, $B = 1$ en $D = \frac{1}{2}$ wordt, en hieruit blijkt, dat onze gegevene vergelijking geene verandering behoeft te ondergaan, maar terstond geïntegreerd kan worden. Men bekomt dus voor de eerste integraal:

$$\int \frac{\delta x}{1+x^2} = yx + x^2 \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{x^3 \delta \delta y}{6 \delta x^2}, \text{ of}$$

$$\text{Arc. Tang. } x = xy + x^2 \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{x^3 \delta \delta y}{6 \delta x^2}, \text{ en als}$$

men dezelve met δx multiplieert, ontstaat de nieuwe differentiaal-vergelijking:

$$\delta x \text{ Arc. Tang. } x = x y \delta x + x^2 \delta y + \frac{x^3 \delta \delta y}{6 \delta x}.$$

welke wij, om dezelve integreerbaar te maken, met x^m zullen vermenigvuldigen, waardoor men bekomt:

$$x^m \delta x \text{ Arc. Tang. } x = y x^{m+1} \delta x + x^{m+2} \delta y + \frac{x^{m+3} \delta \delta y}{\delta x}.$$

Men stelle nu de integraal dezer vergelijking,

$$\int x^m \delta x \text{ Arc. Tang. } x = E y x^{m+2} + F x^{m+3} \frac{\delta y}{\delta x}.$$

alsdan moet de differentiaal:

$$x^m \delta x \text{ Arc. Tang. } x = (m+2) E y x^{m+1} \delta x + E x^{m+2} \delta y + (m+3) F x^{m+2} \delta y + F x^{m+3} \frac{\delta \delta y}{\delta x}$$

met onze vergelijking overeenkomen, en hieruit ont-

ontstaan de vergelijkingen: $(m + 2) E = 1$; $E + (m + 3) F = 1$ en $F = \frac{1}{6}$; derhalve

$$E = \frac{1}{m+2} \text{ en } \frac{1}{m+2} + \frac{m+3}{6} = 1, \text{ of } m^2 =$$

$m = 0$; waaruit volgt, dat $m = 0$ en $m = 1$ kan zijn; wij zullen echter wederom de eenvoudigste waarde, namelijk $m = 0$, aannemen; en hierdoor hebben wij $E = \frac{1}{2}$, $F = \frac{1}{6}$ en

$$\int \delta x \text{ Arc. Tang. } x = \frac{1}{2} y x^2 + \frac{x^3 \delta y}{6 \delta x} \dots$$

$$\dots = \frac{1}{6} \left(3 y x^2 + \frac{x^3 \delta y}{\delta x} \right).$$

Om $\int \delta x \text{ Arc. Tang. } x$ te vinden, differentieere men $x \text{ Arc. Tang. } x$; daardoor heeft men

$$\delta (x \text{ Arc. Tang. } x) = \delta x \text{ Arc. Tang. } x + \frac{x \delta x}{1+x^2}, \text{ of}$$

$$\delta x \text{ Arc. Tang. } x = \delta (x \text{ Arc. Tang. } x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 x \delta x}{1+x^2}$$

en door deze vergelijking te integreren

$$\int \delta x \text{ Arc. Tang. } x = x \text{ Arc. Tang. } x - \frac{1}{2} \text{ Log. } (1+x^2)$$

$$\text{dus } x \text{ Arc. Tang. } x - \frac{1}{2} \text{ Log. } (1+x^2) =$$

$$\frac{1}{6} \left(3 y x^2 + \frac{x^3 \delta y}{\delta x} \right); \text{ waaruit de nieuwe differentiaal-vergelijking:}$$

$$x \delta x \text{ Arc. Tang. } x - \frac{1}{2} \delta x \text{ Log. } (1+x^2) = \frac{1}{6} (3 y x^2 \delta x + x^3 \delta y) \text{ ontstaat, van welker tweede gedeelte, de integraal } = \frac{1}{6} x^3 y \text{ is.}$$

Om de integraal van het eerste gedeelte te vinden, differentieere men vooreerst $\frac{1}{2} x^2 \text{ Arc. Tang. } x$, daardoor heeft men:

$$\delta \left(\frac{1}{2} x^2 \text{ Arc. Tang. } x \right) = x \delta x \text{ Arc. Tang. } x + \frac{1}{2} \frac{x^2 \delta x}{1+x^2}$$

$$\dots = x \delta x \text{ Arc. Tang. } x + \frac{1}{2} \delta x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta x}{1+x^2}$$

498 ONTBINDINGEN VAN 23.

waarvan de integraal is

$$\frac{1}{2} x^2 \text{Arc. Tang. } x = \int x dx \text{Arc. Tang. } x + \frac{1}{2} x$$

$$= \frac{1}{2} \text{Arc. Tang. } x, \text{ of}$$

$$\int x dx \text{Arc. Tang. } x = \frac{1}{2} (1+x^2) \text{Arc. Tang. } x - \frac{1}{2} x$$

Voorts differentieert men $x \text{Log.}(1+x^2)$; daardoor heeft men:

$$\delta(x \text{Log.}(1+x^2)) = dx \text{Log.}(1+x^2) + \frac{2x^2 dx}{1+x^2}$$

$$= dx \text{Log.}(1+x^2) + 2 dx = 2 \cdot \frac{dx}{1+x^2};$$

waarvan de integraal is

$$x \text{Log.}(1+x^2) = \int dx \text{Log.}(1+x^2) + 2x - 2 \text{Arc. Tang. } x$$

$$\text{of } \int dx \text{Log.}(1+x^2) = \frac{1}{2} x \text{Log.}(1+x^2) - x + \text{Arc. Tang. } x$$

derhalve is de integraal van onze vergelijking

$$\int x dx \text{Arc. Tang. } x = \frac{1}{2} \int dx \text{Log.}(1+x^2) =$$

$$\frac{1}{2} (1+x^2) \text{Arc. Tang. } x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x \text{Log.}(1+x^2)$$

$$+ x - \text{Arc. Tang. } x = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \text{Arc. Tang. } x$$

$$+ \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x \text{Log.}(1+x^2) = \frac{1}{8} x^3 y; \text{ of}$$

$$(x^2 - 1) \text{Arc. Tang. } x + x - x \text{Log.}(1+x^2) = \frac{1}{4} x^3 y$$

Zoo men bij de eerste integraal de standvastige grootheid C , bij de tweede C' en bij de derde C'' , gevoegd had, zoude men de integraal

$$(x^2 - 1) \text{Arc. Tang. } x + x - x \text{Log.}(1+x^2) =$$

$$\frac{1}{4} x^3 y + x^2 C + 2 x C' + C'' \text{ gevonden heb-}$$

ben; doch de omstandigheden van het Voorstel, waaruit de voorgestelde vergelijking is afgeleid geworden, moeten beslissen, of zulks al of niet noodzakelijk zij.

AANMERKING. Wij hebben in de ontbinding van dit Voorstel, zoo als ook in het voorgaande, bij de integratie van het tweede gedeelte der vergelijking, m en n ~~als 0~~ aangeneamen; al zoo blijft ons nog over te onderzoeken, of men, voor een der andere waarden, ook dezelfde integraal bekomen zal. Wij zullen alzoo tot dit

dit einde den wortel $n = 1$, in de vergelijking $n^3 - 3n^2 + 2n = 0$, aannemen; daardoor heeft men $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{2}$ en $D = \frac{1}{2}$, en de integraal der eerste vergelijking wordt

$$\int \frac{x \delta x}{1+x^2} = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{x^4 \delta \delta y}{2 \delta x^2}$$

maar $\int \frac{x \delta x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \text{Log} \cdot (1+x^2)$, dus

$$\text{Log} \cdot (1+x^2) = y x^2 + \frac{1}{2} x^2 \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{x^4 \delta \delta y}{2 \delta x^2}$$

waaruit de vergelijking

$$\delta x \text{Log} \cdot (1+x^2) = y x^2 \delta x + \frac{1}{2} x^2 \delta y + \frac{x^4 \delta \delta y}{2 \delta x}$$

ontstaat, en zoo men dezelve met x^m multiplieert, heeft men $x^m \delta x \text{Log} \cdot (1+x^2) = \dots$

$$\dots y x^{m+2} \delta x + \frac{1}{2} x^{m+3} \delta y + \frac{x^{m+4} \delta \delta y}{2 \delta x}$$

waarvan wij stellen de integraal te zijn

$$\int x^m \delta x \text{Log} \cdot (1+x^2) = E y x^{m+3} + F x^{m+4} \frac{\delta y}{\delta x}$$

nu is de differentiaal dezer vergelijking

$$x^m \delta x L(1+x^2) = E x^{m+3} \delta y + (m+3) E y x^{m+2} \delta x + (m+4) F x^{m+3} \delta y + F x^{m+4} \frac{\delta \delta y}{\delta x}$$

derhalve moet $(m+3) E = 1$, $E + (m+4) F = \frac{1}{2}$

en $F = \frac{1}{2}$ zijn; dus $E = \frac{1}{m+3}$ en $\frac{1}{m+3} + \frac{m+4}{2} = \frac{1}{2}$,

of $m^2 + 3m = 0$; gevolgelyk kan $m = 0$ en $m = -3$ zijn. Stellen wij $m = 0$, zoo is $E = \frac{1}{3}$ en $F = \frac{1}{2}$, en dan heeft men

$$\int \delta x \text{Log.}(1+x^2) = \frac{1}{2} y x^3 + \frac{1}{2} x^4 \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$$

dat is, volgens het hier voor gevondene,
 $x \text{Log.}(1+x^2) = 2x + 2 \text{Arc. Tang. } x =$

$$\frac{1}{2} y x^3 + \frac{1}{2} x^4 \cdot \frac{\delta y}{\delta x}, \text{ of } x \delta x \text{Log.}(1+x^2) = \dots$$

$$2x \delta x + 2 \delta x \text{Arc. Tang. } x = \frac{1}{2} y x^3 \delta x + \frac{1}{2} y^4 \delta y,$$

$$\text{of wel } \frac{\delta x}{x^2} \text{Log.}(1+x^2) + \frac{2 \delta x}{x^2} + \frac{2 \delta x}{x^2} \text{Arc. Tang. } x$$

$$= \frac{1}{2} (y \delta x + x \delta y), \text{ waarvan de integraal is}$$

$$\int \frac{\delta x}{x^2} \text{Log.}(1+x^2) + \frac{2}{x} + \int \frac{2 \delta x}{x^2} \text{Arc. Tang. } x = \frac{1}{2} xy$$

Om het eerste gedeelte dezer vergelijking te integreren, differentieere men $\frac{\text{Log.}(1+x^2)}{x}$ en $\frac{\text{Arc. Tang. } x}{x^2}$; alsdan heeft men vooreerst

$$\delta \cdot \frac{\text{Log.}(1+x^2)}{x} = \frac{-\delta x \text{Log.}(1+x^2)}{x^2} + \frac{2 \delta x}{1+x^2}$$

$$\text{of } \frac{\delta x \text{Log.}(1+x^2)}{x^2} = \frac{2 \delta x}{1+x^2} - \delta \cdot \frac{\text{Log.}(1+x^2)}{x}$$

$$\text{en } \int \frac{\delta x \text{Log.}(1+x^2)}{x^2} = 2 \text{Arc. Tang. } x - \frac{\text{Log.}(1+x^2)}{x}$$

Voorts is:

$$\delta \left(\frac{\text{Arc. Tang. } x}{x^2} \right) = \frac{-2 \delta x \text{Arc. Tang. } x}{x^3} + \frac{\delta x}{x^2(1+x^2)}$$

$$\text{of } \frac{2 \delta x \text{Arc. Tang. } x}{x^3} = \frac{\delta x}{x^2(1+x^2)} - \delta \left(\frac{\text{Arc. Tang. } x}{x^2} \right)$$

waarvan de integraal is:

$$\int \frac{2 \delta x \text{Arc. Tang. } x}{x^3} = \int \left(\frac{\delta x}{x^2} - \frac{\delta x}{1+x^2} \right) = \dots \text{Arc.}$$

$$\frac{\text{Arc. Tang. } x}{x^2} = \frac{-1}{x} - \text{Arc Tang } x - \frac{\text{Arc. Tang. } x}{x^2}$$

en als men deze waarden in de integraal substitueert, heeft men:

$$\frac{(x^2 - 1) \text{Arc. Tang. } x}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{\text{Log.}(1+x^2)}{x} = \frac{1}{2} xy$$

of $(x^2 - 1) \text{Arc. Tang. } x + x - x \text{Log.}(1+x^2) = \frac{1}{2} x^2 y$, hetwelk volmaakt met de eerstgevondene integraal overeenkomt.

Om zich eindelijk al verder te overtuigen, dat het om het even is, van welke der gevondene wortelen voor n en m , men zich tot de integratie bedient, zullen wij in de vergelijking

$$\int x^m \delta x \text{Log.}(1+x^2) = E y x^{m+3} + F x^{m+4} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$$

de tweede waarde, $m = -2$, stellen; hierdoor vindt men $E = 1$, $F = \frac{1}{2}$ en de integraal

$$\int \frac{\delta x}{x^2} \text{Log.}(1+x^2) = y x + \frac{x^2 \delta y}{2 \delta x},$$

of, het eerste lid integrerende:

$$2 \text{Arc. Tang. } x - \frac{\text{Log.}(1+x^2)}{x} = y x + \frac{x^2 \delta y}{2 \delta x}$$

waaruit de differentiaal-vergelijking

$$2 \delta x \text{Arc. Tang. } x - \frac{\delta x \text{Log.}(1+x^2)}{x} = y x \delta x + \frac{x^2 \delta y}{2}$$

ontstaat, van welke het tweede gedeelte

eenen integreerbaren vorm bekomt, als men de geheele vergelijking met x multiplificeert; want hierdoor heeft men: $2 x \delta x \text{Arc. Tang. } x - \delta x \text{Log.}(1+x^2) = y x^2 \delta x + \frac{1}{2} x^3 \delta y$, zijnde de integraal van het tweede lid, $\frac{1}{2} x^3 y$. Ten einde het eerste gedeelte te integreren, heeft men vol-

gens het voorteen gezondene $\int 2x \delta x \text{ Arc. Tang. } x = (1+x^2) \text{ Arc. Tang. } x - x$, en $\int \delta x \text{ Log. } (1+x^2) = x \text{ Log. } (1+x^2) - 2x \text{ Arc. Tang. } x$; derhalve is de integraal: $\int 2x \delta x \text{ Arc. Tang. } x = \int \delta x \text{ Log. } (1+x^2) = (x^2-1) \text{ Arc. Tang. } x + x - x \text{ Log. } (1+x^2) = \frac{1}{2} x^2 y$, zoo als wij hiervoor op twee verschillende wijzen gevonden hebben.

N^o. 160. Door

U. HUBERLIN, en J. A. Schmidt.

Ten einde de integraal van $\frac{\delta \phi}{\text{Cos. } \phi^n}$ te vinden, zoude men $\text{Sin. } \phi = x$ kunnen stellen, waardoor

$\frac{\delta \phi}{\text{Cos. } \phi^n}$ verandert in $\frac{\delta x}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}}$, welke formule in partiale breuken ontbonden en geïntegreerd kan worden; doch wij willen liever deze differentiaal in haren trigonometrischen vorm integre-

ren, door voor $\int \frac{\delta \phi}{\text{Cos. } \phi^n}$ een algemeene uitdruk-

king te zoeken; in de veronderstelling, dat n een geheel positief getal zij.

Hiertoe differentieere men $\frac{\text{Sin. } \phi}{\text{Cos. } \phi^{n-1}}$, zoo

heeft men

$$\begin{aligned} \frac{\delta \text{Sin. } \phi}{\text{Cos. } \phi^{n-1}} &= \frac{\text{Cos. } \phi \delta \phi}{\text{Cos. } \phi^{n-1}} + \frac{(n-1) \text{Sin. } \phi^2 \delta \phi}{\text{Cos. } \phi^n} \\ &= \frac{\text{Cos. } \phi^2 \delta \phi + (n-1)(1-\text{Cos. } \phi^2) \delta \phi}{\text{Cos. } \phi^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n-1)\delta\phi}{\cos.\phi^n} - \frac{(n-2)\cos.\phi.\delta\phi}{\cos.\phi^n} \\
 &= \frac{(n-1)\delta\phi}{\cos.\phi^n} - \frac{(n-2)\delta\phi}{\cos.\phi^{n-2}}; \text{ derhalve} \\
 \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^n} &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^{n-2}}; \text{ dus} \\
 1^\circ. \int \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^n} &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^{n-2}}
 \end{aligned}$$

Stelt men nu in deze uitdrukking voor n achtereenvolgens $n-2$, $n-4$, $n-6$, enz. zoo bekomt men de uitdrukkingen

$$\begin{aligned}
 2^\circ. \int \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^{n-2}} &= \frac{1}{n-3} \cdot \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^{n-3}} + \frac{n-4}{n-3} \int \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^{n-4}} \\
 3^\circ. \int \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^{n-4}} &= \frac{1}{n-5} \cdot \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^{n-5}} + \frac{n-6}{n-5} \int \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^{n-6}} \\
 4^\circ. \int \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^{n-6}} &= \frac{1}{n-7} \cdot \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^{n-7}} + \frac{n-8}{n-7} \int \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^{n-8}} \\
 \text{enz.}
 \end{aligned}$$

Substitueert men nu achtereenvolgens de uitdrukkingen 2, 3, 4, enz., in 1, zoo bekomt men de algemeene formule

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\delta\phi}{\cos.\phi^n} &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^{n-1}} + \frac{(n-2)}{(n-1)(n-3)} \cdot \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^{n-3}} + \\
 &\frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)} \cdot \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^{n-5}} + \dots \\
 &\frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)} \cdot \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi^{n-7}} + \dots
 \end{aligned}$$

$$+ \dots + \frac{(n-2)(n-4) \dots [n-(n-1)]}{(n-1)(n-3) \dots [n-(n-2)]} \int \frac{\delta \phi}{\cos \phi},$$

als n een even getal is, of tot

$$\dots + \frac{(n-2)(n-4) \dots [n-(n-2)]}{(n-1)(n-3) \dots 3 \cdot 1} \int \frac{\delta \phi}{\cos \phi^2},$$

als n een oneven getal is.

Welk geheel positief getal voor n ook mag aangenomen worden, zoo zal, of in den teller, of in den noemer der leden, steeds een factor voorkomen, die $= 0$ wordt; het lid, waarbij zulks plaats vindt; valt alsdan weg, zoo als ook alle de volgende leden, uitgezonderd het laatste lid, hetwelk steeds bij de blijvende reeks moet worden gevoegd; als bij voorbeeld: zoo is voor

$$n=3, \int \frac{\delta \phi}{\cos \phi^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi^2} + \frac{1}{2} \int \frac{\delta \phi}{\cos \phi}$$

$$n=5, \int \frac{\delta \phi}{\cos \phi^5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi^4} + \frac{3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi^3}$$

$$\dots + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \int \frac{\delta \phi}{\cos \phi}. \text{ Voorts is voor}$$

$$n=2, \int \frac{\delta \phi}{\cos \phi^2} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \text{Tang} \phi$$

$$n=4, \int \frac{\delta \phi}{\cos \phi^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi^3} + \frac{2}{3 \cdot 1} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi} + \frac{1}{3} \int \frac{\delta \phi}{\cos \phi^2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi^3} + \frac{2}{3 \cdot 1} \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi} + \frac{2}{3} \text{Tang} \phi, \text{ enz.}$$

Voor ons geval is het nu nog noodig, de integraal van $\frac{\delta \phi}{\cos \phi}$ te vinden, hetwelk aan geene

zwa-

zwarigheden onderhevig is; want doordien . . .

$$\frac{\delta \phi}{\cos. \phi} = \frac{\cos. \phi. \delta \phi}{\cos. \phi^2} = \frac{\cos. \phi. \delta \phi}{1 - \sin. \phi^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos. \phi. \delta \phi}{1 + \sin. \phi}$$

+ $\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos. \phi. \delta \phi}{1 - \sin. \phi}$ is, heeft men door de bekende formules . . .

$$\begin{aligned} \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi} &= \frac{1}{2} \text{Log.}(1 + \sin. \phi) - \frac{1}{2} \text{Log.}(1 - \sin. \phi) \\ &= \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{1 + \sin. \phi}{1 - \sin. \phi} = \text{Log.} \sqrt{\frac{1 + \sin. \phi}{1 - \sin. \phi}} = \\ &\dots \text{Log. Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} \phi) \end{aligned}$$

Om te bekorten zullen wij de gevondene integraal, $\text{Log. Tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} \phi) = X$ stellen, zoo

dat, als men de gevondene integraal van $\frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3}$ in onze differentiaal substitueert, heeft men

$$\begin{aligned} \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3} \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^5} &= \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin. \phi}{\cos. \phi^4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\sin. \phi}{\cos. \phi^2} \right. \\ &+ \left. \frac{3}{8} X \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin. \phi. \delta \phi}{\cos. \phi^7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\sin. \phi. \delta \phi}{\cos. \phi^5} \dots \\ &+ \frac{3}{8} \frac{X \delta \phi}{\cos. \phi^3}. \end{aligned}$$

Ten einde de beide eerste differentialen dezer uitdrukking te integreren, merke men op, dat

$$\delta \frac{1}{\cos. \phi^{n-1}} = \frac{(n-1) \sin. \phi. \delta \phi}{\cos. \phi^n}, \text{ en alzoo}$$

$$\int \frac{\sin. \phi. \delta \phi}{\cos. \phi^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\cos. \phi^{n-1}} \text{ is, en als}$$

men hierin $n = 7$ en $n = 5$ stelt, heeft men

\int

$$\int \frac{\sin. \phi \delta \phi}{\cos. \phi^7} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\cos. \phi^6} \text{ en } \int \frac{\sin. \phi \delta \phi}{\cos. \phi^5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos. \phi^4};$$

derhalve is de integraal

$$\int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3} \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^5} = \frac{1}{4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{\cos. \phi^6} + \frac{3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{1}{\cos. \phi^4}$$

$$+ \frac{1}{8} \int \frac{X \delta \phi}{\cos. \phi^3}; \text{ waarvan het gedeelte } \frac{X \delta \phi}{\cos. \phi^3}$$

nog geïntegreerd moet worden. Hiertoe merke men op, dat in het algemeen $\delta XY = X \delta Y + Y \delta X$ en alzoo $\int X \delta Y = XY - \int Y \delta X$ is. Stelt men

$$\text{en } Y = \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3}, \text{ zoo is}$$

$$\int \frac{X \delta \phi}{\cos. \phi^3} = X \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3} - \int \delta X \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3}.$$

$$\text{Maar } \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin. \phi}{\cos. \phi^2} + \frac{1}{2} \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi} =$$

$$\dots \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin. \phi}{\cos. \phi^2} + \frac{1}{2} X; \text{ alzoo is}$$

$$X \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3} = \frac{1}{2} X \cdot \frac{\sin. \phi}{\cos. \phi^2} + \frac{1}{2} X^2;$$

$$\text{Voorts } \int \delta X \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3} = \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi} \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi^3};$$

$$\dots = \int \frac{\delta \phi}{\cos. \phi} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin. \phi}{\cos. \phi^2} + \frac{1}{2} X \right) \dots$$

$$\dots = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin. \phi \delta \phi}{\cos. \phi^3} + \frac{1}{2} \int \frac{X \delta \phi}{\cos. \phi} \dots$$

.. =

$$\dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^2} + \frac{1}{2} \int \frac{X \delta \varphi}{\cos \cdot \varphi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^2} +$$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} X^2$, wijl $X \cdot \frac{\delta \varphi}{\cos \cdot \varphi} = X \delta X$ is: derhalve is

$$\int \frac{X \delta \varphi}{\cos \cdot \varphi^2} = \frac{1}{2} X \cdot \frac{\sin \cdot \varphi}{\cos \cdot \varphi^2} + \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^2} - \frac{1}{4} X^2 =$$

$\frac{1}{2} X \cdot \frac{\sin \cdot \varphi}{\cos \cdot \varphi^2} + \frac{1}{4} X^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^2}$; zoo dat de gezochte integraal zijn zal:

$$\int \frac{\delta \varphi}{\cos \cdot \varphi^3} \int \frac{\delta \varphi}{\cos \cdot \varphi^5} = \frac{1}{4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^6} + \frac{3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^4}$$

$$\dots - \frac{3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^2} + \frac{3}{16} \cdot X \cdot \frac{\sin \cdot \varphi}{\cos \cdot \varphi^2} + \frac{3}{4 \cdot 8} X^2 \dots$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^6} + \frac{3}{4 \cdot 8} \left(\frac{1 - \cos \cdot \varphi^2}{\cos \cdot \varphi^4} \right) + \dots$$

$$\dots \frac{3}{4 \cdot 8} \left(2 X \cdot \frac{\sin \cdot \varphi}{\cos \cdot \varphi^2} + X^2 \right) = \frac{1}{4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^6} \dots$$

$$+ \frac{3}{4 \cdot 8} \left(\frac{\sin \cdot \varphi}{\cos \cdot \varphi^2} + X \right)^2 = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{\cos \cdot \varphi^6} + \dots$$

$$\dots \frac{3}{32} \left(\frac{\sin \cdot \varphi}{\cos \cdot \varphi^2} + \text{Log. Tang.} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi) \right)^2$$

waarbij nog eene standvastige grootheid moet worden gevoegd.

AANMERKING. De hier voor gevondene algemeene uitdrukking voor de integraal van $\frac{\delta \varphi}{\cos \cdot \varphi^n}$,

zoo ook van $\frac{\sin \cdot \varphi \delta \varphi}{\cos \cdot \varphi^n}$ en $\frac{\delta \varphi}{\cos \cdot \varphi}$, dienen om alle

differentialen van den vorm $\frac{\delta \varphi}{\cos \cdot \varphi^q} \int \frac{\delta \varphi}{\cos \cdot \varphi^p}$ te in-

te-

tegreren; daar echter ook differentialen kunnen voorkomen, welke den vorm $\frac{\delta\phi}{\sin.\phi^q} \int \frac{\delta\phi}{\sin.\phi^p}$ hebben, zullen wij nog de algemeene uitdrukking voor de integraal van $\frac{\delta\phi}{\sin.\phi^n}$ hier bijvoegen. Hier-

toe differentieere men de functie $\frac{\cos.\phi}{\sin.\phi^{n-1}}$, zoo

heeft men:

$$\begin{aligned} \delta \frac{\cos.\phi}{\sin.\phi^{n-1}} &= \frac{-\sin.\phi \delta\phi}{\sin.\phi^{n-1}} - \frac{(n-1)\cos.\phi^2 \delta\phi}{\sin.\phi^n} = \\ &= \frac{-\sin.\phi^2 \delta\phi - (n-1)(1-\sin.\phi^2)\delta\phi}{\sin.\phi^n} = \frac{-(n-1)\delta\phi}{\sin.\phi^n} \\ &+ \frac{(n-2)\sin.\phi^2 \delta\phi}{\sin.\phi^n} = \frac{-(n-1)\delta\phi}{\sin.\phi^n} + \frac{(n-2)\delta\phi}{\sin.\phi^{n-2}}. \end{aligned}$$

zoo dat:

$$1^\circ \int \frac{\delta\phi}{\sin.\phi^n} = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{\cos.\phi}{\sin.\phi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{\delta\phi}{\sin.\phi^{n-2}}$$

Stelt men nu voor n achtereenvolgens $n-2$, $n-4$, $n-6$, enz. zoo bekomt men

$$2^\circ \int \frac{\delta\phi}{\sin.\phi^{n-2}} = \frac{-1}{n-3} \cdot \frac{\cos.\phi}{\sin.\phi^{n-3}} + \frac{n-4}{n-3} \int \frac{\delta\phi}{\sin.\phi^{n-4}};$$

$$3^\circ \int \frac{\delta\phi}{\sin.\phi^{n-4}} = \frac{-1}{n-5} \cdot \frac{\cos.\phi}{\sin.\phi^{n-5}} + \frac{n-6}{n-5} \int \frac{\delta\phi}{\sin.\phi^{n-6}};$$

$$4^\circ \int \frac{\delta\phi}{\sin.\phi^{n-6}} = \frac{-1}{n-7} \cdot \frac{\cos.\phi}{\sin.\phi^{n-7}} + \frac{n-8}{n-7} \int \frac{\delta\phi}{\sin.\phi^{n-8}};$$

enz.

Sub-

Substitueert men eindelijk de vergelijkingen 2, 3, 4, enz. achtereenvolgens in 1, zoo bekomt men de algemeene formule:

$$\begin{aligned} \int \frac{\delta \phi}{\sin \phi} &= \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi} - \frac{n-2}{(n-1)(n-3)} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \\ &\dots - \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \dots \\ &- \frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \\ &\dots + \frac{(n-2)(n-4)(n-6) \dots 1}{(n-1)(n-3)(n-5) \dots 2} \int \frac{\delta \phi}{\sin \phi}, \end{aligned}$$

als n een oneven positief getal is; is n daarentegen een positief even getal, zoo is het laatste lid dezer reeks:

$$+ \frac{(n-2)(n-4)(n-6) \dots 1}{(n-1)(n-3)(n-5) \dots 2} \int \frac{\delta \phi}{\sin \phi}.$$

$$\text{Daar voorts } \delta \frac{1}{\sin \phi} = \frac{-(n-1) \cos \phi \delta \phi}{\sin^2 \phi},$$

$$\text{alzo } \int \frac{\cos \phi \delta \phi}{\sin \phi} = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{\sin \phi};$$

$$\int \frac{\delta \phi}{\sin^2 \phi} = -\cos \phi \text{ en } \int \frac{\delta \phi}{\sin \phi} = \int \frac{\sin \phi \delta \phi}{\sin^2 \phi} =$$

$$\int \frac{\sin \phi \delta \phi}{1 - \cos^2 \phi} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin \phi \delta \phi}{1 + \cos \phi} + \frac{1}{2} \int \frac{\sin \phi \delta \phi}{1 - \cos \phi} =$$

$$= \frac{1}{2} \log (1 + \cos \phi) + \frac{1}{2} \log (1 - \cos \phi) =$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi} = \log \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}} = \log \tan \frac{1}{2} \phi$$

is,

is, zoo zijn alle integralen, welke men tot de integratie van elke differentiaal-uitdrukking . .

$\frac{\delta \phi}{\sin \phi} \int \frac{\delta \phi}{\sin \phi} p$, waarin p en q geheele positieve getallen zijn, benoodigd heeft, insgelijks bekend.

Ik heb mij bij de integratie van de opgegevene differentiaal, alleen van de eigenschappen der trigonometrische functien bediend; zij zijn meer geschikt dan de algebraïsche uitdrukkingen, om van den eenen tot den anderen vorm overgebracht te worden. De handelwijze, welke men in sommige Wiskundige werken aantreft, van namelijk de trigonometrische differentiaal-functien, tot de integratie, in algebraïsche differentialen over te brengen, komt mij daartoe minder sierlijk voor, en in vele gevallen niet zoo kort te zijn, dan de integratie der trigonometrische differentialen zelf.

Nº. 161. Door

*H. F. Fijnje, Jan Pauw, P. van Eeghen Chr.,
R. LOBATTO, N. Bondt, A. van der Swan,
Moses Lemans, en J. B. Cantor.*

Stel dat het eene stuk lijnwaad lang is x ellen, dan is het andere $x + 6$ ellen; x ellen, tegen x stuivers de el, is x^2 stuivers, en $x + 6$ ellen, tegen $x + 6$ stuivers de el, is $x^2 + 12x + 36$ stuivers; zij bedragen dus te zamen $2x^2 + 12x + 36$ stuivers, en het eene stuk heeft meer gekost dan het andere, $12x + 36$ stuivers. Dit met elkan- der multiplicerende, komt

$$24x^3 + 216x^2 + 864x + 1296 = 226800$$

Men deele deze vergelijking door 24, komt

$$x^3 + 9x^2 + 36x + 54 = 9450$$

$$\text{dus } x^3 + 9x^2 + 36x - 9396 = 0$$

Van

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 517

Van deze vergelijking wordt bevonden $x = 18$ een wortel en dus $x - 18$ een deeler te zijn; de vergelijking dan door $x - 18$ deellende, komt:

$$x^2 + 27x + 522 = 0$$

waar van de beide wortels zijn:

$$x = -13\frac{1}{2} + \sqrt{339\frac{1}{4}} \text{ en } x = -13\frac{1}{2} - \sqrt{339\frac{1}{4}}$$

Wij vinden dus maar eenen rationalen wortel; namelijk $x = 18$, dus moet het eene stuk 18 en het andere 24 ellen lang geweest zijn.

No. 162. Door

JAN PAUW.

NB. In de opgave van dit Voorstel, zijn twee aanmerkelijke fouten ingeslopen. Vooreerst moet het grondtal van de datum één meer dan twee van de maand en één minder dan dat van het jaartal zijn: en ten tweede is het niet het jaartal, maar de som van maand en jaartal; dat een vierkant getal moet zijn.

OPLOSSING. — Stel dat alle de getallen in het tientallig stelsel overgebracht zijnde, z de som der maand en datum is; dan is $3z + 3$ de wortel uit de som van maand en jaartal, en dus is deze som van maand en jaartal $9(z + 1)^2$; $5(z + 1)^2 + z$ is bij gevolg tweemaal de maand met de som van jaartal en datum, en wij hebben alzoo de vierkantsvergelijking $9(z + 1)^2 + z = 1777$, waar uit gevonden wordt $z = 13$ voor de som van maand en datum, en dus $9(z + 1)^2 = 1764$ voor de som van maand en jaartal.

Stel verder het grondtal, van het tallel tot het jaar gebezigt x , dan is het grondtal van de datum $x - 1$, en het grondtal van de maand $x - 2$; wanneer wij dan de bedekte cijfer

Kk

door

512. ONTBINDINGEN VAN DE

door * voorgesteld x , en dus die door Δ afgebeeld $y + 1$ noemen, dan is:

de datum $y(x - 1) + (y + 1) \dots$ of $xy + 1$
 de maand $(y + 1)(x - 2) + y \dots$ of $xy + x - y - 2$
 het jaar $(y + 1)x^2 + 4x^3 + x + (y + 1)$

Wij moeten dus de som der twee eersten gelijk 13 en de som der twee laatsten gelijk 1764 stellen, en dit verschaft ons de twee volgende vergelijkingen

$$2xy + x - y - 1 = 13$$

$$\text{en } (y + 1)x^2 + 4x^3 + (y + 2)x - 1 = 1764$$

uit de eerste vindt men oogenblikkelijk $y = \frac{14 - x}{2x - 1}$
 en brengende deze waarde in de laatste, gaat zij over in

$$\frac{(13 + x)x^2}{2x - 1} + 4x^3 + \frac{(12 + 3x)x}{2x - 1} - 1765 = 0$$

welke met $2x - 1$ vermenigvuldigd, en herleid, geeft:

$$x^5 + 21x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3518x + 1765 = 0$$

waaruit $x = 5$ en dus $y = \frac{14 - x}{2x - 1} = 1$; zoo

dat $xy + 1 = 6$ de datum, $xy + x - y - 2 = 7$ de maand, en $(y + 1)x^2 + 4x^3 + x + (y + 1) = 1757$ het jaartal is, zijnde verder $* = y = 1$ en $\Delta = y + 1 = 2$.

Hieruit blijkt dus dat ik geboren ben den 6e. Julij A°. 1757 of wel den 12en dag (grondtal 4) van de 21e maand (grondtal 3) des jaars 24012 (grondtal 5.)

N°. 163. Door

JAN PAUW, R. Lobatto, A. van der Swan,
 P. van Eeghen Chz., en N. Bonds

Stel de jaren van den ouden vriend $= x$, die zijner beminde $= y$ en het zekere getal $= z$;
 voort

Voorts $x + z = a^2$, $y + z = b^2$ en $x + y - z = c^2$; dan is $a = c - 1$, $c = 2b$ en $a - b = 2z$. Als men nu de twee eerste vergelijkingen addeert en daar van de derde vergelijking aftrekt, komt $3z = a^2 + b^2 - c^2$, en vermenigvuldigt men deze met $a - b = 2z$, zoo heeft men $3(a - b) = 2(a^2 + b^2 - c^2)$. Maar $a = c - 1$ en $b = \frac{1}{2}c$; dus $a - b = \frac{1}{2}c - 1$, $a^2 = c^2 - 2c + 1$ en $b^2 = \frac{1}{4}c^2$; brengt men deze waarden over in $3(a - b) = 2(a^2 + b^2 - c^2)$, zoo heeft men

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{1}{2}c - 1\right) &= 2\left(c^2 - 2c + 1 + \frac{1}{4}c^2 - c^2\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{4}c^2 - 2c + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}c^2 - 4c + 2 \end{aligned}$$

en deze vergelijking met 2 vermenigvuldigende; zoo heeft men,

$$\begin{aligned} 3c - 6 &= c^2 - 8c + 4 \\ \text{waar door } c^2 &= 11c - 10 \\ \text{dus } c &= 1 \text{ of } c = 10. \end{aligned}$$

Door de eerste waarde van c vinden wij $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}(a - b) = -\frac{1}{4}$, $x = a^2 - z = \frac{1}{4}$ en $y = b^2 - z = \frac{1}{4}$.

De tweede waarde van c geeft, $a = 9$, $b = 5$, $z = \frac{1}{2}(a - b) = 2$, $x = a^2 - z = 79$ en $y = b^2 - z = 23$. Daar nu de eerste waarden van x en y in eenen natuurkundigen zin onbestaanbaar zijn, zoo volgt daar uit, dat $x = 79$ voor den ouderdom van den vriend en $y = 23$ voor dien zijner beminde genomen moeten worden.

Nº. 164. Door

P. van Eeghen Chs., J. B. Cantor, R. Lobatto, Mozes Lemans, Jan Paur, A. van der Swan, H. F. Fynje en N. Bondt.

Stel de jaren van Titus x^2 en die van Cajus $(x +$
Kk 2

514 ONTBINDINGEN VAN DE

$(x + 1)^2$, dan moet $\sqrt{(2x + 1)^2} = x + 1$ zijn, dus $2x + 1 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; gevolgellik $x^2 = 0$ en $x = 0$; dus is de ouderdom van *Titus* 16 en die van *Cajus* 25 jaar.

N^o. 165. Door

Jan Pauw, P. van Eeghen Chs., A. van der Swan, H. F. Fynje, J. R. Cantor, N. Bondt, Moses Lemans en R. Lobatto.

Stel de deelen $520 + x$ en $520 - x$, zoo moet

$$\frac{520 + x}{520 - x} + \frac{520 - x}{520 + x} = 80 \text{ zijn}$$

De beide leden van deze vergelijking met $(520 - x)(520 + x)$ vermenigvuldigende, zoo heeft men

$$(520 + x)^2 + (520 - x)^2 = 80(520 - x)(520 + x)$$

$$\text{of } 2 \times 520^2 + 2x^2 = 80(520^2 - x^2)$$

$$520^2 + x^2 = 40(520^2 - x^2)$$

$$\text{dus } 41x^2 = 39 \times 520^2 \text{ en } x = 520 \sqrt{\frac{39}{41}}$$

bijgevolg zijn de deelen $520(1 + \sqrt{\frac{39}{41}})$ en $520(1 - \sqrt{\frac{39}{41}})$.

N^o. 166. Door

Moses Lemans, A. van der Swan, R. Lobatto, N. Bondt, Jan Pauw, H. F. Fynje, J. R. Cantor en P. van Eeghen Chs.

Stel de rechte $x = 1$, $x^2 = 2$, $x^3 = 4$, $x^4 = 8$, dan zijn de vierkanten van de rechte $x^2 = 2$, $x^3 = 4$, $x^4 = 8$, $x^5 = 16$; deze vierkanten succesfivelijk met 2, 3, 4 en 5 vermenigvuldigende, en bij de producten successifelijk

VOORGAAANDE VOORSTELLEN. 529

2, 3, 4 en 5 optellende, zoo heeft men voor de deelen van het getal 144, $2x^2 - 4x + 4$, $3x^2 + 3$, $4x^2 + 8x + 8$, $5x^2 + 20x + 25$, waar van de som $14x^2 + 24x + 40 = 144$ zijn moet, dus

$$\begin{array}{r} 7x^2 + 12x + 20 = 72 \\ 7x^2 + 12x + 52 \\ \hline 49x^2 + 12 \cdot 7x = 364 \quad ? \\ 49x^2 + 12 \cdot 7x + 36 = 400 \\ \hline 7x + 6 = 4 = 20 \\ \hline \text{dus } x = 2 \text{ of } x = -8\frac{2}{7} \end{array}$$

door de eerste waarde van x vindt men voor de deelen 4, 15, 40, 85; en door de tweede waarde van x : $46\frac{2}{7}$, $44\frac{1}{7}$, $33\frac{2}{7}$, $19\frac{1}{7}$.

N^o. 167. Door

R. Lobatto, A. van der Swan, Moses Laurens, Jan Pauw, N. Bondt, en M. F. Fynje.

Men stelde voor de termen der meetkundige reeks x , xy , xy^2 en xy^3 , dan moet $x = 2$, $xy = 5$, $xy^2 = 25$ en $xy^3 = 98$ de arithmetische reeks zijn, dus

$$\begin{array}{l} xy^2 + x = 26 \text{ en } 2xy = 20 \\ \text{en } xy^3 + xy = 98 = 2xy^2 = 50 \\ \text{of } xy^2 + x = 2yx = 16 \\ \text{en } xy^3 + xy = 2xy^2 = 48 \end{array}$$

de tweede vergelijking door de eerste deelende, zoo heeft men $y = 3$, en deze waarde stellende in $xy^2 + x = 2xy = x(y - 1)^2 = 16$, komt $x = 4$; dus is de geometrische reeks 4, 12, 36, 108 en de arithmetische reeks 3, 7, 11, 15.

N^o. 168. Door

A. VAN DER SWAN, B. van Eeghen Chz.,
Jan Pauw, Moses Lemans, R. Lobatto, N.
Bondt, G. Dulman, H. Fockes Bakker en
J. B. Cantor.

Stel de jaren des zoons x , dan zijn die der
dochter $21 - x$; het verschil der vierkanten de-
zer getallen is $(21 - x)^2 - x^2 = 441 - 42x$;
dit nu moet gelijk zijn aan $(21 - x) \times 10 + x$; dus

$$441 - 42x = 210 - 9x$$

en $231 = 33x$; dus $x = 7$ en $21 - x = 14$.

N^o. 169. Door

R. Lobatto, Moses Lemans, A. VAN DER
SWAN, Jan Pauw, P. van Eeghen Chz.,
N. Bondt, H. Fockes Bakker en G. Dulman.

Stel den ouderdom des mans $x + 1$, dan is
die van de vrouw $x - 1$; stel voorts den ou-
derdom van den zoon $y + 3$, dan is die van de
dochter y ; en dan heeft men voorterst $2y + 3 = x$;
voorts $(2x)^2 - x^2 = 3x^2 = 2x \times 100 + x = 201x$,
waaruit $x = 67$; dus is de man 68 en de vrouw
66 jaar oud; en hier uit volgt $2y + 3 = 67$ of
 $2y = 64$, dus $y = 32$ de ouderdom der dochter
en $y + 3 = 35$ de ouderdom des zoons.

N^o. 170. Door

O. S. BANGMA en R. Lobatto;

Laat ABC (Fig. 136) de voorgestelde driehoek
zijn; beschrijf op de zijden van denzelfden, de
vies

vierkanten ABED, ACIH en BCKL; verleng HI, KL en DE, tot dat deze laatste door de beide eerste gesneden worde in G en F; trek GA en FB, tot dat zij elkander ontmoeten in M; trek eindelijk MC, dan zijn AMB, AMC en BMC de begeerde deelen van den driehoek.

Om dit te bewijzen, trekke men CG en BG; dan is $\triangle AMC : \triangle AGC = AM : AG$

en $\triangle AMB : \triangle AGB = AM : AG$

dus $\triangle AMC : \triangle AMB = \triangle AGC : \triangle AGB$

maar $\triangle AGC = \frac{1}{2} AC^2$ en $\triangle AGB = \frac{1}{2} AB^2$

dus $\triangle AMC : \triangle AMB = AC^2 : AB^2, \dots (1)$

op dezelfde wijze kan men aantoonen,

dat $\triangle BMC : \triangle AMB = BC^2 : AB^2, \dots (2)$

en uit deze beide evenredigheden volgt,

dat $\triangle AMC : \triangle BMC = AC^2 : BC^2, \dots (3)$

waardoor het Voorstel bewezen is.

No. 171. Door

Moses Lemans en R. Lobatto.

Het spreekt van zelf, dat de driehoek tweemaal zoo hoog als de regthoek zijn moet; stel dan de hoogten $2x$ en x en laat de basis $2a$ zijn, dan is de omtrek des regthoeks $= 2a + 2a + x + x = 4a + 2x$ en die des driehoeks $= 2a + \sqrt{a^2 + 4x^2} + \sqrt{a^2 + 4x^2} = 2a + 2\sqrt{a^2 + 4x^2}$ en daar deze omtrekken gelijk aan elkander moeten zijn, heeft men

$$4a + 2x = 2a + 2\sqrt{a^2 + 4x^2}$$

$$\text{of } a + x = \sqrt{a^2 + 4x^2}$$

en door de beide leden dezer vergelijking in het vierkant te brengen

$$a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + 4x^2$$

waaruit volgt $2ax = 3x^2$ en $x = \frac{2}{3}a$; dat is.

de hoogte des regthoeks moet gelijk $\frac{1}{2}$ en die des driehoeks gelijk $\frac{2}{3}$ van de basis zijn.

N^o. 172. Door

O. S. BANGMA.

Laten A, B, C en D (Fig. 137.) de vier gegevene stippen zijn; trek door A en D eene onbepaalde regte PQ, en uit C, loodregt op dezelve, de regte CE; maak CF = AD en trek door E, de regte BF; voorts uit C eene evenwijdige aan BF, en uit A en D loodlijnen op BF; deze zullen door hare onderlinge snijdingen in G, H, I en K, een vierkant GHIK voortbrengen;

want Rad: AD = Sin. \angle DAG : GK

en Rad: CF = Sin. \angle FCI : KI

maar CF = AD en \angle FCI = \angle CFB = $180^\circ - \angle$ GFE = \angle GAE = \angle DAG; dus . . . GK = KI; terwijl de hoeken in G, H, I en K, volgens de Constructie regt zijn. Dus is GHIK een vierkant.

I. AANMERKING. Wanneer men CF = AD aan den anderen kant van het punt C neemt, als in Figuur 138, en voorts op dezelfde wijze handelt als boven, zal men een ander vierkant GHIK verkrijgen, zoo als op dezelfde wijze als boven bewezen kan worden;

want Rad: AD = Sin. \angle ADI : HI

en Rad: CF = Sin. \angle CFK : KI

maar CF = AD en \angle CFK = \angle EEF = $180^\circ - \angle$ EDI = \angle ADI: dus KI = HI, terwijl de hoeken in G, H, I en K regt zijn.

II. AANMERKING. Als men eene onbepaalde regte lijn PQ door de punten D en C trekt, als in

In Figuur 139 en 140; voorts uit een van de beide overige punten, als B, eene loodlijn BE op de zelve trekt, $BE = DC$ maakt, de regte AF trekt, door B eene evenwijdige aan AF en uit D en C loodlijnen op AF trekt, zal men twee andere vierkanten GHK verkrijgen.

III. AANMERKING. Als men eindelijk eene onbepaalde regte lijn PQ door de punten D en B trekt, als in Figuur 141 en 142; voorts uit een van de overige punten, als C, eene loodlijn CE op de zelve trekt, $CE = DB$ maakt, de regte AF trekt, door C eene evenwijdige aan AF en uit D en B loodlijnen op AF trekt, zal men wederom twee andere vierkanten GHK verkrijgen.

IV. AANMERKING. In het algemeen zal elke stelkundige oplossing van een Voorstel, voor elk van de onbekenden, zoo veel verschillende waarden opleveren, als met de bekende dingen bestaanbaar zijn. Hier echter schijnt zulks niet plaats te hebben; want als men AD (Fig. 137.) $= m$, $BC = n$, $\angle BCE = \alpha$ en $\angle DAG = \angle BEC = x$ stelt, heeft men, uit de beschouwing van den driehoek BCE,

$$\sin. \angle BEC : BC = \sin. \angle CBE : FC$$

$$\text{dus } EC = BC \times \frac{\sin. \angle CBE}{\sin. \angle BEC} = n \cdot \frac{\sin. (x + \alpha)}{\sin. x}$$

Voorts $KI = FC \cdot \sin. \angle PCI = FC \cdot \sin. \angle BFC = FC \cdot \sin. x = n \sin. (x + \alpha)$, en $KG = AD \cdot \sin. \angle DAG = m \sin. x$ zijnde, heeft men, om dat $KI = KG$ zijn moet,

$$m \sin. x = n \sin. (x + \alpha)$$

$$= n \sin. x \cos. \alpha + n \cos. x \sin. \alpha$$

$$(m - n \cos. \alpha) \sin. x = n \cos. x \sin. \alpha$$

$$\text{waaruit volgt } \text{Tang. } x = \frac{n \sin. \alpha}{m - n \cos. \alpha}$$

Kk 5

Do

Deze formule levert voor den hoek $DAG = x$ maar eene waarde op, terwijl echter de lijn AG , ten opzichte van AD , ten minste zes verschillende stellingen hebben kan, zoo als uit de bovenstaande oplossing gebleken is,

Wanneer men FC berekent, zal men, door de vergelijkingen $FC = n \frac{\sin.(x + a)}{\sin.x}$ en . . .

$m \sin.x = n \sin.(x + a)$, vinden: $FC = m$ en niet $FC = \pm m$, terwijl echter FC (*Fig.* 137 en 138), op de loodlijn CE , ter wederzijden van het punt C genomen kan worden, blijkens het geen hier voren bewezen is.

Wanneer de punten A, B, C en D , zelve een vierkant vormen, is het Voorstel geheel onbepaald, dat is: AG (*Fig.* 137.) kan getrokken worden met eenen hoek DAG naar welgevallen;

de vergelijking $Tang.x = \frac{n \sin.a}{m - n \cos.a}$ geeft echter in dit geval voor den hoek DAG de bepaalde waarde van 45 graden; want $a = 90^\circ$ en $m = n$ zijnde, zoo heeft men $Tang.x = 1$ en $x = 45$ graden.

Dit Voorstel is niet alleen onbepaald, wanneer $ABCD$ een vierkant is, maar ook wanneer $AD = BC$ is en deze lijnen loodrecht op elkander staan, als in *Figuur* 143; want trek AG naar welgevallen, DK evenwijdig aan dezelve, en CI en BK loodrecht op dezelve, dan zal $GHIK$ altijd een vierkant zijn; want vermits de hoeken in E en G recht zijn, zoo is, uit de beschouwing der driehoeken BGR en AER , $\angle RBG = \angle RAE$; voorts $HG = BC \sin.\angle RBG$ en $HI = AD \sin.\angle RAE$; dus $HG = HI$; derhalve $GHIK$ een vierkant.

De vergelijking $Tang.x = \frac{n \sin.a}{m - n \cos.a}$ leert ons echter in dit geval niets anders, dan dat

dat de lijn AG op AD moet vallen; want als men overeenkomstig de veronderstelling, $m = n$ en $\alpha = 180$ stelt, verkrijgt men $Tang. x = 0$, dat is $x = \angle DAG = 0$ of 180 graden.

Dit Voorstel behelst mijns dunkens, vele zonderlinge omstandigheden, die wel eens opzettelĳk verdienden onderzocht en verklaard te worden.

ANDERS door J. R. Schmidt en R. Lobatta.

§. 1. Laten A, B, C en D (*Fig. 144.*) de gegeven punten, en PQRS het begeerde quadrat zijn. Dan moeten de hoeken P, Q en R om dat zij regt zijn in de cirkels liggen, welke op AB, AD en BC beschreven zijn, en het Voorstel komt dus eigenlijk hierop neder „om tusschen die gegeven „cirkels, PQ en RP zoodanig door A en B te „trekken, dat $PQ = PR$ zij.”

§. 2. Laat nu door B eenige andere willekeurige lijn P'R' getrokken worden en uit P' door A eene lijn P'Q' $= P'R'$; wanneer dan alle andere lijnen, die in *Fig. 144.* zijn aangewezen, getrokken worden, is $\angle BR'V = \angle BRV$ en $\angle BP'V = \angle BPV$, omdat zij in dezelfde cirkelsegmenten liggen, waaruit dan volgt, dat de driehoeken VR'P' en VRP gelijkvormig zijn, en dus $VP : PR = VP' : P'R'$ is.

Maar $PR = PQ$ en $P'R' = P'Q'$ zijnde, is dan ook $VP : PQ = VP' : P'Q'$ en wijl daarenboven de ingeslotene hoeken VPQ en VP'Q', als in het zelfde cirkelsegment liggende, gelijk zijn, zijn ook de driehoeken VPQ en VP'Q' gelijkvormig en dus $\angle PQV = \angle P'Q'V$, dat is $\angle AQV = \angle A'Q'V$; waaruit volgt, dat de meetkundige plaats van het punt Q een cirkel is, die door de punten A en V gaat. Het punt Q, waarin deze cirkel den cirkel op AD snijdt, zal alzoo een hoekpunt van het begeerde quadrat zijn, en dit gevonden heb-

hebbende, is het geheele quadrat bepaald. Wij moeten hierbij opmerken dat deze oplossing slechts één antwoord geeft, omdat de gevondene cirkel door A gaande, dat een punt van den cirkel op AD is, dien cirkel op AD nog slechts in één ander punt kan snijden.

§. 3. Wij kunnen ondertusfchen uit ieder punt P' twee perpendicularen $P'Q'$ op $P'R'$ stellen, welke gelijk aan $P'R'$ zijn; zoo wij dan alle de perpendicularen PQ , $P'Q'$ enz. naar den anderen kant stellen, zal de plaats van het punt Q een anderen cirkel zijn, welke door A en V gaat; en waarvan het snijpunt met den cirkel op AD eene tweede oplossing zal geven; het is nu duidelijk, dat gene dezer twee oplossingen, in eenig geval onmogelijk kan worden, omdat deze gevondene cirkels, door het punt A gaande, dat een punt van den cirkel op AD is, dien cirkel op AD noodzakelijk nog in een ander punt moeten snijden.

§. 4. Uit het geen gezegd is volgt dan deze eenvoudige Constructie.

1°. Laat (*Fig. 145.*) Cr perp. op AB getrokken worden, en door A, qq' perp. op AB getrokken hebbende, $Aq = Aq' = Ar$ genomen worden, dan zijn q en q' punten van de gezochte cirkels, waarin Q moet liggen.

2°. Wanneer dan door q , A en V en door q' , A en V cirkels getogen worden, zullen de punten Q en Q' , waarin deze cirkels den cirkel op AD snijden, de begeerde hoekpunten zijn, en hierdoor zullen wij de quadraten QPRS en $Q'P'R'S'$ verkrijgen.

§. 5. Bij deze oplossing is stilzwijgend ondersteld, dat de lijnen door A en C gaande, parallel moeten zijn, en dit gaf ons twee oplossingen. Maar wij kunnen even eens onderstellen dat de lijnen door A en D, of dat de lijnen door A en B gaande, parallel moeten zijn; iedere onderstelling zal ons weder twee oplossingen verschaffen, en
daar

daar wij reeds aangemerkt hebben, daar gene dezer oplossingen ooit onmogelijk kan worden, volgt hieruit, dat ons Voorstel altoos zes onderscheidene oplossingen toelaat.

§. 6. Van het bestaan dezer zes oplossingen kunnen wij ons ook aldus overtuigen. Bij onze oplossing hebben wij AB gecombineerd met AD en BC, maar wij kunnen even eens AB met AC en BD combineren (*Fig. 146.*) en zoo wij hierop onze Constructie toepassen, zullen wij twee oplossingen verkrijgen, waar bij de lijnen door A en D parallel zijn, en wij bekomen dus vier oplossingen door middel van AB als de middelste der drie lijnen te beschouwen. Dit nu kan even zoo goed op ieder der zes lijnen, die A, B, C en D vereenigen, als op de lijn AB worden toegepast, en wij bekomen dus $4 \cdot 6$ dat is 24 oplossingen. Maar nu moet vooral opgemerkt worden, dat wij op deze wijze alle de hoekpunten der quadraten in het bijzonder construeeren, en alzoo ieder der quadraten viermaal bekomen, waaruit volgt, dat er in het geheel $\frac{24}{4}$, dat is 6 verschillende oplossingen zullen zijn, welke in *Fig. 147.* alle zijn aangewezen.

§. 7. AANMERKING. — Wanneer de ligging der gegevene punten zoodanig is, dat het middelpunt M (*Fig. 144.*) des cirkels, welke de plaats van het punt Q is, in het middenpunt U van den cirkel op AD valt, dan liggen die cirkels geheel op elkander: en wijl het punt, waarin die cirkels elkander snijden, eene oplossing geeft, zal in dit geval ieder punt van den cirkel op AD aan de vraag voldoen, en er zal dus als dan een oneindig getal antwoorden zijn. Zie hier een paar gevallen, waarin deze omstandigheid plaats heeft.

§. 8. 1^o. Wanneer de vier punten A, B, C en D zelve een quadrat vormen. — In dit geval

val (*Fig. 148.*) geeft onze Constructie twee quadraten AQBP en DQCS, waarbij de lijnen door A en D parallel zijn; twee quadraten AQDR en BQCT, waarbij de lijnen door A en B parallel loopen, maar een oneindig aantal, waarbij de lijnen door A en C parallel zijn. Want pasten wij hierop onze Constructie toe, dan valt (*Fig. 149.*) r in B en q in D, en daar de cirkel op AD zelve door V gaat, valt M in U. Ieder punt van den cirkel op AD kan dus voor het punt Q genomen worden, en wij verkrijgen alzoo een oneindig getal quadraten, waarvan er in de Figuur slechts een paar zijn aangewezen, en waartoe niet alleen het quadrat ABCD zelve, maar ook het enkele punt V behoort, hetgeen in dit geval mede een oplossing is. Wij merken hier nog bij aan, dat de tweede oplossing, dat is de cirkel, die door q' , A en V gaat, hier niets anders, dan dit quadrat ABCD, en het punt V aanwijst.

§. 9. Deze omstandigheid heeft 2^o. ook altoos plaats, wanneer een der lijnen DB, die twee der punten vereenigt, of derzelfver verlengde, perp. is op het midden der lijn AC, die de twee anderen punten vereenigt, en dat daarbij $BD = AC$ is. (*Fig. 150 en 151.*) Er zijn in dit geval weder twee oplossingen $pqrs$ en PQRS, waarbij de lijnen door D en A; en twee quadraten $p'q'r's'$ en P'Q'R'S', waarbij de lijnen door D en C parallel zijn. Er zijn ondertuschen oneindig veel quadraten, waarbij de lijnen door B en D parallel zijn; want zoo wij, om deze te vinden, (*Fig. 151.*) Cr perp. BA maaken, en $Aq = Ar$ perp. op BA stellen, vallen q en V beide in den cirkel op AD, waaruit volgt, dat M weder in U valt. Wij hebben aan de eene zijde eenige van die quadraten, waartoe ook het punt V behoort, in *Fig. 151.* geteekend, en het is duidelijk, dat het voorige geval in dit is opgesloten.

§. 10. Wanneer de vier gegevene punten alle op eene rechte lijn liggen, en wel op gelijken afstand van elkander, neemt de Figuur (*Fig. 152*) eene zeer regelmatig gedachte aan; bij de quadraten PQRS en P'Q'R'S zijn de lijnen, die door A en C gaan parallel, de lijnen, die door A en D gaan, zijn parallel in de quadraten PQ'R'S' en P'QR''S'', en het zijn de quadraten *pqrs* en *p'q'r's*, waarbij de lijnen, door A en B gaande, parallel zijn.

§. 11. Er heeft nog een merkwaardig geval plaats, wanneer de punten A, B en C (*Fig. 153*) eenen gelijkzijdigen driehoek vormen, en het vierde punt D in het punt ligt, waar de drie perpendicularen elkander snijden. In dit geval onze Constructie volgende, zullen wij de drie punten S, T en U verkrijgen, welke als quadraten moeten worden aangemerkt, en er zullen buiten deze drie punten gene andere oplossingen mogelijk zijn, wijl ieder van die punten twee oplossingen in zich vereenigd: dit zal nog duidelijker worden, wanneer wij de drie paar quadraatjes van *Fig. 154*. beschouwen, welke de zes oplossingen van die Figuur uitmaken. Deze zullen meer en meer tot elkander naderen, naarmate de Figuur meer tot die van *Fig. 153*. nadert, tot dat eindelijk, wanneer *Fig. 154*. in *Fig. 153*. overgaat, ieder paar quadraatjes zich in een enkel punt vereenigt. Op dezelfde wijze zullen alle de oneindige quadraaten van *Fig. 151*. zich in het enkele punt V vereenigen, zoodra BD groter of kleiner dan AC wordt, en in het algemeen zal de omstandigheid, waarin twee quadraten zich in een punt vereenigen, plaats hebben in het geval, waarin een der lijnen, die twee der gegevene punten vereenigt, perp. is op de lijn, die de twee andere gegevene punten te zamen voegt.

§. 12. De eenige zwaarigheid welke misschien
nog

nog zou kunnen overblijven, bestaat hierin, hoe men de lijnen, die de gegeven punten vereenigen, moet combineren, om niet tweemaal eenzelfde quadraat te vinden? deze zwarigheid is van te weinig aanteel om er lang bij stil te blijven staan, het zal bij de minst aandagtige beschouwing van onze oplossing blijken, dat drie der lijnen van Fig. 155. combineerende, de lijnen door A en D en de lijnen door B en C parallel zullen zijn. Dat drie der lijnen van Fig. 156. gecombineerd, de oplossingen geven, waarbij de lijnen door A en C en door B en D parallel zijn, en dat de combinatie van drie lijnen uit Fig. 157. de antwoorden geeft, waarbij de lijnen door A en B gaande, en de lijnen door C en D gaande, parallel zijn.

Nº. 173. Door

O. S. BANEMAN.

Laten FE en GI zijn, eikander in H, HGBE, HECD, en len van den driehoek BF = y, AD = x, voorts BC = a, A heeft men door deze st

158.) de deellijnet le, zoo dat HFGH, de vier gelijke de- zijn. Stel AG = x, = z en FG = m, b en AB = c, dan alleen, de vergelijking

Verder is volgens DE GELDER (Beg. der Meetk. §. 625.)

$$\Delta FHG = \frac{1}{2} m^2 \cdot \frac{\sin. F \times \sin. G}{\sin. (F + G)} = \frac{1}{2} \Delta ABC$$

Maar (Beg. der Meetk. §. 625), uit de beschouwing van den driehoek ABG, $\cos. G = \frac{x - a \cos. A}{c}$, en uit de beschouwing van den

$$\text{driehoek BHR, } \cos. F = \frac{y - z \cos. B}{x}, \text{ dus}$$

$$\text{Cot. } G + \text{Cot. } F = \frac{x}{u \sin. A} + \frac{y}{z \sin. B} - \text{Cot. } A - \text{Cot. } B$$

$$\text{maar } \text{Cot. } G + \text{Cot. } F = \frac{\cos. G}{\sin. G} + \frac{\cos. F}{\sin. F} = \frac{\sin. F \cdot \cos. G + \cos. F \cdot \sin. G}{\sin. F \cdot \sin. G} = \frac{\sin. (F + G)}{\sin. F \sin. G},$$

$$\text{en op gelijke wijze } \text{Cot. } A + \text{Cot. } B = \frac{\sin. (A + B)}{\sin. A \cdot \sin. B};$$

$$\text{dus } \frac{\sin. (F + G)}{\sin. F \cdot \sin. G} = \frac{x}{u \sin. A} + \frac{y}{z \sin. B} - \frac{\sin. (A + B)}{\sin. A \cdot \sin. B}; \text{ multiplieert men hier mede de}$$

$$\text{boven gevondene vergelijking } m^2 \frac{\sin. F \cdot \sin. G}{\sin. (F + G)} = \frac{1}{2} \Delta ABC, \text{ zoo heeft men}$$

$$m^2 = \left(\frac{x}{u \sin. A} + \frac{y}{z \sin. B} - \frac{\sin. A \sin. B}{\sin. (A + B)} \right) \times \frac{1}{2} \Delta ABC$$

$$\text{maar } \sin. (A + B) = \sin. C \text{ en } \Delta ABC = \frac{1}{2} ab \sin. C, \text{ dus}$$

$$m^2 = \left(\frac{x \sin. C}{u \sin. A} + \frac{y \sin. C}{z \sin. B} - \frac{\sin. C^2}{\sin. A \sin. B} \right) \times \frac{1}{4} ab$$

$$\text{maar } \frac{\sin. C}{\sin. A} = \frac{c}{a} \text{ en } \frac{\sin. C}{\sin. B} = \frac{c}{b}, \text{ waar uit volgt,}$$

$$m^2 = \left(\frac{xc}{ua} + \frac{yc}{zb} - \frac{c^2}{ab} \right) \times \frac{1}{4} ab$$

$$\text{of } 4 m^2 = \left(\frac{bcx}{u} + \frac{acy}{z} - c^2 \right) \dots \dots \dots (2)$$

Daar verder ΔDAG de helft is van ΔABC , zoo heeft men $\Delta DAG : \Delta ABC = AD \times AG : AC \times AB = xu$; $bc = 1 : 2$, dus $bc = 2 \times xu$, en $\frac{bc}{u} = 2x$. Op gelijke wijze uit de drie-

hoeken EBF en CBA , $\frac{ac}{z} = 2y$; deze waarden
L 1 van

van $\frac{ac}{z}$ en $\frac{bc}{u}$ in de vergelijking (2) bringende, verkrijgt men $4m^2 = 2x^2 + 2y^2 - c^2$, dus $2x^2 + 2y^2 = 4m^2 + c^2$; maar volgens vergelijking (1) is $x + y = m + c$, dus $x^2 + 2xy + y^2 = m^2 + 2mc + c^2$, en deze aftrekkende van $2x^2 + 2y^2 = 4m^2 + c^2$, komt $x^2 - 2xy + y^2 = 3m^2 - 2mc$, dus $x - y = \sqrt{(3m - 2c)m}$; waar uit blijkt dat m op zijn kleinst gelijk $\frac{2}{3}c$ zijn kan; stellende dan $m = \frac{2}{3}c$, zoo wordt $x = y$; dus $2x = m + c = 1\frac{2}{3}c$; dus $x = y = \frac{5}{6}c$; derhalve $AF = BG = \frac{1}{3}AB$. Om u en z te bepalen, hebben wij (zie boven), $bc = 2xu$ en $ac = 2zy$, dus $bc = \frac{5}{3}cu$ en $ac = \frac{5}{3}cz$, waar door $u = \frac{3}{5}b$ en $z = \frac{3}{5}a$. Hier uit volgt deze eenvoudige constructie: maak $AF = BG = \frac{1}{3}AB$, $AD = \frac{2}{3}AC$ en $BE = \frac{1}{3}BC$, dan zullen FE en GD den voorgestelden driehoek ABC in vier gelijke deelen verdeelen, terwijl de punten F en G tevens zoo dicht bij elkander genomen zijn als mogelijk is.

Nº. 174. Door

J. R. SCHMIDT en R. Lobatto.

Laten de algemeene termen der vier gevraagde reeksen gesteld worden $a + bx$; $a' + b'x$; $a'' + b''x$; en $a''' + b'''x$; dan zullen de algemeene termen der vier andere reeksen, welke er ingevolge de oplossing voortkomen, zijn:

- (a) $a + a' - a'' + (b + b' - b'')x$
- (B) $a' + a'' - a''' + (b' + b'' - b''')x$
- (γ) $a'' + a''' - a + (b'' + b''' - b)x$
- (δ) $a''' + a - a' + (b''' + b - b')x$

en het product van deze vier Formulen zal dan gelijk moeten zijn, aan den algemeenen term van de reeks 4, 25, 64, 210, 440 enz. gemult met 24.

Om

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 349

Om nu dezen algemeenen term te vinden, nemen wij de achtereenvolgende verschillen, en vinden:

reeks 0, 4, 25, 84, 210, 440 enz.

1^o verschillen . . 4, 21, 59, 126, 230 enz.

2^o 17, 38, 67, 104 enz.

3^o 21, 29, 37 enz.

4^o 8, 8 enz.

waaruit voor de algemeene term wordt gevonden
(zie DE GELDER 2^o Curs.)

$$0 + 4(x-1) + 17 \frac{(x-1)(x-2)}{2} + \\ \dots + 21 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2 \cdot 3} + \dots \\ \dots + 8 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

dit volgens de magten van x gerangschikt, en met 24 gemultipliceerd, geeft ons derhalven

$$(a)(\beta)(\gamma)(\delta) = 8x^4 - 20x^3 + 4x^2 + 8x$$

en schrijvende het laatste lid in hare factoren.

$$(a)(\beta)(\gamma)(\delta) = 4x(-1+x)(2+x)(-1+2x)$$

daar nu (a) ; (β) ; (γ) ; en (δ) alle van den vorm $(p+qx)$ zijn, stellen wij

$$(a) \text{ of } (a+a'-a'') + (b+b'-b'')x = (-1+x)$$

$$(\beta) \text{ of } (a'+a''-a''') + (b'+b''-b''')x = (2+x)$$

$$(\gamma) \text{ of } (a''+a'''-a''') + (b''+b'''-b''')x = 4x$$

$$(\delta) \text{ of } (a''' + a - a') + (b''' + b - b')x = (-1+2x)$$

de som dezer vier vergelijkingen is

$$(a) + (\beta) + (\gamma) + (\delta) \\ \text{of } (a+a'+a''+a''') + (b+b'+b''+b''')x = 8x \text{ (E)}$$

maar nu is ook

$$(a) - 2(\beta) + 2(\gamma) \text{ of } \\ (-a-a'-a''+4a''') + (-b-b'-b''+4b''')x = -5+7x$$

$$(\beta) - 2(\gamma) + 2(\delta) \text{ of } \\ (4a-a'-a''-a''') + (4b-b'-b''-b''')x = -3x$$

$$(\gamma) - 2(\delta) + 2(a) \text{ of } \\ (-a+4a'-a''-a''') + (-b+4b'-b''-b''')x = 2x$$

$$(\delta) - 2(a) + 2(\beta) \text{ of } \\ (-a-a'+4a''-a''') + (-b-b'+4b''-b''')x = 5+2x$$

de laatste vier vergelijkingen ieder in het bijzonder opgeteld bij (E) komt er

$$\left. \begin{aligned} 5a + 5bx &= 5x \\ 5a' + 5b'x &= 10x \\ 5a'' + 5b''x &= 5 + 10x \\ 5a''' + 5b'''x &= -5 + 15x \end{aligned} \right\} \text{ dus } \begin{cases} a + bx = x \\ a' + b'x = 2x \\ a'' + b''x = 1 + 2x \\ a''' + b'''x = -1 + 3x \end{cases}$$

hetwelk de algemeene termen der gevraagde reeksen zijn, en bij gevolg zijn de reeksen

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \text{ enz. alg. term } x \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \text{ enz. } \cdot \cdot 2x \\ 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \text{ enz. } \cdot 1 + 2x \\ 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \text{ enz. } -1 + 3x \end{array}$$

AANMERKING. — Dit Voorstel behoort eigenlijk tot de onbepaalde Voorstellen, en men kan voor het zelve zoo veel antwoorden vinden als men wil. Want wij hebben slechts de vergelijking

$$(a)(\beta)(\gamma)(\delta) = 4x(-1+x)(2+x)(-1+2x)$$

en kunnen dus voor (a); (β); (γ); en (δ) die factoren neemen wel wij verkiezen, zoo wij slechts zorgen dat zij allen van den vorm (p + qx) zijn, en dat hun product het tweede lid voortbrengt: zoo kunnen wij bij voorbeeld (a) = 2nx; (β) = 2m(-1+x); (γ) = $\frac{2+x}{n}$

en (δ) = $\frac{-1+2x}{m}$ nemen, waarin m en n alle mogelijke geheelen en gebroken getallen verbeelden, en wij zullen op dezelfde wijze als boven handelende, voor ieder geval vier reeksen verkrijgen, welke aan de vraag voldoen.

N^o. 175. Door

J. R. SCHMIDT en R. Lobatto.

Stellen wij de algemeene termen onzer drie gevraagde arithmetische reeksen P ; Q en R te zijn, dan zijn de algemeene termen, die naarleiding van de opgave tot de reeksen behooren, die uit deze eerste, door vermenigvuldiging gevonden worden, PQ ; QR en PR ; en de algemeene termen der reeksen, die door de additie van deze laatsten twee aan twee ontstaan, zijn bijgevolg $PQ + QR$; $QR + RP$; en $RP + PQ$; of wel $Q(P + R)$; $R(Q + P)$ en $P(R + Q)$: het vermenigvuldigde van deze drie, dat is $PQR(P + Q)(Q + R)(R + P)$ moet dus gelijk zijn aan den algemeenen term van de reeks $3240; - 480$, enz., welke in de opgave van het voorstel is opgegeven.

Om dan de algemeene term der reeks te vinden, nemen wij de achtervolgende verschillen, en wij hebben

de reeks	3240:—	480:—	864:—	0:—	3000:0	0	80256 enz.
1 ^e verf.	—	3720:—	1344:—	864:—	3000:—	0	80256 enz.
2 ^e verf.	...	5064:—	2208:—	2136:—	6000:—	3000:—	80256 enz.
3 ^e verf.	7272:—	8136:—	9000:—	77256 enz.
4 ^e verf.	7344:—	17136:—	68256 enz.
5 ^e verf.	720:—	25200:—	51120 enz.
6 ^e verf.	25920:—	25920 enz.

(en de algemeene term is bijgevolg (zie DE GALDER de Curs.)

$$3240 = 3720(x-1) + 5064 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\dots + 7344 \cdot \frac{(x-1)(x-2) \dots (x-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + 720 \cdot \frac{(x-1)(x-2) \dots (x-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots$$

$$\dots + 25920 \cdot \frac{(x-1)(x-2) \dots (x-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

en wanneer wij dit volgens de magten van x ontwikkelen, hebben wij bijgevolg
 $PQR(P+Q)(Q+R)(R+P) = 25200x - 39300x^2 + 22698x^3 - 6084x^4 + 762x^5 - 36x^6$
 of het laatste lid in deszelfs factoren oplofende

$$PQR(P+Q)(Q+R)(R+P) = 6x(7-x)(6-x)(5-x)(4-x)(3-x)$$

het eerste lid der vergelijking bestaat uit zes factoren (welke alle van den vorm $p + qx$ zijn) waarvan de drie eerste, de algemeene termen der gezochte reeksen, en de drie anderen hunne sommen twee aan twee zijn. Wij moeten dus beproeven of wij onder de factoren van het tweede lid, er drie kunnen vinden, zoodanig dat hunne sommen twee aan twee, de drie overige geven, na eenige kleine beproevingen, vinden wij dat, schrijvende dit laatste lid aldus:

$x(-5+2x)(12-3x) \times (-5+3x)(12-2x)(7-x)$
de drie laatste factoren juist de sommen der drie eerste zijn, en wij hebben dus voor de algemeene termen onzer reeksen,

$P = x, Q = -5 + 2x, R = 12 - 3x$
zoo dat de reeksen zelve zijn:

1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	6 .	enz.	afg. term x
-3 .	-1 .	1 .	3 .	5 .	7 .	enz.	$-5 + 2x$
9 .	6 .	3 .	0 .	-3 .	-6 .	enz.	$12 - 3x$

N^o. 176. Door

J. R. SCHMIDT en R. Lobatto.

Om den n^{den} term en de som van n termen van de eerste reeks te vinden, vinden wij, even als bij de oplossing der voorgaande voorstellen,

reeks	2 . 7 .	11 . 17 . 28 .	enz.
1 ^{ste} verf.	... 5 .	4 . 6 . 11 .	enz.
2 ^{de} verf.	- 1 , 2 . 5 .	enz.
3 ^{de} verf.	3 . 3 .	enz.

dus de n^{de} term : $2 + 5(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

... + 3 . $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$

de som van n termen : $2n + 5 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \dots$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

Ll 4

voor

voor de tweede reeks hebben wij op dezelfde wijze;

$$\begin{array}{llll} \text{reeks} & . & . & . & 3 & . & 5 & . & 6 & . & 7 & . & 9 & \text{enz.} \\ 1^{\text{ste}} \text{ versch.} & . & . & . & 2 & . & & & 1 & . & 1 & . & 2 & \text{enz.} \\ 2^{\text{de}} \text{ versch.} & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 0 & . & 1 & \text{enz.} \\ 3^{\text{de}} \text{ versch.} & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 & \text{enz.} \end{array}$$

$$\text{dus de } m^{\text{de}} \text{ term: } 3 + 2(m-1) - \frac{(m-1)(m-1)}{2}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{de som van } m \text{ termen: } 3m + 2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

en wij hebben alzoo, naar aanleiding van het Voorstel, de twee volgende vergelijkingen:

$$1^{\circ}. 22 + 5(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \dots$$

$$3 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} = 3m + 2 \cdot \frac{m(m-1)}{2}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$2^{\circ}. 2(n-1) + 5 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$$

$$+ 3 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 36 +$$

$$\dots 18(n-2) - 9 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \dots$$

$$\dots 9 \cdot \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3}$$

of alles in magten van m en n geschreven:

$$1^{\circ}. 12(n^3 - 7n^2 + 24n + 26) = \dots$$

$$\dots m^4 - 10m^3 + 47m^2 + 34m$$

$$2^{\circ}. 3n^4 - 70n^3 + 621n^2 - 2234n + 1680 = a$$

uit de laatste is $n = 8$ een wortel; deze waarde

de van n in de eerste overbrengende, wordt dezelfde

$m^4 - 10m^3 + 47m^2 + 34m - 3384 = 0$
 waaruit $m = 9$, en dus zijn de beide getallen gevonden.

AANMERKING. Wij hebben hier niets anders dan de wortels in geheele getallen opgegeven; eigenlijk gezegd kunnen er 16 oplossingen plaats hebben; want de eerste vergelijking geeft voor n vier waarden, namelijk 8, 1, en twee imaginaire waarden; deze een voor een in de tweede vergelijking overgebracht zijnde, heeft de vergelijking in m voor elk geval vier wortels, en er kunnen dus 16 oplossingen plaats hebben. Wij hebben dezelve echter niet opgegeven, om dat zij alle of imaginaire of irrationnale getallen opleveren.

N^o. 177. Door

ABRAHAM FOCK, N. Bondt, en P. van Eeghen Chz.

Het verschil in lengte tusschen de plaatsen A en B, $212^{\circ} 10'$ en dus ook $360^{\circ} - (212^{\circ} 10') = 147^{\circ} 50'$ zijnde, terwijl de afstand van elk dezer plaatsen tot de naaste pool $90^{\circ} - (52^{\circ} 22') = 37^{\circ} 38'$ is, zoo is de afstand van deze plaatsen de basis van eenen gelijkbeenigen klootschen driehoek, waar van de beenen ieder $37^{\circ} 38'$ zijn en de tophoek $147^{\circ} 50'$.

$$\begin{aligned} \text{dus } \sin. \frac{1}{2} \text{ afst.} &= \sin. \frac{1}{2} \text{ Toph.} \times \sin. (37^{\circ} 38') \\ &= .96086 \times .610606 \\ &= .5867069 = \sin. 35^{\circ} 55' \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 71^{\circ} 51^{\circ} 2 \\ 60 \\ \hline 4311 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline \text{dus de is de afstand} = 1077 \frac{3}{4} \text{ mijl.} \\ \text{L 1 5} \qquad \qquad \qquad \text{N^o. 178.} \end{array}$$

N^o. 178. Door

J. R. SCHMIDT.

Aannemende dat de zonsweg eene bepaalde cirkel op den aardbol is (zoo als zulks bij voorbeeld op alle de aardgloben plaats heeft) hebben wij de volgende oplossing.

Laat FG (*Fig. 158.*) de evenagtscirkel en HI de zonsweg zijn, laten verder P de pool en A en B de gegevene plaatsen verbeelden, dan zijn EC en AC benevens ED en DB gegeven, en bovendien is de hoek HEF, welke de zonsweg met de evenagtscirkel maakt bekend: wij zullen dus moeten aantoonen, hoe door middel van deze gegevens de punten L en K benevens L' en K' kunnen bepaald worden.

Ten eerste is in den driehoek PAB bekend, $PA = \text{compl. } AC$; $PB = \text{compl. van } BD$, en $\angle APB = CD = ED - EC$, en hierdoor kan $\angle A$ berekend worden.

Verder is hierdoor in den driehoek LAC bekend, de rechte hoek C, de hoek A en de zijde AC, waardoor de hoek L benevens de zijde LC gevonden wordt, trekken wij hier af de gegevene EC, dan blijf er LE, en hierdoor is dus het punt L en bijgevolg ook L' bepaald.

Eindelijk hebben wij in den driehoek LKE, de zijde LE benevens de hoeken L en E bekend, waardoor EK berekend wordt en dus de punten K en K' gevonden worden.

N^o. 179. Door

O. S. BANGMA.

De gezigteinders van twee plaatsen snijden elkander in twee punten; ieder van deze punten staat 90 graden van het toppunt van elke plaats en

en is bijgevolg de pool van den hoog, die de beide plaatsen vereenigt; voorts is het verschil in lengte tusſchen de beide plaatsen gelijk aan het verschil der regte opklimmingen van hare toppunten, en de breedte van elke plaats gelijk aan de declinatie van het toppunt dezer plaats. Wanneer nu de regte opklimming van een der toppunten voor een zeker tijdstip gegeven is, zal men aan den hemel de plaatsen van de snijpunten der beide gezigteinders op de volgende wijze kunnen bepalen. Laten A en B (*Fig. 159.*) de toppunten zijn van twee plaatsen a en b op de aarde, C en D de snijpunten van de gezigteinders dezer plaatsen en P de pool; dan zijn AP en BP bekend door de breedten van a en b , en $\angle APB$ door de lengten van a en b , dus kan, uit den driehoek PAB, de hoek PAB berekend worden; hier aftrekkende $\angle DAB = 90$ graden (omdat D de pool van AB is), zoo heeft men den hoek PAD; maar AD = 90 graden zijnde, zoo kan uit den driehoek PAD, de zijde PD en $\angle APD$ berekend worden, zijnde PD het complement van de declinatie van het punt D en $\angle APD$ het verschil in regte opklimming tusſchen de punten A en D, waardoor dus de plaats van het punt D bepaald is; maar PD verlengende, zal dezelve door het punt C gaan; dus is $PC = 180^\circ - PD$ en $\angle APC = 180^\circ - \angle APD$, waardoor ook de plaats van het punt C bepaald is.

N^o. 180. Door

R. LOBATTO, *Mozes Lemans*, P. van Eeghen Chz.,
N. Bondt, Jan Pauw, en A. van der Swan.

Volgens opgave is (*Fig. 160*), $BE - BD = AB + BC - BE$, of $2 BE = BD + AB + BC$. Vermits nu de lijnen BD, AB en BC, rekenkundig

dig evenredig zijn, verandert de vergelijking in de volgende: $2 \times BE = 3 \times AB$; deze met BD vermenigvuldigende, komt $2 \times BE \times BD = 3 \times AB \times BD$; dat is $2 AB \times BC = 3 AB \times BD$ (VAN SWINDEN pag. 222), of $2 \cdot BC = 3 \cdot BD$ en $2 (BD + 4) = 3 \times BD$, waaruit $BD = 8$; dus $AB = 10$, $BC = 12$ en $BE = 15$.

N^o. 181. Door

A. van der Swan, R. LOBATTO, P. van Eeghen Chz., Mozes Lemans, N. Bondt, en J. B. Cantor.

Daar ah (Fig. 161) $= hi = ai$ is, volgens onderstelling, zoo is ook $dh = bi$. Men stelde de zijde des vierkants $= a$ en $dh = bi = x$; dan is $hc = ci = a - x$ en dus $2(a - x)^2 = hi^2 = ab^2 + bi^2 = a^2 + x^2$, waaruit verder volgt:

$$2a^2 - 4ax + 2x^2 = a^2 + x^2$$

$$x^2 - 4ax + 4a^2 = 3a^2$$

$$\text{dus } x - 2a = \pm a\sqrt{3} \text{ en } x = 2a \pm a\sqrt{3}.$$

Hieruit volgt deze Constructie:

Beschrijf uit C , met den radius cd , den boog db , en uit d en b , met denzelfden radius, twee bogen, welke den boog db zulten snijden in g en f ; trek voorts uit a door g en f , de lijnen ai en ah , als ook hi ; dan zal ahi de begeerde driehoek zijn: want de loodlijn van den gelijkzijdigen driehoek dgc is $\frac{1}{2}\sqrt{3}a^2$, dus $gp = a - \frac{1}{2}\sqrt{3}a^2$ en $2gp = bi = x = 2a - \sqrt{3}a^2$.

NB. In dit Voorstel staat *des driehoeks*: moet zijn *des vierkants*; dewijl anders het Voorstel onverstaanbaar is.

Nº. 182. Door

R. LOBATTO, Jan Paurw, N. Bondt, P. van Eeghen Chz., H. F. Fynje, Moses Lemans, en A. van der Swan.

Daar $\angle BEC = 112^{\circ} 37' 11'',95$ is, is $\angle BEA + \angle CED = 180^{\circ} - 112^{\circ} 37' 11'',95 = 67^{\circ} 22' 48'',05$; maar $\angle BEA = \angle CED$, dus ieder van deze hoeken $33^{\circ} 41' 24'',025$. Wijders is

$$\begin{aligned} ED : CD &= Rad : Tang . \angle CED \\ \text{en } AE : AB &= Rad : Tang . \angle BEA \\ \text{dus } AE - ED : AB - CD &= Rad : Tang . \angle BEA \\ \text{dus } AE - ED &= \frac{AB - CD}{Tang . BEA} = (AB - CD) Cot . BEA \\ &= 100 : Tang . 33^{\circ} 41' 24'',025 \\ &= 150 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(AE - ED) = 75$$

$$\frac{1}{2}(AE + ED) = 525$$

$$\text{dus } AE = 600 \text{ en } ED = 450$$

Om wijders AB en DC te vinden, heeft men deze evenredigheid : $AE : ED = AB : DC$ of $AE - ED : AE = AB - DC : AB$ en $AE - ED : ED = AB - DC : DC$; hierdoor wordt gevonden $AB = 400$ en $DC = 300$.

Nº. 183. Door

J. R. SCHMIDT.

Dit Voorstel staat met het 98e van dit deel in zulk een naauw verband; dat het genoeg zal zijn dit verband te hebben aangewezen, om de oplossing van ons voorstel uit die van het 98e afte leiden.

Laten dan *Fig. 88.* de zijden AB, BC en AC door p , q en r worden aangetoond. Zoo wij dan de middellijn des omgeschreven cirkels, als gegeven

ven zijnde, a noemen; de radius des ingeschreven cirkels y noemen en den afstand der middelpunten van deze cirkels z stellen, hebben wij in het 7e voorstel 1e deel der wiskunstige oeffeningen bewezen dat wij zullen hebben

$$a = \frac{2pqr}{\sqrt{(p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}$$

$$y = \frac{\sqrt{(p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}{2(p+q+r)}$$

$$\text{enz} = \sqrt{\frac{p^2 q^2 r^2}{(p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}$$

$$\dots \dots \dots = \frac{pqr}{p+q+r}$$

multiplicerende nu de twee eersten, komt $ay = \frac{pqr}{p+q+r}$ en substituerende deze waarde en die van a in de waarde van z komt er

$z = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - ay\right)}$ of $z = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4ay}$ waaruit blijkt. „ Dat de middellijn des omgeschreven cirkels van eenigen driehoek constant zijnde, de afstand der middelpunten van in- en omgeschreven cirkel, een maximum of minimum zal zijn, naarmate de radius des ingeschreven cirkels een minimum of maximum is.”

Daar nu in het 98e voorstel gebleken is, dat voor onze driehoek de radius des ingeschreven cirkels alleen een maximum is in het geval van $\angle B = 39^\circ 57' 42'' 73$ waarmede overeenstemt $AB = a \cdot \frac{1}{32} \sqrt{1174 + 286 \sqrt{13}}$, $BC = a \cdot \frac{2}{3} (16 + \sqrt{13})$ en $AC = a \cdot \frac{1}{3} \sqrt{22 - \sqrt{13}}$ (zijnde aldaar in de twee eerste waarden een drukfout ingeslopen); zoo zijn het deze zelfde waarden welke onze afstand der middelpunten een minimum maken, bij welk minimum $z = a \cdot \frac{1}{16} \sqrt{3 (97 - 26 \sqrt{13})}$ is.

De waarde van ϕ of $\angle B = \phi$ welke in het 98e verschild gebleken is de middellijn des ingeschreven

geschreven cirkels tot een minimum te maken, doch welke in de strikten zin op geen driehoek past, omdat de driehoek dan geheel verdwijnt, geeft bij gevolg voor onzen afstand een maximum waarbij $x = \frac{1}{2}a$ is, en men zal zich het bestaan van dit maximum en minimum nog duidelijker kunnen voor oogen stellen, wanneer men zich de moeite geeft, van de kromme lijn te construeeren, waarin zich het middelpunt des ingeschreven cirkels in de onderscheidene standen des driehoeks bevindt.

N^o. 184. Door

J. R. SCHMIDT.

Wijl het verschil der hoeken A en B (*Fig. 88*) een constanten grootheid moet zijn, stellen wij $\angle A = \varphi + \alpha$ en $\angle B = \varphi - \alpha$, dan is $\angle C = 180^\circ - 2\varphi$: stellen wij dan de middel-lijn des omgeschreven cirkels a , dan vinden wij, even als in het 96e voorstel handelende, $AB = a \sin. 2\varphi$; $BC = a \sin. (\varphi + \alpha)$ en $AC = a \sin. (\varphi - \alpha)$.

Stellen wij verder den inhoud x den omtrek y , de radius des ingeschreven cirkels z , en den afstand der middelpunten van om en ingeschreven cirkel v , dan zullen wij hebben

$$x = \frac{1}{2}a^2 \sin. (\varphi + \alpha) \sin. (\varphi - \alpha) \sin. 2\varphi$$

..... (zie opl. 96e voorstel)

$$y = a \sin. (\varphi + \alpha) + \sin. (\varphi - \alpha) + \sin. 2\varphi$$

..... (zie opl. 97e voorstel)

$$z = a \cdot \frac{\sin. (\varphi + \alpha) \sin. (\varphi - \alpha) \sin. 2\varphi}{\sin. (\varphi + \alpha) + \sin. (\varphi - \alpha) + \sin. 2\varphi}$$

..... (zie opl. 98e voorstel)

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4az} \dots (\text{zie opl. 183e voorstel})$$

$$\text{Nu is } \sin. (\varphi \pm \alpha) = \sin. \varphi \cos. \alpha \pm \cos. \varphi \sin. \alpha;$$

$$\sin. 2\varphi = 2 \sin. \varphi \cos. \varphi$$

en

en $\sin.(\phi + \alpha) \cdot \sin.(\phi - \alpha) = \cos^2. \alpha - \cos^2. \phi$
 en bijgevolg

$$\sin.(\phi + \alpha) \sin.(\phi - \alpha) \sin. 2\phi = \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots 2(\cos^2. \alpha - \cos^2. \phi) \sin. \phi \cdot \cos. \phi$$

$$\sin.(\phi + \alpha) + \sin.(\phi - \alpha) + \sin. 2\phi = \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots 2(\cos. \phi + \cos. \alpha) \sin. \phi$$

$$\text{en } \frac{\sin. \phi \times \alpha \times \sin.(\phi - \alpha) \times \sin. 2\phi}{\sin.(\phi + \alpha) + \sin.(\phi - \alpha) + \sin. 2\phi} =$$

$$\dots \dots \dots (\cos. \alpha - \cos. \phi) \cos. \phi$$

substituerende nu deze uitdrukkingen in de waarden van x , y , z en v , verkrijgen wij

$$x = -a^2 (\cos^3. \phi - \cos. \phi \cdot \cos^2. \alpha) \sin. \phi$$

$$y = 2a (\cos. \phi + \cos. \alpha) \sin. \phi$$

$$z = -a (\cos^2. \phi - \cos. \phi \cos. \alpha)$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4az}$$

en wij moeten nu onderzoeken wanneer ieder dezer formules in het bijzonder een maximum of minimum wordt.

1°. Nemen wij dan den inhoud, dan hebben wij

$$x = -a^2 (\cos^3. \phi - \cos. \phi \cos^2. \alpha) \sin. \phi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -a^2 (4\cos^4. \phi - (3 + 2\cos^2. \alpha) \cos^2. \phi + \cos^2. \alpha)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} = 2a^2 (8\cos^3. \phi - (3 + 2\cos^2. \alpha) \cos. \phi) \sin. \phi$$

Wanneer nu $\frac{\partial x}{\partial \phi} = 0$ gesteld wordt, hebben wij door een 4e magts vergelijking van de 2e magtsform optelosen

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\cos. \phi = \pm \dots \dots \dots}{3 + 2\cos^2. \alpha \pm \sqrt{((3 + 2\cos^2. \alpha)^2 - 16\cos^2. \alpha)}}}$$

$$\text{maar } (3 + 2\cos^2. \alpha)^2 - 16\cos^2. \alpha = 9 - 4\cos^2. \alpha + 4\cos^4. \alpha = 9 - 4\cos^2. \alpha (1 - \cos^2. \alpha)$$

$$= 9 - 4\cos^2. \alpha \sin^2. \alpha = 9 - (2\sin. \alpha \cos. \alpha)^2$$

$$= 9 - \sin^2. 2\alpha$$

en

en $\text{Cos. } 2\alpha = \text{Cos}^2 \alpha - \text{Sin}^2 \alpha = 2\text{Cos}^2 \alpha - 1$ zijnde, is $2\text{Cos}^2 \alpha = \text{Cos. } 2\alpha + 1$, waardoor $3 + 2\text{Cos}^2 \alpha = 4 + \text{Cos. } 2\alpha$, zoo dat,

$$\text{Cos. } \phi = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 + \text{Cos. } 2\alpha \pm \sqrt{(9 - \text{Sin}^2 \cdot 2\alpha)}}{2}}$$

welke formule vier verschillende waarden voor $\text{Cos. } \phi$ bevat.

Zonder nu alle deze waarden van $\text{Cos. } \phi$ aan de verkenning vergelijking $\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} = 2\alpha^2 (8\text{Cos}^2 \cdot \phi - (4 + \text{Cos. } 2\alpha)) \text{Cos. } \phi \text{Sin. } \phi$ te beproeven, merken wij op, dat $\angle C = 180^\circ - 2\phi$ zijnde $2\phi < 180^\circ$ of $\phi < 90^\circ$ moet zijn, en dat dus $\text{Cos. } \phi$ en $\text{Sin. } \phi$ beide positief moeten genomen worden. Wij verwerpen alzoo oogenbliklijk de twee waarden van $\text{Cos. } \phi$, welke met het teeken — aangedaan zijn, en behouden dus alleen, om aan de verkenning vergelijking getoetst te worden,

$$\text{Cos. } \phi = + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 + \text{Cos. } 2\alpha \pm \sqrt{(9 - \text{Sin}^2 \cdot 2\alpha)}}{2}}$$

en wij moeten dus onderzoeken of deze waarden van $\text{Cos. } \phi$,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} = 2\alpha^2 (8\text{Cos}^2 \cdot \phi - (4 + \text{Cos. } 2\alpha)) \text{Cos. } \phi \text{Sin. } \phi$$

positief of negatief maken: maar $\text{Cos. } \phi$ en $\text{Sin. } \phi$

beide positief zijnde zal $\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2}$ positief of negatief

zijn, naarmate de factor $8\text{Cos}^2 \cdot \phi - (4 + \text{Cos. } 2\alpha)$ positief of negatief is, brengen wij dan in deze factor de waarde van $\text{Cos. } \phi$, komt er $\pm \dots \sqrt{(9 - \text{Sin}^2 \cdot 2\alpha)}$, waaruit blijkt dat van de twee waarden van $\text{Cos. } \phi$ de bovenste tot een minimum en de benedenste tot een maximum van den inhoud x behoort.

$$\text{Nu is pit Cos. } \phi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 + \text{Cos. } 2\alpha + \sqrt{(9 - \text{Sin}^2 \cdot 2\alpha)}}{2}}$$

M m

Sin.

544 ONTBINDINGEN VAN DE

$$\sin. \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \cos. 2\alpha \pm \sqrt{(9 - \sin^2. 2\alpha)}}.$$

en dus $\sin. \varphi \cos. \varphi = \frac{1}{8} \sqrt{(6 + 2 \sin^2. 2\alpha \pm 2 \cos. 2\alpha \sqrt{(9 - \sin^2. 2\alpha)})}$ en substituerende dit in de waarde van den inhoud, dat is in $x = a^2 (\cos^2. \varphi - \cos^2. \alpha) \sin. \varphi \cos. \varphi$ komt er na herleiding en in aanmerking nemende

$$\text{dat } \cos^2. \alpha = \frac{1 + \cos. 2\alpha}{2} \text{ is,}$$

$x = -a^2 \cdot \frac{1}{8} (-3 \cos. 2\alpha \pm \sqrt{(9 - \sin^2. 2\alpha)}) \times$
 $\dots \sqrt{(6 + 2 \sin^2. 2\alpha \pm 2 \cos. 2\alpha \sqrt{(9 - \sin^2. 2\alpha)})}$
 zal nu de waarde van $\cos. \varphi$ een wezenlijk maximum of minimum voor onze driehoek geven, moet de inhoud positief en dus de factor $-3 \cos. 2\alpha \pm \sqrt{(9 - \sin^2. 2\alpha)}$ negatief zijn, stellen wij dan dien factor onder deze gedaante:

$$-3 \cos. 2\alpha + \sqrt{(9 \cos^2. 2\alpha + 8 \sin^2. 2\alpha)}$$

dan is het blijkbaar, dat alleen de benedenste waarde aan dit vereischte voldoet, daar $\dots \sqrt{(9 \cos^2. 2\alpha + 8 \sin^2. 2\alpha)} > 3 \cos. 2\alpha$ zijnde, de bovenste waarde altoos positief zal zijn, en dus den inhoud negatief zal maken

Wij besluiten hier dan uit dat alleen $\cos. \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{4 + \cos. 2\alpha - \sqrt{(9 - \sin^2. 2\alpha)}}$ welke

ke den inhoud tot een maximum maakt, op onzen driehoek past. Zijnde voor dit maximum de inhoud:

$$x = \frac{1}{8} a^2 (3 \cos. 2\alpha + \sqrt{(9 - \sin^2. 2\alpha)}) \times \dots \sqrt{(6 + 2 \sin^2. 2\alpha + 2 \cos. 2\alpha \sqrt{(9 - \sin^2. 2\alpha)})}$$

VORBEELD: — Laat $\alpha = 90^\circ$ gegeven zijn, dan is $2\alpha = 60^\circ$, $\cos. 2\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin. 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, hierdoor wordt, voor het maximum van den inhoud $\cos. \varphi = \frac{1}{4} \sqrt{(9 - \sqrt{33})}$, $\sin. \varphi = \frac{1}{4} \sqrt{(7 + \sqrt{33})}$,
 AB

$AB = a \sin. 2\varphi = a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(30 + 2\sqrt{33})}$, $BC = a \sin. (\varphi + \alpha) = a \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{7\sqrt{3} + 3\sqrt{11}} + \sqrt{9 - \sqrt{33}})$ en $AC = a \sin. (\varphi - \alpha) = \frac{1}{2} (\sqrt{7\sqrt{3} + 3\sqrt{11}} - \sqrt{9 - \sqrt{33}})$ voor de drie zijden, terwijl de inhoud wordt $x = a^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} (9 + \sqrt{33}) \sqrt{(30 + 2\sqrt{33})}$ dat is $x = a^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{6} (69 + 11\sqrt{33})$

II°. Om het maximum of minimum van den omtrek te vinden, hebben wij $y = 2a(\cos. \varphi + \cos. \alpha) \sin. \varphi$,

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 2a (2 \cos^2. \varphi + \cos. \varphi \cos. \alpha - 1);$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = -2a(4 \cos. \varphi + \cos. \alpha) \sin. \varphi; \text{ wordt}$$

nu $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$ gesteld, vindt men $\cos. \varphi = \dots$

$$= \frac{\cos. \alpha \pm \sqrt{8 + \cos^2. \alpha}}{4} \text{ en daar wij reeds}$$

boven opgemerkt hebben, dat $\cos. \varphi$ en $\sin. \varphi$ positief moeten zijn, om op onzen driehoek te kunnen worden toegepast, hebben wij alleen de eerste waarde van $\cos. \varphi$, dat is $\cos. \varphi = \dots$

$= \frac{\cos. \alpha + \sqrt{8 + \cos^2. \alpha}}{4}$, welke altoos positief is, aan $\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}$ te toetsen, brengen wij dan die

waarde van $\cos. \varphi$ in de waarde van $\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}$, komt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = -2a \sqrt{8 + \cos^2. \alpha} \sin. \varphi \text{ welke aantoon-}$$

toont, dat $\cos. \varphi = \frac{\cos. \alpha + \sqrt{8 + \cos^2. \alpha}}{4}$

den omtrek een maximum maakt, omdat $\sin. \varphi$

positief zijnde, $\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}$ negatief wordt.

$$\text{Nu is } \sin. \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2. \varphi}}{Mm} = \frac{1}{4} \sqrt{4 - (\cos. \alpha + \sqrt{8 + \cos^2. \alpha})^2}$$

$\frac{1}{4} \sqrt{(8 - 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sqrt{(8 + \cos^2 \alpha)})}$
dat is, herleidende,

$$\sin \phi = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{8 + 8 \sin \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{2}} + \dots \sqrt{\frac{8 - 8 \sin \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{2}} \right)$$

en brengende de waarden van $\cos \phi$ en $\sin \phi$ in de waarde van y , zoo is in het algemeen, voor dit maximum, de omtrek

$$y = 2a (3 \cos \alpha + \sqrt{(8 + \cos^2 \alpha)}) \times \dots \left(\sqrt{\frac{8 + 8 \sin \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{2}} + \sqrt{\frac{8 - 8 \sin \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{2}} \right)$$

VOORBEELD. — Pasfen wij dit weder toe op het geval van $\alpha = 30^\circ$, is $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; $\cos \phi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$; en voor ons maximum, $\cos \phi = \frac{1}{8} (-3 + \sqrt{35})$, $\sin \phi = \frac{1}{8} (\sqrt{5} + \sqrt{21})$; $AB = a \sin 2\phi = a \cdot \frac{1}{8} (3 \sqrt{15} + \sqrt{7})$; $BC = a \sin(\phi + \alpha) = a \cdot \frac{1}{8} (\sqrt{15} + 3\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{35})$; $AC = a \cdot \frac{1}{8} (\sqrt{15} + 3\sqrt{7} + \sqrt{3} - \sqrt{35})$, zoo dat de omtrek $y = a \cdot \frac{1}{8} (5 \sqrt{15} + 7 \sqrt{7})$.

III°. Voor het maximum of minimum van den straal des ingeschreven cirkels hebben wij

$$s = -a (\cos \phi - \cos \alpha) \cos \phi$$

$$\frac{\partial s}{\partial \phi} = a (2 \cos \phi - \cos \alpha) \sin \phi;$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \phi^2} = a (4 \cos^2 \phi - \cos \phi \cos \alpha - 2).$$

stellen wij dan $\frac{\partial s}{\partial \phi} = 0$, vinden wij 1°. $\sin \phi = 0$ of 2°. $\cos \phi = \frac{1}{2} \cos \alpha$.

De eerste oplossing $\phi = 0$ is, offchoon zij

$\frac{\partial^2 s}{\partial \phi^2} = a$ makende, een minimum aantoon, niet dan in eenen oneigenlijken zin op onze driehoek toetepasien, wyl zij $\angle B = \phi - \alpha = -\alpha$, en dus negatief maakt.

Maar

Maar de tweede oplossing $\cos \phi = \frac{1}{2} \cos \alpha$ maakt $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = a (\frac{1}{2} \cos^2 \alpha - 2)$, welke waarde negatief zijnde, een maximum aantoont, bij welk maximum de straal des ingeschreven cirkels gelijk is aan

$$z = -a (\cos \phi - \cos \alpha) \cos \phi = \frac{1}{4} a \cos^2 \alpha$$

VOORBEELD. — Nemende nogmaals $\alpha = 30^\circ$ is $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; $\cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, dus $\cos \phi = \frac{1}{4} \sqrt{3}$, $\sin \phi = \frac{1}{4} \sqrt{13}$; verder voor de zijden, $AB = a \sin 2\phi = a \cdot \frac{1}{8} \sqrt{39}$; $BC = a \sin(\phi + \alpha) = \frac{1}{8} a (\sqrt{39} + \sqrt{3})$, $AC = a \sin(\phi - \alpha) = \frac{1}{8} a (\sqrt{39} - \sqrt{3})$ en eindelijk voor den straal des ingeschreven cirkels $z = \frac{1}{4} a \cos^2 \alpha = \frac{3}{16} a$.

IV°. Om den afstand der middelpunten tot een maximum of minimum te maken is

$y = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4az}$, waaruit even als in het 183e voorstel, blijkt, dat y grooter of kleiner wordende naar mate z kleiner of grooter wordt, het gevonden maximum voor z een minimum voor y zal geven, bij welk minimum, om dat als dan $z = \frac{1}{4} a \cos^2 \alpha$ is, $y = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4az} = \frac{1}{2} a \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} a \sin \alpha$ zal zijn.

VOORBEELD. Is dus $\alpha = 30^\circ$ zal de afstand der middelpunten van omgeschreven en ingeschreven cirkels op zijn kleinst $= \frac{1}{4} a$ zijn.

N°. 185. Door

J. R. SCHMIDT.

Stel (*Fig. 85.*) den hoek $A = \phi + \phi'$, den hoek $B = \phi - \phi'$, dan is de hoek $C = 180^\circ - 2\phi$. Zoo wij nu den gegebenen omtrek $= s$ en de radius des ingeschreven cirkels z stellen, hebben wij in het vorige voorstel gevonden, dat

voer de middellijn des omgeschreven cirkels $= a$ zijn zal.

$AB = a \sin. 2\phi$, $BC = a \sin. (\phi + \phi')$,
 $AC = a \sin. (\phi - \phi')$ en verder
 $s = 2a (\cos. \phi + \cos. \phi') \sin. \phi$ en $z = -a$
 $(\cos^2. \phi - \cos. \phi. \cos. \phi')$, welke laatste formule alzoo in ons geval een maximum of minimum moet zijn.

Zoeken wij nu uit de 1^o. aequatie de waarde van $\cos. \phi'$ zoo vinden wij $\cos. \phi' = \dots$

$$\frac{s - 2a \cos. \phi. \sin. \phi}{2a \sin. \phi} = \frac{s}{2a \sin. \phi} - \cos. \phi$$

en brengende dit over in de waarde van z , verandert dezelve in

$$z = -a(2\cos^2. \phi - \frac{s}{2a} \cos. \phi) = \text{max. of minimum.}$$

$$\text{nu is } \frac{\partial z}{\partial \phi} = a \left(4 \cos. \phi \sin. \phi - \frac{s}{2a} \cdot \frac{1}{\sin^2. \phi} \right)$$

$$\text{en } \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = a \left(4 \cos^2. \phi - 4 \sin^2. \phi + \frac{s}{a} \cdot \frac{\cos. \phi}{\sin^3. \phi} \right)$$

$$\text{stellende dan } \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0, \text{ is } 4 \cos. \phi \sin. \phi =$$

$$\frac{s}{2a} \cdot \frac{1}{\sin^2. \phi}; \text{ of } 4 \cos. \phi \sin^3. \phi = \frac{s}{2a}.$$

Onder de verschillende manieren, waarop deze vergelijking kan worden opgelost, komt ons deze de eenvoudigste voor. Men quadratere dezelve,

$$\text{dan komt er } 16 \cos^2. \phi \sin^6. \phi = \frac{s^2}{4a^2},$$

$$\text{of } 16 (1 - \sin^2. \phi) \sin^6. \phi = \frac{s^2}{4a^2}; \text{ waaruit}$$

$$\sin^4. \phi - \sin^6. \phi + \frac{s^2}{64a^2} = 0, \text{ of stellende}$$

$$\sin^2. \phi = x; x^2 - x^3 + \frac{s^2}{64a^2} = 0, \text{ welke aequatie, men, wanneer de betrekking tusschen } s \text{ en}$$

in getallen gegeven is, gevolglijk door middel der Logarithmen bij benadering oplossen kan, om dat dezelve kan geschreven worden onder den

$$\text{vorm } x^3 (1 - x) = \frac{s^2}{64a^2}; \text{ dat is } 3 \text{ Log. } x +$$

$$\text{Log. } (1 - x) = \text{Log. } \frac{s^2}{64a^2}. \text{ Wanneer men dus}$$

de wortels van onze aequatie op deze of eenige andere wijze gevonden heeft, moeten dezelve niet

alleen aan de verkennings vergelijking $\frac{\delta^2 z}{\delta \phi^2}$ getoetst

worden, maar men moet nog bovendien toezien dat $2\phi < 180^\circ$ en $\phi' < \phi$ worde, terwijl anders $\angle C$ of $\angle B$ negatief zou zijn, en dus op geene driehoek in den eigentlichen zin toepasselijk zou zijn, een voorbeeld zal dit alles duidelijk maken.

VOORBEELD. — Laat $s = 2a$ zijn, dan is

$\frac{s^2}{64a^2} = \frac{81}{16 \cdot 64} = 0.07910156$ en dus de aequatie $x^4 - x^3 + 0.07910156 = 0$. Wij hebben deze aequatie door middel der Logarithmen benaderd en gevonden $\text{Sin}^2 \phi = x = 0.5677336$ en $\text{Sin}^2 \phi = x = 0.8864351$, terwijl de andere wortels imaginair zijn; laten wij nu deze twee wortels ieder in het bijzonder onderzoeken.

1°. $\text{Sin}^2 \phi = 0.5677336$ geeft $\text{Log. Sin. } \phi = 9.8770743$; $\phi = 48^\circ 53' 34'' 13$; $\text{Log. Cos. } \phi = 9.8178758$ en $\text{Cos. } \phi = 0.6574696$; dus $2\phi = 97^\circ 47' 8'' 26$, waaruit $\text{Log. Sin. } 2\phi = \text{Log. } (2 \text{ Sin. } \phi \text{ Cos. } \phi) = 9.9959780$, dus $\text{Sin. } 2\phi = 2 \text{ Sin. } \phi \text{ Cos. } \phi = 0.9907819$.

$$\text{Nu is } \frac{\delta^2 z}{\delta \phi^2} = a \left(4 \text{ Cos}^2 \phi - 4 \text{ Sin}^2 \phi + \frac{s}{a} \cdot \frac{\text{Cos. } \phi}{\text{Sin}^3 \phi} \right) = a \left(4 - 8 \text{ Sin}^2 \phi + \frac{s}{2a} \cdot \frac{1}{\text{Sin}^3 \phi} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2 \cos \phi \sin \phi}{\sin^4 \phi} \\ & \frac{2 \cos \phi \sin \phi}{\sin^4 \phi} \end{aligned} \right\} = a (4 - 8 \sin^2 \phi + \frac{2 \cos \phi \sin \phi}{\sin^4 \phi})$$

Nuis $\log \sin^4 \phi = 4 \log \sin \phi = 9,5082891$,
 dus $\log \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\sin^4 \phi} = 0,4876889$ en . . .

$$\frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\sin^4 \phi} = 3,0738935, \text{ waardoor dan}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = + a \cdot 2,9162614$; welke positief waarde
 aantoonst, dat $\phi = 48^\circ 53' 34'' 13$ een minimum
 voor z geeft.

Om nu den driehoek nader te bepalen, is

$$\begin{aligned} \cos \phi' &= \frac{5}{2a} \cdot \frac{1}{\sin \phi} - \cos \phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \phi} - \cos \phi \\ \cos \phi &= 0,8356004, \log \cos \phi' = 9,9219986, \\ \phi' &= 33^\circ 19' 17'' 75, \text{ waaruit } \angle A = \phi + \phi' = \\ &= 82^\circ 12' 51'' 88, \angle B = \phi - \phi' = 15^\circ 34' 16'' 38, \\ \angle C &= 180^\circ - 2\phi = 82^\circ 12' 51'' 74, AB = \\ &= a \sin 2\phi = a \cdot 0,9907819; BC = a \sin \\ &(\phi + \phi') = 0,9907820 \cdot a \text{ en } AC = a \sin \\ &(\phi - \phi') = 0,2684359 a, \text{ waarvan de som} \\ &2,2499998 \cdot a \text{ slechts } 0,0000002 \text{ van } 2\frac{1}{2}a \text{ afwijkt.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ. \text{ Voor } \sin^2 \phi &= 0,8864351 \text{ is } \log \sin \phi \\ &= 9,9738235; \phi = 70^\circ 18' 22'' 27; \log \cos \phi \\ &= 9,5276217; \cos \phi = 0,3369936; 2\phi = \\ &= 140^\circ 36' 44'' 54 \text{ en dus } \log \sin 2\phi = \log \\ &(2 \sin \phi \cos \phi) = 9,8024752; \sin 2\phi = \\ &2 \sin \phi \cos \phi = 0,6345636; \log \sin^4 \phi = \\ &9,8952940; \log \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\sin^4 \phi} = 9,9071812; \end{aligned}$$

$$\frac{2 \sin \phi \cos \phi}{\sin^4 \phi} = 0,8075719; \text{ dit gesubstitueerd}$$

$$\text{in } \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = a \left(4 - 8 \sin^2 \phi + \frac{2 \cos \phi \sin \phi}{\sin^4 \phi} \right)$$

komt

komt $\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = -a \cdot 2,1829624$, welke negative waarde aantoont, dat $\varphi = 70^\circ 18' 22'' 27$ een maximum voor z geeft.

Om den driehoek nader te bepalen is hier $\text{Cos. } \varphi' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\text{Sin. } \varphi} - \text{Cos. } \varphi = 0,8578994$, $\text{Log. Cos. } \varphi' = 9,9334364$, $\varphi' = 30^\circ 55' 6'' 25$, zoo dat $\angle A = \varphi + \varphi' = 101^\circ 13' 28'' 52$; $\angle B = (\varphi - \varphi') = 39^\circ 23' 16'' 02$; $\angle C = 180^\circ - 2\varphi = 39^\circ 23' 15'' 46$, $AB = a \text{ Sin. } 2\varphi = 0,6345636 \cdot a$, $BC = a \text{ Sin. } (\varphi + \varphi') = 0,6345652 \cdot a$ en $AC = a \text{ Sin. } (\varphi - \varphi') = 0,9808714 \cdot a$, waar van de som $2,2500002 \cdot a$ mede slechts $0,0000002$ van $2\frac{1}{2}a$ verschilt.

Nº. 186. Door

ABRAHAM FOCK, *P. van Eeghen Chz.*, en *R. Lobatto.*

Laten Mm' en $M'm$ (*Fig. 163.*) de twee toegevoegde middellijnen zijn, Aa de groote as en Bb de kleine as ; stel $AC = a$, $BC = b$, $MC = p$, $m C = q$, $\angle MCA = \alpha$, $MP = y$ en $CP = x$; dan is

$$MP = MC \cdot \text{Sin. } \angle MCA = p \cdot \text{Sin. } \alpha = y$$

$$CP = MC \cdot \text{Cos. } \angle MCA = p \cdot \text{Cos. } \alpha = x$$

Voorts is $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$ (*kunsttoef. I D.*

$$134) \text{ en } y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2), \text{ dus } p^2 \text{ Sin. } \alpha^2 =$$

$$\frac{b^2}{a^2} (a^2 - p^2 + p^2 \text{ Sin. } \alpha^2); \text{ waaruit } (a^2 - b^2)$$

$$p^2 \text{ Sin. } \alpha^2 = b^2 (a^2 - p^2); \text{ maar } a^2 = p^2 + q^2 - b^2, \text{ dus } (p^2 + q^2 - 2b^2) p^2 \text{ Sin. } \alpha^2 =$$

$$b^2 (q^2 - b^2) = q^2 b^2 - b^4, \text{ en}$$

$$b^4 = (q^2 + 2p^2 \text{ Sin. } \alpha^2) b^2 - (p^2 + q^2) p^2 \text{ Sin. } \alpha^2$$

uit deze vergelijking volgt

$$Mm \ 5$$

$$b^2 =$$

$$\begin{aligned}
 b^2 &= \frac{1}{2}(q^2 + 2p^2 \sin \alpha^2) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^4 - p^4 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2\right)} \\
 \text{dit afgetrokken van } a^2 + b^2 &= p^2 + q^2, \text{ komt} \\
 q^2 &= \frac{1}{2}(q^2 + 2p^2 \cos \alpha^2) \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^4 - p^4 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2\right)} \\
 \text{dus } a &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(q^2 + 2p^2 \cos \alpha^2) \mp \dots\right]} \\
 &\dots \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^4 - p^4 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2\right)}] \\
 \text{en } b &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(q^2 + 2p^2 \sin \alpha^2) \pm \dots\right]} \\
 &\dots \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^4 - p^4 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2\right)}]
 \end{aligned}$$

N^o. 187. Door

J. R. SCHMIDT.

Laten AB en DE (Fig. 164.) de assen des ellips zijn, en GK en IH de gevraagde toegevoegde diameters, welke den kleinsten of grootsten hoek maken. Zoo dan alles gesteld wordt zoo als in de Figuur is aangewezen, hebben wij uit de bekende eigenschappen der ellips.

1^o. $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$; 2^o. $pq \sin \phi = ab$
 uit de 2^e aequatie is $\sin \phi = \frac{ab}{pq}$ en dit moet dus een maximum of minimum zijn.

Stellende dan $\frac{\partial \sin \phi}{\partial p} = - \frac{ab}{p^2 q^2} \dots$
 $\left(p \cdot \frac{\partial q}{\partial p} + q\right) = 0$, komt er $p \frac{\partial q}{\partial p} + q = 0$.

Maar differentieerende de 1^e aequatie, hebben wij $\frac{\partial q}{\partial p} = - \frac{p}{q}$, en dit substituërende, komt

$$-\frac{p^2}{q} + q = 0$$

waaruit $p = q$ en dus door middel van de eerste aequatie,

$$p = q = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

„ De toegevoegde diameters, welke alzoo den „ grootsten hoek ICG of kleinsten hoek GEH „ maken, zijn aan elkander gelijk en kunnen „ door

„ door de formule $p = q = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2)}$
 „ reeds gemakkelijk geconstueert worden.”

Wij kunnen echter op de volgende wijze eene nog eenvoudiger constructie vinden.

Wijl $x^2 + y^2 = p^2$ en $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ (zijnde dit de middelpunts aequatie des ellips)

zoo is $x^2 = \frac{(p^2 - b^2) a^2}{a^2 - b^2}$ en substituerende hier

in de waarde van $p^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$,

$$x^2 = \frac{1}{2} a^2 \text{ of } x = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$$

en hieruit hebben wij deze Constructie.

1°. Beschrijf op de groote as AB eenen halven cirkel en deel $\angle DCB$ midden door, dan is boog BF $= 45^\circ$.

2°. Trek een perp. FH door AB, snijdende de ellips in G en H, dan zijn GK en HI de gevraagde diameters:

want dan is $CL = x = a \cos 45^\circ = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$.

Nº. 188. Door

O. S. BANGMA, en N. Bondt.

Uit hoofde van de gelijkvormigheid der driehoeken, die in de figuur voorkomen, is (Fig. 165)
 $DE : EG = CE : AE = BE : FE$; dus
 $DE \times FE = BE \times EG$, en daarom $\triangle DEF = \triangle BEG$.

GEVOLG. Daar $\triangle AHD = \triangle AHB$ is

en $\triangle EHD = \triangle EHB$

zoo is $\triangle EAD = \triangle EAB$

maar $\triangle EFD = \triangle EGB$ bewezen

dus $\triangle AEF = \triangle AEG$

N^o. 189. Door

O. S. BANGMA, en N. Bondt.

Stel ΔAFD (Fig. 166.) $= x$, $\Delta BFE = y$,
 $\Delta AFB = z$ en $\Delta DFE = d$, dan is $a :$
 $b + y = DF : BF = d : y$; dus $a : d =$
 $b + y : y$; dus $a - d : d = b : y$; dus $y =$
 $\frac{bd}{a - d}$ en $y + b = \frac{ab}{a - d}$. Op dezelfde wijze

$x = \frac{ad}{b - d}$ en $x + a = \frac{ab}{b - d}$. Voorts is

$z = \frac{1}{2} AF \times BF \times \sin. \angle AFB$; maar $z =$
 $\frac{1}{2} AF \times DF \times \sin. \angle AFB$, $y = \frac{1}{2} BF \times EF \times$
 $\sin. \angle AFB$ en $d = \frac{1}{2} DF \times EF \times \sin. \angle$

AFB ; dus $\frac{xy}{d} = \frac{1}{2} AF \times BF \times \sin. \angle AFB = z$;

dus $\Delta ABC = x + a + y + b + z = \frac{ab}{b - d} +$

$\frac{ab}{a - d} + \frac{xy}{d} = \frac{ab}{b - d} + \frac{ab}{a - d} + \frac{abd}{(b - d)(a - d)}$

$= ab \left(\frac{1}{b - d} + \frac{1}{a - d} + \frac{d}{(b - d)(a - d)} \right)$

$= ab \cdot \frac{a + b - d}{(a - d)(b - d)}$; maar $a + b = c + d$

en $d = a + b - c$, dus $\Delta ABC = \dots\dots$

$\frac{abc}{(a - d)(b - d)} = \frac{abc}{(c - b)(c - a)}$.

N^o. 190. Door

N. BOND T.

Neem CD (Fig. 167) tot BE ; als 113 tot
 355; trek DF evenwijdig aan BE en trek de reg-
 te CEF , dan is DF gelijk aan den halven om-
 trek, $2 \times DF$ gelijk aan den geheelen omtrek en
 $\frac{1}{2} DF$

$\frac{1}{2}$ DF gelijk aan een vierde van den omtrek, in veronderstelling, dat 113 tot 355 de rede van de middellijn tot den omtrek is.

Nº. 191. Door

N. B O N D T.

De vergelijking $xy = 125x + 300y$ geeft $x = \frac{300y}{y - 125}$; deze waarde gesubstitueerd in $y^2 - x^2 = a$, geeft

$$y^2 - \frac{90000y^2}{y^2 - 250y + 15625} = a$$

of $y^4 - 250y^3 - (74375 + a)y^2 + 250ay - 15625a = 0$ zoo nu a in getallen gegeven is, kan men y vinden, doch zoo men deze vergelijking letterlijk begeert op te lossen, zoo make men den tweeden term uit dezelve weg, door $y = z + 62\frac{1}{2}$ te stellen en zoek z volgens den regel van *Pom- belli*, dan heeft men $y = 62\frac{1}{2} + z$ en $x =$

$$\frac{300y}{y - 125}.$$

Nº. 192. Door

O. S. B A N G M A.

Om de voorgestelde vergelijking te vereenvoudigen, zoo stel $y = a + u$ en $x = \frac{1}{2}a + z$, dan zal men hebben

$$\frac{y}{a} = \frac{u}{a} + 1 = \frac{x^2 - (c + 2d)x + 2cd}{x^2 - ax + 6a^2}$$

en ter wederzijden de eenheid aftrekkende

$$\frac{u}{a} = \frac{(a - c - 2d)x + 2cd - 6a^2}{x^2 - ax + 6a^2}$$

en hier in $x = \frac{1}{2}a + z$ overbrengende:

u

$$\frac{u}{x} = \frac{(a - c - 2d)x + 2cd - \frac{1}{2}ac - ad - 5\frac{1}{2}a^2}{x^2 + 5\frac{1}{2}a^2}$$

Laat a voor éénheid genomen worden, $5\frac{1}{2}a^2 = n^2$, $5\frac{1}{2}a^2 + ad + \frac{1}{2}ac - 2cd = b$ en $(a - c - 2d) = c$ gezegd worden, dan heeft men

$$u = \frac{cx - b}{x^2 + n^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-cx^2 + 2bx + cn^2}{(x^2 + n^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2cx^3 - 6bx^2 - 6cn^2x + 2bn^2}{(x^2 + n^2)^3}$$

De uitdrukking voor de subtangens is

$$s = u \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{(cx - b)(x^2 + n^2)}{-cx^2 + 2bx + cn^2}$$

Laat nu (*Fig. 169*) MN de as der abscissen x , MR de as der ordinaten u , en PAQ de kromme zijn, dan zal deze kromme de as MN snijden in A, als $u = 0$ en bijgevolg $x = \frac{b}{c}$ is; der-

halve $MA = \frac{b}{c}$. Laat MD de abscis, DE de ordinant en CE de raaktlijn van het punt E der kromme zijn, en AB evenwijdig aan MR, dan is

$$CD = \frac{(cx - b)(x^2 + n^2)}{-cx^2 + 2bx + cn^2} = s \dots$$

$$\dots = \frac{cx^3 - bx^2 + cn^2x - bn^2}{-cx^2 + 2bx + cn^2}$$

voorts $MC = MD - CD = x - CD = \dots$

$$\dots = \frac{-2cx^3 + 3bx^2 + bn^2}{-cx^2 + 2bx + cn^2}$$

en $AC = MA - MC = \frac{b}{c} - MC = \dots$

$$\dots = \frac{2c^2 z^3 - 4cbz^2 + 2b^2 z}{c^2 z^2 + 2cbz + c^2 n^2} \dots$$

$$\dots = \frac{2z(cz - b)^2}{c^2 z^2 + 2cbz + c^2 n^2}$$

maar $\delta z : \delta u = AC : AB = AC \times \frac{\delta u}{\delta z}$,

dus $AB = \frac{2z(cz - b)^2}{c(z^2 + n^2)^2}$.

Uit de vergelijking tusschen u en z blijkt, dat u positief zal zijn voor alle waarden van z , grooter dan $\frac{b}{c}$, en negatief, voor alle waarden van

z , kleiner dan $\frac{b}{c}$, en dat bijgevolg de kromme twee oneindige takken heeft; waar van de eene geheel boven de lijn MN, en de andere geheel beneden dezelve gelegen is. Daar wijders AC oneindig en AB nul wordt wanneer men $z = \pm \infty$ stelt, zoo blijkt daar uit, dat als dan de raaklijk CB op MN valt, en dat bijgevolg de as MN eene asympote is aan beide de takken.

Om de buigpunten te bepalen, moet men $\frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = 0$ stellen, waar uit volgt

$$cz^3 - 3bz^2 - 3cn^2z + 4n^3 = 0$$

Deze vergelijking heeft drie reële, doch irrationale wortels, te kennen gevende, dat onze kromme even zoo veel buigpunten heeft, welke door de waarden van z , in deze vergelijking, aangewezen zullen worden.

Om de grootste en kleinste ordinaten te vinden, stelle men $\frac{\delta u}{\delta z} = 0$, waar door

$$cz^2 - 2bz - cn^2 = 0$$

$$\text{of } z^2 = \frac{2b}{c} z + n^2$$

dus

$$\text{dus } z = \frac{b}{c} \pm \frac{1}{c} \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)} \dots$$

Hier uit volgt

$$z^2 = \frac{2b^2 + c^2 n^2 \pm 2b \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)}}{c^2}$$

$$z^2 + n^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 n^2 \pm 2b \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)}}{c^2}$$

$$\text{en } cz - b = \pm \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)}$$

$$\begin{aligned} \text{dus } u &= \frac{cz - b}{z^2 + n^2} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{(b^2 + c^2 n^2)} \pm 2b} \\ &= \frac{\pm \sqrt{(b^2 + c^2 n^2)} - b}{2c^2 n^2} \end{aligned}$$

$$\text{Waar uit blijkt, dat } u = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 n^2)} - b}{2c^2 n^2}$$

$$\text{de grootste positieve en } u = \frac{-\sqrt{(b^2 + c^2 n^2)} - b}{2c^2 n^2}$$

de grootste negatieve ordinaat zijn zal. Deze uitkomsten schijnen strijdig te zijn met de noot die het voorstel vergezelt, als waarin gezegd wordt, dat voor sommige bepaalde abscissen de ordinaten oneindig groot en asymptoten der kromme worden; maar als men in aanmerking neemt, dat de benamingen van abscis en ordinaat relatief tot elkander zijn, dat MR voor de lijn der abscissen en MN voor de lijn der ordinaten genomen kan worden, dan zal $u = DE = MH$ de abscis en $z = MD = HE$ de ordinaat zijn, en de zaak zoodanig beschouwende, zal men kunnen zeggen, dat de ordinaat $z = HE$ oneindig en asymptote der kromme wordt, voor de bepaalde waarde van $u = MH = 0$.

N^o. 193. Door

J. R. SCHMIDT.

§. 1. Schrijven wij de aequatie aldus
 $\frac{y}{a} = \sin. \phi . \sin. 2 \phi . \sin. 3 \phi$, en stellen wij
 $\frac{y}{a} = y$, dan heeft zij deze gedaante

$y = \sin. \phi . \sin. 2 \phi . \sin. 3 \phi \dots (1)$
 onder welken vorm wij dezelve behandelen zullen: wij zullen verder in den loop van deze oplossing de punten meestal door cijfers aanwijzen, en op dat dit geene verwarring veroorzake, de volgende notatie gebruiken: (0; 2) zal verbeelden de lijn begrepen tusschen de punten 0 en 2; (12; 24) de lijn tusschen de punten 12 en 24 begrepen, en zoo met al de overige.

§. 2. Onze aequatie is dan $y = \sin. \phi . \sin. 2 \phi . \sin. 3 \phi$; laat dan in Fig. 170 PQ de as der abscissen of der waarden van ϕ , en KL de as der ordinaten of der waarden van y zijn; dan is o de oorsprong der coördinaten.

Nu wordt $y = 0$, in deze 3 gevallen,
 $\sin. \phi = 0$; $\sin. 2 \phi = 0$ of $\sin. 3 \phi = 0$;
 de eerste waarde $\sin. \phi = 0$ geeft $\phi = \pm n \pi$
 (n een geheel getal en π de halve ómtrek zijnde wanneer de radius de eenheid is), zoo wij dus eene willekeurige lijn a als eenheid aannemen en wij (0; 12) \equiv (12; 24) \equiv (0; — 12) \equiv (0; — 24) enz. $\equiv \pi \times a = a . 3,14159$ enz. nemen, zullen al deze lijnen de waarde van π voorstellen, en dus zullen de punten — 24; — 12; 0; 12; 24 enz. punten zijn, waarin de kromme de lijn PQ snijdt.

De tweede waarde $\sin. 2 \phi = 0$ geeft $\phi = \pm \frac{n}{2} \pi$; waaruit volgt, dat indien wij (— 12; 0);

Na

(0;

(0; 12); (12; 24) enz. midden door deelen, al de punten — 18; — 6; 6; 18 enz. mede punten zullen zijn, waarin de kromme de lijn PQ doorsnijdt.

De derde waarde $\sin. 3\phi = 0$ geeft eindelijk $\phi = \pm \frac{n}{3}\pi$; zoodus de lijnen (0; 12), welke de achtervolgende waarden van π voorstellen, in drie gelijke deelen gedeeld worden, zullen de hier uit voortkomende punten 4; 8; 16; 20 enz. als mede — 4; — 8; — 16; — 20 enz. wederom punten zijn, waarin de kromme de lijn der abscissen doorsnijdt.

§. 3. Stellen wij in de aequatie $(\phi \pm n\pi)$ in plaats van ϕ , dan verandert de waarde van y in geenen deele, omdat $\sin. \phi$ als dan verandert in $\sin. (\phi \pm n\pi) = \mp \sin. \phi$, $\sin. 2\phi$ in $\sin. (2\phi \pm 2n\pi) = \sin. 2\phi$ en $\sin. 3\phi$ in $\sin. (3\phi \pm 3n\pi) = \mp \sin. 3\phi$; hieruit volgt dan, dat wanneer de kromme wordt gesneden door een oneindig aantal ordinaten, welke op eenen afstand gelijk π van elkander verwijderd zijn, de stukken van de kromme, begrepen tusschen deze ordinaten, alle volmaakt gelijk en gelijkvormig zullen zijn en dus volkomen op elkander zullen passen; zoo passen b. v. de stukken der kromme, begrepen tusschen — 12 en 0, tusschen 0 en 12, tusschen 12 en 24, volkomen op elkander.

§. 4. Stellen wij — ϕ in plaats van ϕ ; zoo ondergaat y geene andere verandering, dan dat zij van teekens verwisselt, en dit toont aan, dat de kromme aan beide zijden van KL dezelfde gedaante heeft, alleen met dit onderscheid, dat zij ter linker zijde van 0, eveneens beneden, als ter rechter zijde van 0, boven PQ geplaatst is.

Maar nu volgt uit de vorige §, dat dit dan ook eveneens voor de punten 12; 24 enz., als mede voor — 12; — 24 enz., moet plaats heb-

hebben. Waaruit dan blijkt, dat de stukken der kromme begrepen tusſchen 0 en 6, tusſchen 6 en 12, tusſchen 12 en 18 enz., tot in het on-eindige, zoowel ter linker zijde als ter regter zijde, alle gelijk en gelijkvormig aan elkander zijn, en niet anders dan in hunne positive of negative toestand ten opzigte van PQ, verſchillen, en hieruit volgt reeds voorloopig, dat de punten 0, 6, 12, 18 enz., noodzakelijk buigpunten moeten zijn.

Het zal dan genoeg zijn, ons bij al het geene wij verder over deze kromme lijn willen zeggen, alleen tot het stuk tusſchen 0 en 12 begrepen, dat is tot de waarden van φ tusſchen 0 en π begrepen, te bepalen; wíl dit dan van zelf op al de overige gedeelten der kromme toepasſelijk zal zijn.

§. 5. Gaan wij dan over tot de Constructie van onze kromme lijn door punten. Het zou zeer bezwaarlijk zijn, dezelve uit onze gegevene equatie te vinden, indien wij dezelve niet op de volgende wijze herleiden:

Wíl $\sin. \varphi. \sin. q = \frac{1}{2} \cos. (q - \varphi) - \frac{1}{2} (\cos. q + p)$, zoo is ook $\sin. \varphi. \sin. 2\varphi = \frac{1}{2} \cos. \varphi - \frac{1}{2} \cos. 3\varphi$ en dus

$$\sin. \varphi. \sin. 2\varphi. \sin. 3\varphi = \cos. \varphi. \sin. 3\varphi - \frac{1}{2} \cos. 3\varphi. \sin. 3\varphi$$

maar $\cos. \varphi. \sin. q = \frac{1}{2} \sin. (q + \varphi) + \frac{1}{2} \sin. (q - \varphi)$ zijnde, is $\cos. \varphi. \sin. 3\varphi = \frac{1}{2} \sin. 4\varphi + \frac{1}{2} \sin. 2\varphi$ en $\cos. 3\varphi. \sin. 3\varphi = \frac{1}{2} \sin. 6\varphi$,

dus $\sin. \varphi. \sin. 2\varphi. \sin. 3\varphi = \frac{1}{2} \sin. 2\varphi + \frac{1}{2} \sin. 4\varphi - \frac{1}{2} \sin. 6\varphi$ en dus wordt onze equatie herleid tot

$$y = \frac{1}{2} (\sin. 2\varphi + \sin. 4\varphi - \sin. 6\varphi) \quad (2)$$

en wij hebben hier uit deze Constructie.

Laat (Fig. 171) met een' radius gelijk de eenheid φ een' cirkel beſchreven worden, en den halven omtrek in even veel gelijke deelen worden verdeeld, als de lijn (0; 18) (Fig. 170),

Na a

waak

waaraan die halve omtrek gelijk is, (in de Figuur zijn er 12 zulke deelen) en uit de deelpunten lijnen $(1; 1')$; $(2; 2')$; $(3; 3')$ enz. op de middellijn loodrecht worden nedergelaten, dan zullen deze lijnen de Sinussen van de overeenkomstige bogen, dat is van de abscissen van (*Fig. 171*) zijn, welke met dezelfde cijfers zijn aangedaan.

Niets is dan nu gemakkelijker, dan de kromme door punten te construeren, want rigten wij uit al de deelpunten van PQ perpendiculair op, dan zullen wij voor eenig punt, bijv. het punt 1, de waarde van de ordinaat $(1; M)$ op de volgende wijze vinden.

Wijl voor het punt 1 van (*Fig. 170*) = ϕ boog $(24, 1)$ van *Fig. 171* is, zijn $(2; 2')$; $(4; 4')$ en $(6; 6')$ de Sinussen van 2ϕ ; 4ϕ en 6ϕ en wij hebben dus $(1; M) = \frac{(2; 2') + (4; 4') - (6; 6')}{2}$;

en wanneer wij deze eenvoudige Constructie op een genoegzaam aantal punten toepassen, zullen wij niet alleen den geheelen loop van een der stukken, tusschen 0 en 12 vinden, maar men zal zich, door deze Constructie voort te zetten, als het ware, proefondervindelijk kunnen overtuigen van de waarheid van al wat in de vorige § gezegd is.

Men moet echter bij deze Constructie zeer omzigtig zijn ten opzichte van de teekens, en al de Sinussen, beneden de middellijn gelegen, als negatief aanmerken. Waaruit volgt, dat *Sin.* 6ϕ in het 2^e of 3^e quadrant vallende, in plaats van, *Sin.* $2\phi + \text{Sin. } 4\phi$ te worden afgetrokken, bij dezelfde moet worden opgeteld. Een paar voorbeelden zal zulks nog duidelijker maken.

Nemen wij het punt 3 van PQ, dan is boog $(24; 3)$ (*Fig. 171*) de waarde van ϕ , en dus $(6; 6')$, $(12; 12')$ en $(18; 18')$, de waarde van *Sin.* 2ϕ ; *Sin.* 4ϕ en *Sin.* 6ϕ , de middelste van de

deze waarden is gelijk 0, en de laatste negatief, en dus wordt voor het punt 3; $(3; M') = \frac{(6; 6') + (18'; 18)}{4} = \frac{1}{2} (6; 6')$

Voor het punt 5 van PQ is $\text{Sin. } 2\phi = (10; 10')$, $\text{Sin. } 4\phi = (20'; 20)$ en $\text{Sin. } 6\phi = (30'; 30)$, van welke drie Sinussen alleen de middelste negatief is; wij hebben dus $(5; M') = \frac{(10; 10') - (20'; 20) - (30'; 30)}{4}$, welke waar

de negatief zijnde, aantoonst, dat het punt M' beneden de lijn PQ moet genomen worden.

§. 6. De loop van een der gelijkvormige stukken $(0; M; 4; M'; 6)$ is dan nu in zoo verre bepaald, dat hetzelfde tusschen 0 en 4 geheel boven PQ, en tusschen 4 en 6 geheel beneden PQ ligt; tusschen 6 en 8 ligt dus de kromme even zoo boven PQ, als zij tusschen 6 en 4 beneden dezelve ligt, en tusschen 8 en 12 is zij eveneens beneden de lijn PQ geplaatst, als zij tusschen 4 en 0 boven dezelve ligt. Laat ons nu onderzoeken, hoe verre zij zich in deze stukken boven en beneden de lijn PQ verwijderst; dat is: laat ons onderzoeken, wanneer y een maximum of minimum wordt, voor waarden van ϕ , welke tusschen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ begrepen zijn, en waarbij dus $\text{Cos. } \phi$ en $\text{Sin. } \phi$ beide positief zijn.

In het 96^e voorstel is voor de 1^e en 2^e differentiaal vergelijking van onze aequatie (zie aeq. 1) gevonden.

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = -2 (\text{Cos.}^4 \phi - 16 \text{Cos}^2 \phi + 1) (\text{Cos}^2 \phi - 1) \quad (3)$$

$$\text{en } \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = + 2 (144 \text{Cos}^4 \phi - 160 \text{Cos}^2 \phi + 34)$$

$$\text{Sin. } \phi \cdot \text{Cos. } \phi \dots \dots \dots (4)$$

Verder is aldaar gebleken dat door de eerste dezer aequatien gelijk 0 te stellen en de daar uit gevonden waarden van $\text{Cos. } \phi$ aan de tweede te

zoetsen, de volgende waarden y een maximum of minimum maken.

$$\cos. \varphi = +\frac{1}{2}\sqrt{12+3\sqrt{10}} \text{ maakt } y \text{ tot een maximum}$$

$$\cos. \varphi = +\frac{1}{2}\sqrt{12-3\sqrt{10}} \text{ . . } y \text{ tot een minimum}$$

$$\cos. \varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{12+3\sqrt{10}} \text{ . . } y \text{ tot een minimum}$$

$$\cos. \varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{12-3\sqrt{10}} \text{ . . } y \text{ tot een maximum}$$

de eerste waarde stemt overeen met $\varphi = 39^{\circ}24'54''85$ of $\varphi = 0,2203624 \cdot \pi$, makende dan $(0; D) = (12; D') = (-12; D')$ enz. $= 0,2203624 \times (0; 12)$, zullen de punten $E'E'E$ enz. de begeerde maxima zijn, bij welken $DE = D'E'$ enz. $= 0,5487370 \cdot a$ zal zijn.

De tweede waarde van $\cos. \varphi$ stemt overeen met $\varphi = 74^{\circ}40'46''61$, dat is met $\varphi = 0,4148858 \cdot \pi$, nemende dan $(0; F) = (12; F') = (-12; F')$ enz. $= 0,4148858 \times (0; 12)$, zullen de punten $G; G'; G'$ enz. de begeerde minima zijn, waarbij $FG = F'G' = F'G'$ enz. $= 0,3416937 \cdot a$ is.

Bij de twee andere waarden van $\cos. \varphi$ zullen wij ons niet langer ophouden, zij geven de overige maxima en minima van onze kromme, welke echter uit den regelmatigen loop van dezelve geheel met de reeds gevondene overeenkomen, behalve dat zij van teeken verschillen.

§. 7. Om de Tangens aan eenig punt van onze kromme te trekken, zouden wij de waarde

van $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$, dat is de waarde van de subtangens moeten opmaken, dit geeft voor de subtangens

$$-\frac{y}{2(\cos^4. \varphi - 16 \cos^2. \varphi + 1)(\cos^2. \varphi - 1)}$$

welke waarde niet gemakkelijk te construeren is.

Maar nemen wij de herleide aequatie (2), namelijk

$$y = \frac{1}{2}(\sin. 2\varphi + \sin. 4\varphi - \sin. 6\varphi)$$

en differentieren wij dezelve, komt er

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}(\cos. 2\varphi + 2 \cos. 4\varphi - 3 \cos. 6\varphi)$$

daar

daar nu deze uitdrukking, de trigonometrische Tangens is van den hoek, die de raaklijn van eenig punt met de as der abscissen maakt, hebben wij hierdoor eene gemakkelijke Constructie voor de raaklijn van eenig punt, omdat wij de Cosinusfen van 2ϕ , 4ϕ en 6ϕ wederom in Fig. 171 voorhanden hebben.

Begeeren wij bijv. de tangens aan het punt M van de kromme, dan is boog $(24; 1) \equiv \phi$, en dus zijn $(A; 2')$ $(A; 4')$ en $(A; 6')$ de Cosinusfen van 2ϕ , 4ϕ en 6ϕ ; makende dan $(1; S) \equiv \frac{(A; 2') + 2(A; 4')}{2}$ en $(1; R) \equiv (A; 24) \equiv a$;

zal, RS en MF evenwijdig RS getrokken zijnde, MT de begeerde Tangens zijn.

Men moet hier ondertusfchen weder zorgvuldig op de teekens acht geven; en zorg dragen, dat $(1; R)$ ter linker of regter zijde van het punt 1 genomen worde, naarmate $\cos. 2\phi + 2 \cos. 4\phi - 3 \cos. 6\phi$ positief of negatief is: wel te verstaan, wanneer men $(1; S)$ altoos boven PQ neemt, doch indien men $(1; S)$ boven of beneden PQ neemt, naarmate $\frac{\delta y}{\delta \phi}$ positief of negatief is, dan moet $(1; R) \equiv a$ altoos ter linker zijde van de ordinaat genomen worden.

§. 8. Voor den inhoud nemen wij mede onze herleide vergelijking $y \equiv \frac{1}{4} (\sin. 2\phi + \sin. 4\phi - \sin. 6\phi)$, dan is $y \delta \phi \equiv \frac{1}{4} (\sin. 2\phi \cdot \delta \phi + \sin. 4\phi \cdot \delta \phi - \sin. 6\phi \cdot \delta \phi)$ en

Inhoud $\equiv \int y \delta \phi \equiv \frac{1}{4} (\int \sin. 2\phi \cdot \delta \phi + \dots \int \sin. 4\phi \delta \phi - \int \sin. 6\phi \delta \phi)$,

hetwelk geïntegreerd zijnde geeft:

Inhoud $\equiv \frac{1}{4} (-\frac{1}{2} \cos. 2\phi - \frac{1}{2} \cos. 4\phi + \frac{1}{6} \cos. 6\phi) + \text{const.}$

wijl nu de inhoud verdwijnen moet in de onderstelling van $\phi = 0$ en dat in deze onderstelling $\cos. 2\phi \equiv 1$, $\cos. 4\phi \equiv 1$ en $\cos. 6\phi \equiv 1$

is, hebben wij const. $= \frac{1}{4} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{7}{4 \cdot 12}$; waaruit

Inhoud $= \frac{1}{48} (2 \cos . 6\phi - 3 \cos . 4\phi - 6 \cos . 2\phi + 7)$
stellen wij hier in $\phi = \frac{1}{3}\pi$, is $\cos . \phi = \frac{1}{2}$;
 $\cos . 2\phi = -\frac{1}{2}$, $\cos . 4\phi = -\frac{1}{2}$ en $\cos . 6\phi = 1$
en dus is de inhoud van het stuk $(0; M; M'; 4; 0)$
 $= \frac{2}{3}$ dat is $= \frac{2}{3} a^2$,

Maar stellen wij $\phi = (0; 6) = \frac{1}{2}\pi$, is . . .
 $\cos . 2\phi = -1$, $\cos . 4\phi = 1$ en $\cos . 6\phi = -1$,
waardoor de inhoud wordt $\frac{1}{6}$ of $\frac{1}{6} a^2$. Wij moeten nu wel in het oog houden, dat het stuk $(4; G; M'; 6)$ geheel beneden PQ liggende als negatief moet worden aangemerkt en dat dus $\frac{1}{6} a^2 = (0; E; M'; 4; 0) - (4; G; M'; 6; 4)$ is; waaruit $(4; G; M'; 6; 4) = (0; E; M'; 4; 0) - \frac{1}{6} a^2 = \frac{2}{3} a^2 - \frac{1}{6} a^2 = \frac{1}{6} a^2$ is; waardoor dan de inhoud van alle stukken der kromme, welke boven en beneden PQ liggen, bepaald is.

Stellen wij $\phi = (0; 12) = \pi$, wordt de inhoud $= 0$, om dat dan $\cos . 2\phi = \cos . 4\phi = \cos 6\phi = 1$ is, en dit bevestigt nogmaals de waarheid, dat de deelen onder en boven de lijn der abscissen even groot zijn.

§. 9. Laat ons nu tot het bepalen der buigpunten overgaan. De aquatie (4) is:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = 2(144 \cos^4 . \phi - 160 \cos^2 . \phi + 34) \sin . \phi \cos . \phi$$

en zoo wij dezelve weder differentieren komt er

$$\frac{\partial^3 y}{\partial \phi^3} = 4(432 \cos^5 . \phi - 680 \cos^3 . \phi + 274 \cos . \phi - 17)$$

stellen wij nu $\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = 0$, hebben wij oogenblikkelijk deze twee oplossingen. 1°. $\sin . \phi = 0$.
2°. $\cos . \phi = 0$.

De 1e $\sin . \phi = 0$ geeft $\frac{\partial^3 y}{\partial \phi^3} = 9.4$ en dus zijn de punten 0, 12, 24 enz. als mede — 12;
— 24

— 24 enz. alle buigpunten, zoo als dit ook reeds in §. 4. gebleken is.

De 2e geeft $\frac{\delta^3 y}{\delta \phi^3} = -17.4$ en dus zijn de punten, 6, 18 enz. als mede — 6 : — 18; enz. ook alle buigpunten, hetgeen wij in §. 4 beide reeds hebben opgemerkt.

Lossen wij nu de vergelijking

$$144 \cos^4 \phi - 160 \cos^2 \phi + 34 = 0$$

op, dan vinden wij $\cos \phi = \pm \frac{\sqrt{20} \pm \sqrt{94}}{6}$,

daar nu geene dezer vier waarden $\frac{\delta^3 y}{\delta \phi^3} = 0$ maakt, blijkt het, dat zij alle buigpunten voor onze kromme aanwijzen, welke wij nu nog in de Figuur moeten aantoonen.

$$\cos \phi = \frac{1}{6} \sqrt{20 + \sqrt{94}} = 0,9082087 \text{ geeft}$$

$$\phi = 24^\circ 44' 27'' 74 = 0,1374501 \cdot \pi$$

nemen wij dan $(0; V) = 0,1374501 \times (0; 12)$ zal het punt V een buigpunt zijn, en op gelijke wijze worden de buigpunten V', V'' enz. in de andere gelijkvormige gedeelten der kromme gevonden.

$$\cos \phi = \frac{1}{6} \sqrt{20 - \sqrt{94}} = 0,5350402 \text{ geeft}$$

$$\phi = 57^\circ 39' 12'' 05 = 0,3203889 \cdot \pi$$

wanneer dan $(0; X) = 0,3203889 \times (0; 24)$ genomen wordt, zullen wij het buigpunt Y en bijgevolg ook de buigpunten Y', Y'' enz. verkrijgen.

$\cos \phi = -\frac{1}{6} \sqrt{20 + \sqrt{94}}$ geeft op dezelfde wijze de buigpunten ν, ν', ν'' enz, en . . .

$\cos \phi = -\frac{1}{6} \sqrt{20 - \sqrt{94}}$ de buigpunten x, x', x'' enz, welke volkomen met de reeds gevondenene, behalve in de teekens, overeenkomen.

N^o. 194. Door

J. R. SCHMIDT.

§. 1. De oplossing van het vorige voorstel wel begrepen hebbende, kan de oplossing van dit voorstel geene moeite kosten. De aequatie is hier $y = \sin.\phi + \sin.2\phi + \sin.3\phi$ en heeft dus eenen soortgelijken vorm, als de herleide aequatie van ons vorige voorstel, en het zal dus niet noodig zijn, om op de constructie door punten, welke even als in het vorige voorstel afloopt, en ons *Fig. 172* en *173* verschaft, langer stil te staan.

§. 2. Om de punten te vinden, waarin onze kromme de lijn PQ snijdt, maken wij van de herleiding van het 97e voorstel gebruik, dat is, wij substitueren $2\sin.\phi \cos.\phi$ in plaats van $\sin.2\phi$ en $(4\cos^2.\phi - 1)\sin.\phi$ in plaats van $\sin.3\phi$ en dan verandert onze vergelijking in

$$y = 2\sin.\phi \cdot \cos.\phi (2\cos.\phi + 1)$$

Stellende dan $y = 0$, hebben wij

1^o. $\sin.\phi = 0$ en dus $\phi = \pm n\pi$ en dit toont de punten 0; 12; 24 enz., als mede — 12; — 24 enz. aan, waar in de kromme de lijn PQ snijdt.

2^o. $\cos.\phi = 0$, dit geeft $\phi = \pm \frac{2n+1}{2}\pi$; hetwelk ons de punten 6; 18 : 30 enz., als mede — 6; — 18; — 30 enz., aantoonst, waarbij $y = 0$ is.

3^o. $2\cos.\phi + 1 = 0$, of $\cos.\phi = -\frac{1}{2}$, hiermede stemt overeen $\phi = \pm (2n+1\pm\frac{1}{3})\pi$ en dit geeft ons de punten 8; 16; 32; 40 enz., als mede — 8; — 16; — 32; — 40 enz., waarin de kromme de lijn der abscissen doorsnijdt.

§. 3. Stellen wij in de aequatie $y = \sin.\phi + \sin.2\phi + \sin.3\phi$, ϕ negatief, verandert y al-

Aleen van teeken, het welk aantoon, dat de kromme ter linker zijde van o even zoo beneden als ter regter zijde van o boven de lijn PQ is gestruerd.

Stellen wij algemeener voor ϕ ; $n\pi + \phi$ en $n\pi - \phi$ dan wordt in het 1^o geval $y = \pm \sin.\phi + \sin.1\phi \mp \sin.3\phi$ en in het 2^o geval $y = \pm \sin.\phi - \sin.2\phi \pm \sin.3\phi$, welke waarden alleen in het teeken verschillende, aantoonen, dat niet alleen voor het punt o, maar voor alle punten o; 12; 24 enz., en o; — 12; — 24 enz., de eigenschap bestaat, dat de kromme aan de eene zijde even zoo boven als aan de andere zijde beneden PQ geplaatst is.

Stellen wij eindelijk $\phi + 2n\pi$ in plaats van ϕ , dan ondergaat y volmaakt geene verandering.

Deze aanmerkingen te zamen trekkende, blijkt uit dezelve 1^o. dat de stukken der kromme begrepen tusfchen achtervolgende ordinaten, welke eenen afstand gelijk 2π van elkander hebben, volkomen op elkander passen, zoo passen bij voorbeeld de stukken, begrepen tusfchen — 17 en 7, en tusfchen 7 en 31, volkomen op elkander. 2^o. Dat van het punt o af te beginnen, de stukken begrepen tusfchen op elkander volgende ordinaten, welke op eenen afstand gelijk aan π van elkander verwijderd zijn, mede gelijk en gelijkvormig en dus op elkander passende zijn, doch dat twee van zulke achtervolgende stukken in verschillende rigting, niet alleen van den as PQ der abscissen, maar ook van de as LK der ordinaten gelegen zijn. Er moeten dan noodzakelijk buigpunten in o; 12; 24; 36 enz., als mede in o; — 12; — 24; — 36 enz., bestaan, en er moeten voor waarden van ϕ , kleiner dan π , noodzakelijk 3 maxima of minima, en wel 2 maxima en een minimum bestaan.

§. 4. Deze maxima en minima zijn reeds in het 97^e voorstel gevonden; aldaar is aangewezen,

zen, dat de formule $\sin.\phi + \sin.2\phi + \sin.3\phi$ een maximum of minimum wordt in de volgende gevallen:

1°. $\cos.\phi = + 0,7855010$ of $\phi = 38^{\circ}13'59''95 = 0,2124073.\pi$ geeft het maximum E, waar mede de maxima E', E' enz., en de minima e; e'; e'' overeenstemmen, en bij welke maxima en minima $DE = 2,5013.a$ is.

2°. $\cos.\phi = - 0,2419762$ of $\phi = 104^{\circ}20',10''25 = 0,5777936.\pi$ geeft het minimum G, waarmede de minima G', G' enz., en de maxima g; g'; g' enz., overeenkomen, zijnde bij deze maxima en minima $FG = 0,2423.a$.

3°. $\cos.\phi = - 0,8768581$ of $\phi = 151^{\circ}15'56''35 = 0,8403647.\pi$ toont het maximum I aan, en hiermede komen de maxima I'; I' enz., en de minima i; i'; i'' enz., overeen, zijnde hier $HI = 0,6354.a$.

§. 5. Om de Tangens te construeren hebben wij uit $y = \sin.\phi + \sin.2\phi + \sin.3\phi$.

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = + (\cos.\phi + 2\cos.2\phi + 3\cos.3\phi)$$

en dus voor de Subtangens

$$\frac{y\partial\phi}{\partial y} = \frac{y}{\frac{\cos.\phi + 2\cos.2\phi + 3\cos.3\phi}{\sin.\phi + \sin.2\phi + \sin.3\phi}} = \dots$$

door welke formule wij voor eene gegevene waarde van ϕ de Subtangens kunnen berekenen.

Doch wij kunnen even als in het voorgaande voorstel de tangens ook construeren, door uit Fig. 173 de waarde $\cos.\phi + 2\cos.2\phi + 3\cos.3\phi$ te construeren, en na deze op de ordinaar afgezet te hebben, op PQ ter regter zijde van de ordinaat een stuk gelijk de radius a te nemen, en dan MR evenwijdig ST, te trekken. Men ziet echter duidelijk, dat ook dit slechts eene benaderde constructie is, welke wij in de Figuur bij het punt $9\frac{1}{2}$ hebben aangewezen.

§. 6.

§. 6. Den inhoud vinden wij gemakkelijk aldus, wijl $y = \sin.\phi + \sin.2\phi + \sin.3\phi$, zoo hebben wij $y\delta\phi = \sin.\phi\delta\phi + \sin.2\phi\delta\phi + \sin.3\phi\delta\phi$ en dit integreende:

Inhoud $= -(\cos.\phi + \frac{1}{2}\cos.2\phi + \frac{1}{3}\cos.3\phi) + \text{const.}$ maar $\phi = 0$ zijnde, moet de inhoud verdwijnen en dus $\text{const.} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, zoodat

$$\text{Inhoud} = \frac{11}{6} - (\cos.\phi + \frac{1}{2}\cos.2\phi + \frac{1}{3}\cos.3\phi)$$

1°. Stellen wij $\phi = \frac{1}{2}\pi$, dan is $\cos.\phi = 0$, $\cos.2\phi = -1$, $\cos.3\phi = 0$, zoodat wij voor den inhoud van het stuk (0, E, 6, 0) vinden: $\frac{11}{6} + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{3}$ dat is $= 2\frac{1}{3}.a^2$.

2°. Stellen wij $\phi = \frac{2}{3}\pi$, dan is $\cos.\phi = -\frac{1}{2}$, $\cos.2\phi = -\frac{1}{2}$ en $\cos.3\phi = 1$, in dit geval is de inhoud eigenlijk *Fig.* (0, E, 6, 0) — *Fig.* (6, G, 8, 6), en dit verschil wordt dan gelijk $\frac{11}{6} - (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}.a^2$, dus *Fig.* (6; G; 8; 6) $= (\frac{27}{3}) - (\frac{2}{3}) = \frac{1}{12}.a^2$.

3°. Stellen wij $\phi = \pi$, is $\cos.\phi = -1$, $\cos.2\phi = 1$, $\cos.3\phi = -1$, wij hebben alzoo (0, E, 6, 0) — (6; G; 8; 6) + (8, I, 12, 8) $= \frac{11}{6} - (-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}.a^2$, zoodat (8, I, 12, 8) $= \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.a^2$.

§. 7. Laat ons nu de buigpunten van onze kromme trachten te bepalen.

Wij nemen hiertoe de herleide aequatie van §. 2, namelijk $y = 2\sin.\phi.\cos.\phi(2\cos.\phi + 1)$ waaruit

$$\frac{\delta y}{\delta \phi} = 2(6\cos^3.\phi + 2\cos^2.\phi - 4\cos.\phi - 1)$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta \phi^2} = -4(9\cos^2.\phi + 2\cos.\phi - 2)\sin.\phi$$

wij behoeven hier de derde differentiaal coëfficiënt niet te berekenen, daar het uit den loop der kromme klaar is, dat de drie waarden, welke

$\frac{\delta^2 y}{\delta \phi^2} = 0$ verschaffen kan, alle wezenlijk tot buigpunten moeten behooren.

Stel-

Stellen wij dan $\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = 0$, zoo hebben wij ter

Rond $\sin \phi = 0$ of $\phi = \pm n\pi$, het geen de buigpunten 0, 12, 24 enz., als mede 0, — 12, — 24 enz., welker bestaan ons reeds in §. 3. gebleken is, aantoot.

Doch, de Factor $9\cos^2 \phi + 2\cos \phi - 2 = 0$ stellende, geeft ons $\cos \phi = \frac{1}{9}(1 \pm \sqrt{19})$ waarvan wij de overeenkomstige buigpunten nu nog in de figuur moeten aanwijzen.

$\cos \phi = \frac{1}{9}(1 + \sqrt{19}) = 0,5954332$ geeft ons

$$\phi = 53^\circ 27' 23'' 33 = 0,2969804 \cdot \pi$$

nemende dus $(0; U) = 0,2969804 \times (0; 12)$, zal V het begeerde buigpunt zijn, en hierdoor zijn ook de buigpunten V', V'' enz., als mede v, v' enz., gevonden.

$\cos \phi = \frac{1}{9}(1 - \sqrt{19}) = -0,9732110$ geeft ons

$$\phi = 111^\circ 54' 49'' 64 = 0,6217433 \cdot \pi$$

zoo wij dan $(0; X) = 0,6217433 \times (0; 12)$ nemen, zal Y het begeerde buigpunt zijn, en hierdoor zijn de overige buigpunten Y', Y'' als mede y; y'; y'' enz., bepaald.

N^o. 195. Door

O. S. BANEMA.

Laten de regthoekszijden AF en AE (*Fig. 195*) onbepaaldelijk verlengd worden tot in R en Q, dan zal de hypothenuse EF in alle mogelijke stellingen, tusſchen AF en AQ, raaklijn moeten zijn aan eene zekere kromme, waarvan de vergelijking enz. gevraagd wordt. Stel verder dat deze regte, in de ſtelling van $\angle AEF = \alpha$, de kromme is rakende met het punt D, dan zal men dit punt D op de volgende wijze kunnen bepalen: trek DB loodregt op AQ, en DC loodregt op AR; ſtel $AB = CD = x$, $BD = AC = y$ en $EF = a$, dat is $AF = a \sin \alpha$

en $CF = x \text{ Tang. } \alpha$; maar $AC + CF = AF$; dus $y + x \text{ Tang. } \alpha = a \text{ Sin. } \alpha$, of

$$x \text{ Sin. } \alpha + y \text{ Cos. } \alpha = a \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \alpha \dots (1)$$

Deze vergelijking tusſchen x en y zal plaats hebben voor elk ander punt D van de regte EF , en is dus de vergelijking van deze regte. De betrekking tusſchen x en y in deze vergelijking zal dezelfde blijven, zoo lang α dezelfde waarde behoudt, maar zoodra α van waarde verandert, zal ook de betrekking tusſchen x en y veranderen, uitgezonderd in één geval, wanneer namelijk x en y de coördinaten zijn van dat punt der regte EF , waarmede zij de kromme aanraakt; want naardien de regte EF altijd raaklijn is, en bijgevolg niet dan rakende van ſtelling veranderen kan, zal zij op het eerste oogenblik van hare beweging, of bij de eerste verandering van den hoek AEF , om het raakpunt moeten draaijen; bijgevolg zullen de coördinaten van dit punt der regte EF , bij de eerste verandering van den hoek $AEF = \alpha$ dezelfde waarde moeten behouden; als men dan de vergelijking tusſchen x en y ten opzichte van α differentieert, x en y als ſtandvastig beſchouwende, zal men eene andere vergelijking tusſchen x en y bekomen, die niet meer voor de geheele uitgetrektheid van de lijn EF , maar alleen voor het raakpunt van dezelve geldig is; nu is $\delta \text{ Sin. } \alpha = \text{Cos. } \alpha \delta \alpha$, $\delta \text{ Cos. } \alpha = -\text{Sin. } \alpha \delta \alpha$, en $\delta \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \alpha = (\text{Cos. } \alpha^2 - \text{Sin. } \alpha^2) \delta \alpha$; deze differentialen van $\text{Sin. } \alpha$, $\text{Cos. } \alpha$, en $\text{Sin. } \alpha \text{ Cos. } \alpha$, in plaats van de grootheden zelve ſtellende, en de vergelijking door $\delta \alpha$ deellende, zal men hebben:

$$x \text{ Cos. } \alpha - y \text{ Sin. } \alpha = a (\text{Cos. } \alpha^2 - \text{Sin. } \alpha^2) \quad (2)$$

Door deze beide vergelijkingen kunnen de coördinaten x en y van het raakpunt D , op de volgende wijze bepaald worden; men multiplicere vergelijking (1) door $\text{Sin. } \alpha$, en vergelijking (2) door

door $\text{Cos. } \alpha$, en addere dezelve tot elkander, dan heeft men

$$x = a \text{Cos. } \alpha^3 \dots \dots \dots (3)$$

Als men de eerste vergelijking multiplicceert door $\text{Cos. } \alpha$ en de tweede door $\text{Sin. } \alpha$, en deze van gene aftrekt, zal men hebben

$$y = a \text{Sin. } \alpha^3 \dots \dots \dots (4)$$

Door deze waarden van x en y zal men alle punten van de kromme kunnen vinden, aangezien het raakpunt altijd een punt van de kromme is; maar om de vergelijking van de kromme te hebben, moet men α uit vergelijking (1) en (2), of (3) en (4), verdrijven, om alzoo eene vergelijking tusschen x en y onafhankelijk van α te verkrijgen. Nu is (3) $\frac{x^2}{a^2} = \text{Cos. } \alpha^6$ en (4)

$$\frac{y^2}{a^2} = \text{Sin. } \alpha^6; \text{ dus } \sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} = \text{Cos. } \alpha^2 \text{ en } \dots$$

$$\sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}} = \text{Sin. } \alpha^2; \text{ dus}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}} = 1 \dots \dots (5)$$

Om deze vergelijking van wortelteekens te ontdoen, verheffe men dezelve tot de derde magt, komt

$$\frac{x^2}{a^2} + 3 \sqrt[3]{\frac{x^2 y^2}{a^4}} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}} \right) + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\text{of } \frac{x^2}{a^2} + 3 \sqrt[3]{\frac{x^2 y^2}{a^4}} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\text{of } 3 \sqrt[3]{a^2 x^2 y^2} = a^2 - x^2 - y^2$$

$$\text{of } 27 a^2 x^2 y^2 = (a^2 - x^2 - y^2)^3 \dots (6)$$

hetwelk eene zesde magts vergelijking is, van de derde magts vorm, en waardoor het in den

eer-

ersten opslag onmogelijk zou schijnen, om x in y , of y in x te bepalen; maar als wij nagaan, dat deze vergelijking, door terug werking, weder gebragt kan worden tot den vorm van vergelijking (5), dan hebben wij terstond

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} = 1 - \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}}; \frac{x^2}{a^2} = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}}\right)^3 \text{ en}$$

$$x = a \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{y^2}{a^2}}\right)^3} \dots (7)$$

op gelijke wijze

$$y = a \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}}\right)^3} \dots (8)$$

Men kan echter de punten van de kromme op eene veel eenvoudiger wijze vinden, dan door deze vergelijkingen; want laat AG loodrecht op EF staan, dan is $EF : AE = AE : EG$; maar $EF = a$ en $AE = a \cos \alpha$; dus $EG = a \cos \alpha^2$. Voorts is $FD = CD \sec \alpha$ en $CD = AB = x = a \cos \alpha^3$; dus $FD = a \cos \alpha^2 = EG$. Hieruit volgt deze Constructie: trek AG loodrecht op EF en maak $FD = EG$, dan is D het raakpunt op de rechte EF en bijgevolg een punt van de kromme.

De rectificatie van onze kromme is allereenvoudigst; want door vergelijking (3) en (4) hebben wij $\delta x = -3a \cos \alpha^2 \sin \alpha \delta \alpha$, $\delta y = 3a \sin \alpha^2 \cos \alpha \delta \alpha$; dus $\delta x^2 + \delta y^2 = 9a^2 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2 \delta \alpha^2$ en $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = 3a \sin \alpha \cos \alpha \delta \alpha$, hetwelk de differentiaal is van den boog QD en waarvan de integraal is

$$QD = \frac{3}{2} a \sin \alpha^2 \dots (9)$$

Deze integraal heeft geen verbetering noodig, om dat dezelve nul wordt, als $\alpha = 0$ en dus $BD = y = a \sin \alpha^3 = 0$ is. Maar vermits $FD = a \cos \alpha^2$ is, zoo is $ED = a - FD = a - a \cos \alpha^2 = a \sin \alpha^2$; bijgevolg is de

Oo boog

boog QD gelijk anderhalf maal de rechte lijn ED , en dienvolgens de geheele kromme, van Q tot R , gelijk anderhalf maal de lijn EF , hetwelk ook blijkt uit vergelijking (9), door $\alpha = 90^\circ$ te stellen.

Voor de quadratuur van onze kromme hebben wij $y = a \sin \alpha^3$ en $\delta y = 3a \cos \alpha^2 \sin \alpha \delta \alpha$, dus $y \delta x = -3a^2 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2 \delta \alpha$, hetwelk de differentiaal is van de oppervlakte $ABDR$; dus

$$ABDR = \text{Const.} - 3a^2 \int \sin \alpha^2 \cos \alpha^2 \delta \alpha.$$

De integraal van $\sin \alpha^2 \cos \alpha^2 \delta \alpha$ is $-\frac{1}{18} \sin \alpha^3 \cos \alpha^3 + \frac{1}{18} \sin \alpha^3 \cos \alpha - \frac{1}{18} \sin \alpha \cos \alpha^3 + \frac{1}{18} \alpha$, waarvan men zich door differentiatie overtuigen kan; dus

$$ABDR = a^2 \left(\frac{1}{18} \sin \alpha^3 \cos \alpha^3 - \frac{1}{18} \sin \alpha^3 \cos \alpha + \frac{1}{18} \sin \alpha \cos \alpha^3 - \frac{1}{18} \alpha \right) + C.$$

Deze integraal, genomen van $\alpha = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ tot $\alpha = 0$, geeft voor den geheelen inhoud van het kromlijnig vlak,

$$AQDRA = \frac{1}{18} a^2 \pi \quad (10)$$

Hiermede zullen wij ons niet af te uitvoerig te zijn, de analyses van onze kromme staken, of schoon dezelve meer fraaije eigenschappen bezit, zoo is bij voorsbeeld de kromtestraal van het punt D altijd gelijk aan het drievoud van de loodlijn AG .

Probleem 106. Door

Q. S. BANGMA.

Laat (Fig. 175) GAH de voorgestelde hoek zijn; B en C twee geëvene punten in AG , D en E twee geëvene punten in AH , en F een punt in het vlak van den hoek GAH , zoodanig, dat $BF^2 + CF^2 + DF^2 + EF^2 = 4 \times AF^2$ zij. Stel $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $AE = e$, $AF = a$, $\angle GAF = \alpha$ en $\angle HAF = \beta$, dan is

$$BF^2 =$$

$$BF^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$CF^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \alpha$$

$$DF^2 = d^2 + a^2 - 2da \cos \alpha$$

$$EF^2 = e^2 + a^2 - 2ea \cos \alpha$$

en hiervan de som nemende en ter wederzijden $BF^2 + CF^2 + DF^2 + EF^2 = 4a^2$ aftrekkende

$$0 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2a(b \cos \alpha + c \cos \alpha + d \cos \alpha + e \cos \alpha)$$

waaruit volgt $a = \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{4(b \cos \alpha + c \cos \alpha + d \cos \alpha + e \cos \alpha)}$

$$AF = \frac{1}{2} \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{(b + c) \cos \alpha + (d + e) \cos \alpha}$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat AF, voor elke waarde van α of β , maar eene waarde heeft, en dat bygevolg alle punten F, die aan den eisch van het voofftel voldoen, gelegen zijn in eene regte lijn, waarvan de ligging op de volgende wijze bepaald kan worden: stel $\alpha = 0$ of $\beta = A$, dan is $\cos \alpha = 1$, en maak

$$AG = \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{b + c + (d + e) \cos A}$$

Stel verder $\beta = 0$ of $\alpha = A$, dan is $\cos \beta = 1$, en

$$AH = \frac{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{(b + c) \cos A + d + e}$$

Trek door G en H eene onbepaalde regte lijn, dan zal deze de plaats van het punt F zijn.

Nº. 197. Door

G. S. B. A. N. G. M. A.

Stel (Fig. 196) $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $AC = a$, $BC = b$ en $DC = d$, dan is

$$AD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$$

$$BD^2 = b^2 + d^2 - 2bd \cos \beta$$

dus $2d^2 \pm AD^2 \pm BD^2 = 2a^2 \pm 2ad \cos \alpha \pm 2bd \cos \beta$

$$\text{en } d = \frac{a^2 + b^2}{2a \cos \alpha + 2b \cos \beta} = CD \dots$$

waaruit blijkt, dat CD, voor elke waarde van α of β , maar eene waarde heeft, en dat bijgevolg het punt D gelegen is in eene regte lijn, die op de volgende wijze gevonden kan worden: stel $\alpha = 0$ of $\beta = \angle ACB$, dan zal D in CA of het verlengde van deze regte vallen, als

in E, zoo dat $CE = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a + b \cos. ACB}$

worden zal. Stel vervolgens $\beta = 0$ of $\alpha = \angle ACB$, dan zal D in CB of het verlengde van CB vallen, als in F, zoo dat men hebben zal

$CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a \cos. ACB + b}$; hierdoor de punten E en F bepaald hebbende, zal EF de begeerde plaats van het punt D zijn.

Nº. 198. Door

O. S. BANGMA, en N. Bondt.

Stel de radius van het grondvlak des eersten kegels R, en des tweeden kegels r, de hoogte des eersten kegels X, en die van den tweeden x, en den omtrek van den cirkel, welks middellijn één is, gelijk p, dan is het grondvlak van den eersten kegel $= pR^2$ en van den tweeden kegel $= pr^2$, de ronde oppervlakte van den eersten $= pR\sqrt{R^2 + X^2}$ en van den tweeden $= pr\sqrt{r^2 + x^2}$; dus $pR^2X = pr^2x$ en

$$pR^2 + pR\sqrt{R^2 + X^2} = pr^2 + pr\sqrt{r^2 + x^2}$$

Door deze vergelijking hebben wij vooreerst $R^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 + x^2} - R\sqrt{R^2 + X^2}$ en de beide leden tot de tweede magt verheffende:

$$R^4 + r^4 - 2R^2r^2 = r^4 + r^2x^2 + R^4 + R^2X^2 \dots$$

$$\dots - 2Rr\sqrt{(r^2 + x^2)(R^2 + X^2)}$$

$$\text{of } R^2X^2 + r^2x^2 + 2R^2r^2 = \dots$$

$$\dots - 2Rr\sqrt{(R^2r^2 + R^2x^2 + r^2X^2 + X^2x^2)}$$

De

De beide leden dezer vergelijking wederom tot de tweede magt verheffende:

$$\begin{aligned} R^4 X^4 + r^4 x^4 + 2 R^2 r^2 X^2 x^2 + 4 R^4 r^4 + \dots \\ 4 R^2 r^2 (R^2 X^2 + r^2 x^2) = 4 R^4 r^4 + 4 R^2 r^2 X^2 x^2 \\ \dots + 4 R^2 r^2 (R^2 x^2 + r^2 X^2) \\ \text{of } R^4 X^4 + r^4 x^4 - 2 R^2 r^2 X^2 x^2 = \dots \\ \dots 4 R^2 r^2 (R^2 x^2 + r^2 X^2 - R^2 X^2 - r^2 x^2) \dots \\ \dots = 4 R^2 r^2 (R^2 - r^2) (x^2 - X^2) \end{aligned}$$

stellen wij in het tweede lid van deze vergelijking voor X zijne waarde $x \cdot \frac{r^2}{R^2}$, dan hebben wij

$$\begin{aligned} R^4 X^4 + r^4 x^4 - 2 R^2 r^2 X^2 x^2 = \dots \\ \dots 4 \frac{r^2}{R^2} (R^2 - r^2) (R^4 - r^4) x^2 \end{aligned}$$

en hieruit den wortel trekkende

$$R^2 X^2 - r^2 x^2 = 2 \frac{r}{R} (R^2 - r^2) x \sqrt{(R^2 + r^2)}$$

stellen wij nu in het eerste lid van deze vergelijking voor X zijne waarde $x \frac{r^2}{R^2}$, dan hebben wij

$$\begin{aligned} x^2 \frac{r^4}{R^2} - r^2 x^2 = 2 \frac{r}{R} (R^2 - r^2) x \sqrt{(R^2 + r^2)} \\ \text{of } x^2 r^2 (r^2 - R^2) = 2 R r (R^2 - r^2) x \sqrt{(R^2 + r^2)} \\ \text{of } x r = 2 \frac{R}{r} \sqrt{(R^2 + r^2)} \end{aligned}$$

$$\text{dat is } x = 2 \cdot \frac{R}{r} \sqrt{(R^2 + r^2)}$$

want het wortelteeken kan zoo wel *plus* als *minus* genomen worden; en daar $X = x \frac{r^2}{R^2}$ is, zoo hebben wij

$$X = 2 \frac{r}{R} \sqrt{(R^2 + r^2)}$$

dus is de inhoud van iederen kegel

$$\frac{1}{3} p R^2 X = \frac{1}{3} p r^2 x = \frac{2}{3} p R r \sqrt{(R^2 + r^2)}$$

Voorts is, om de oppervlakte te vinden,

$$\begin{aligned} r^2 + x^2 = r^2 + \frac{4 R^4}{r^2} + 4 R^2 = \left(r + \frac{2 R^2}{r} \right)^2 = \\ \text{Oo 3} \qquad \qquad \qquad r^2 + \end{aligned}$$

ONTBINDINGEN VAN DE

$$\left(\frac{r^2 + 2R^2}{r}\right)^2; \text{ dus } \sqrt{r^2 + 2R^2} = \frac{r^2 + 2R^2}{r};$$

$$2 + \sqrt{r^2 + 2R^2} = \frac{2(r^2 + R^2)}{r}; \text{ en } \dots$$

$$pr^2 + pr\sqrt{r^2 + 2R^2} = 2p(r^2 + R^2), \text{ het}$$

de begeerde oppervlakte is,

Nº. 100. Door

O. S. BANGMA, en N. Boudé

Laten R en r de radii der grondvlakken zijn, H en h de hoogten, en p de omtrek van eenen cirkel die de eenheid tot middellijn heeft, dan zijn de inhouden der grondvlakken pR^2 en $p r^2$, de buitige oppervlakten $2pRH$ en $2prh$, en de inhouden pR^2H en $p r^2h$; dus moet men hebben $pR^2H = p r^2h$ en

$$2pR^2 + 2pRH = 2pr^2 + 2prh$$

$$\text{of } R^2 + RH = r^2 + rh$$

deze vergelijking met R vermenigvuldigende en voor R^2H zijne waarde r^2h stellende, heeft men

$$R^3 + r^2h = r^2R + Rrh$$

Hieruit volgt:

$$h = \frac{(R^3 - r^2)R}{(R - r)R^2} = \frac{R}{R - r} (R + r)$$

dus $H = \frac{R}{R - r} (R + r)$, en hierdoor vinden wij

voor den inhoud $pR^2h = pR^2H = pRr(R + r)$, en voor de oppervlakte: $2pR^2 + 2pRH =$

$$2pR^2 + 2pr(R + r) = 2p(R^2 + Rr + r^2).$$

Nº. 200. Door

J. R. SCHMIDT,

S. 1. Laat $AB = a$, $AP = v$ en $\angle PAM = \phi$ gelyk worden, dan zal $AP = GH = a \sin \phi$ zijn.

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 381

zijn; en dus zullen wij voor de polaire vergelijking van onze kromme hebben

$$r = a \sin 2\phi, \text{ of } r = 2a \sin \phi \cdot \cos \phi \dots (1)$$

§. 4. Door middel van deze vergelijking laat zich de vorm of loop van onze kromme zeer gemakkelijk opmaken, want wij behoeven slechts nu te gaan; welke waarden AP of r verkrijgt, wanneer wij aan ϕ alle mogelijke waarden geven, dat is wanneer wij het punt F den geheelen omtrek laten doorwandelen.

Is $\phi = 0$, dan is ook $r = 0$, en de kromme gaat dus door het middelpunt A ; maar wordt ϕ grooter en grooter genomen, dan neemt ook r allengskens in grootte toe, tot dat $\phi = \frac{1}{2}\pi = 45^\circ$, $r = a$ maakt; hetwelk de grootste waarde is, welke r verkrijgen kan, omdat $\sin 2\phi$ nooit grooter dan 1 kan worden. Deelende dan den hoek CAB midden door, zal I een punt van de kromme zijn, en wel een raakpunt van dezelfde met den cirkel zijn. Hierdoor is dan den loop van het stuk API teede eenigermate bepaald.

Stellen wij $\phi = 45^\circ + \psi$ of $\phi = 45^\circ - \psi$, verkrijgen wij in beide gevallen $r = a \cos 2\psi$. Wanneer dus $\angle IAP' = \angle IAP$ genomen wordt, zal $AP' = AP$ zijn; waaruit dan volgt, dat het gedeelte $AP'I$ van de kromme volkomen aan het stuk API gelijkvormig zal zijn, en dat dus iedere lijn PP' , loodrecht door AI gaande, door AI in M zal worden midden doorgedeeld.

Onderzoeken wij nu; wat r wordt, voor de waarden van ϕ , begrepen tusschen $\frac{1}{2}\pi$ en π dat is tusschen 90° en 180° , dan blijkt het ras, dat $\phi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ stellende, r hierdoor zal overgaan in $r = -a \sin 2\phi$; deze waarden nu alleen in het teeken verschillende, toonen aan, dat, wanneer het punt F , van C tot D voortgaat, de punten P niet meer op AF , maar op denzelfver verlengde moeten genomen worden, doch dat voor het overige alle de waarden van

AP zoodanig met die van het eerste quadrant overeenstemmen, dat het blad 2. volmaakt gelijk en gelijkvormig aan het blad 1. zal zijn.

Gaan wij nu voort met het punt F of liever de lijn AF rondom het punt A te laten bewegen, zoo vinden wij, dat voor eenige waarde van $\phi = 180^\circ \pm \psi$ zal wezen $\nu = \mp \sin. 2 \psi$. Deze waarden verschillen slechts weder in de tekens; en uit dit en het voorengesegde is dus blijkbaar, dat voor eenige stelling van het punt F, tusfchen D en E, het punt P op de bewegende lijn AF zelve; maar voor F, tusfchen E en B, het punt P wederom op het verlengde van AF zal moeten genomen worden. Voor het overige de waarden van AP het zelfde zijnde, moeten de twee bladen 3 en 4 wederom geheel aan de twee reeds gevondene gelijk en gelijkvormig zijn.

Wilden wij de lijn AF nu eene tweede omwenteling laten doen, zouden wij vinden, dat de volgende takken geheel op de reeds gevondene vallen, omdat $\sin. 2 (360^\circ + \phi) = \sin. 2 \phi$ zijnde, ν door de stelling van $360 + \phi$ in plaats van ϕ , volstrekt geene verandering ondergaat.

De kromme bestaat alzoo uit vier gelijke en in alles overeenkomende bladen, welke elkander in de orde opvolgen, die in de Figuur door de cijfers 1, 2, 3, 4 is aangewezen; deze bladen raken den cirkel in de punten I, K, L en N, welke de quadranten midden door deelen, en zij fniiden elkander in het punt A, in welk vierdubbel punt A de middellijnen DB en CE raaklijnen der kromme zijn. Wij merken hier nog bij aan, dat het even gemakkelijk is, om, door de constructie op een genoegzaam aantal achtervolgende punten toetepassen, uit het beurtelings grooter en kleiner; en positief en negatief worden der Sinussen in de achtervolgende quadranten, tot dezelfde resultaten te komen.

§. 3. Laat nu door P een loodlijn XY op AP worden gesteld, dan is.

$$PX = AP \cdot \text{Tang. } \phi = r \text{ Tang. } \phi = 2a \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot \text{Tang. } \phi = 2a \sin^2 \phi$$

$$\text{en } PY = AP \cdot \text{Cot. } \phi = r \text{ Cot. } \phi = 2a \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot \text{Cot. } \phi = 2a \cos^2 \phi$$

Zoodat $XY = PX + PY = 2a (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = 2a$, waaruit deze merkwaardige eigenschap der kromme volgt. *De lijn XY door eenig punt P der kromme, loodrecht getrokken op de lijn AP, die dit punt met het middelpunt vereenigt, is altoos gelijk aan de middellijn van den cirkel.*

Deze eigenschap leidt ons tot eene andere, en zeer eenvoudige constructie van onze kromme, hierin bestaande.

„Neem in den regten hoek CAB, eene lijn
„XY gelijk aan de middellijn van den cirkel,
„en laat deze lijn met deszelfs uiteinden X en
„Y langs de beenen van dien hoek heen en
„weder schuiven; wanneer dan in elken stand
„van XY uit het hoekpunt A, eene loodlijn
„AP op dezelve wordt nedergelaten, zullen de
„punten P onze kromme lijn vormen.”

§. 4. Laat ons nu overgaan om de vergelijking der rechtstandige coördinaten van onze kromme optesporen. Nemen wij ten dien einde BD en CE voor assen, en stellen wij $AM = x$ en $PM = y$, dan is $x^2 + y^2 = r^2$, dus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; verder is $x = r \cos \phi$ en $y = r$

$$\sin \phi, \text{ waaruit } \cos \phi = \frac{x}{r} \text{ en } \sin \phi = \frac{y}{r};$$

substitueren wij dit in de vergelijking (1), dat is in $r = 2a \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi$, dan verkrijgen wij

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2axy}{r^2} = \frac{2axy}{x^2 + y^2}$$

dit gequadrateerd en met $(x^2 + y^2)^2$ vermenigvuldigd, komt er $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$, het-

geen ontwikkeld zijnde, voor onze vergelijking geeft:

$$x^6 + 3x^4y^2 + 4x^2y^4 + 3x^2y^4 + y^6 = 0 \dots (2)$$

Ook deze zeele magtsvergelijking bevestigt alles, wat wij tot nog toe over deze kromme gezegd hebben, wij kunnen dit slechts met eenige luchtige trekken aanwijzen.

1°. Is x en y wordt $y^6 = 0$, en dus alle waarden van y gelijk 0, dit toont het vierdubbel punt A aan.

2°. x en y komen niet anders dan in evenve magten voor, de kromme is dus op dezelfde wijze ter linker als ter rechterzijde van CE, en op dezelfde wijze boven als beneden DB gesitueert.

3°. x en y komen volmaakt op dezelfde wijze in de vergelijking voor, de kromme moet alzoo even eens ten opzichte van CE, als van DB gesitueerd zijn, en de vier bladen moeten geheel met elkander overeenstemmen.

4°. Stellende $x = \frac{1}{2} \sqrt{2}$, wordt ook $y = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ en dit toont ons de punten I, K, L en N aan enz.

§. 5. Begrepen wij de vergelijking der rechtstandige coördinaten, wanneer LI en KN voor assen genomen worden, dan stellen wij $AM' = x$ en $PM' = y$; wij hebben alsdan $y^2 = x^2 + y^2$ en dus $y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Verder $x = r \cos(45^\circ - \phi) = r (\cos 45^\circ \cos \phi + \sin 45^\circ \sin \phi)$

$$\text{of } x = \frac{1}{2} r (\cos \phi + \sin \phi) \sqrt{2}$$

$$\text{en } y = r \sin(45^\circ - \phi) = r (\sin 45^\circ \cos \phi - \cos 45^\circ \sin \phi)$$

$$\text{of } y = \frac{1}{2} r (\cos \phi - \sin \phi) \sqrt{2}$$

Hieruit trekken wij

$$\cos \phi + \sin \phi = \frac{x}{\frac{1}{2} r \sqrt{2}} \text{ en } \cos \phi - \sin \phi = \frac{y}{\frac{1}{2} r \sqrt{2}}$$

$$\text{dus } \cos \phi = \frac{x + y}{r \sqrt{2}} \text{ en } \sin \phi = \frac{x - y}{r \sqrt{2}}$$

bren-

VOORGAANDE VOORSTELLEN. 353

brengende die nu in $y = 2a \sin \phi \cdot \cos \phi$ komt

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = 2a \cdot \frac{2(x^2 - y^2)}{4y^2} = 4 \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

waardoor de vergelijking in dit geval wordt

$$(x^2 + y^2)^3 = a^6 (x^2 - y^2)^2 \dots \dots (3)$$

en hieruit kunnen wij wederom dezelfde resultaten trekken.

§. 6. Het blijkt bij het minste inzien, dat de polaire vergelijking $r = a \sin 2\phi$, eenvoudiger is dan een der vergelijkingen (2) of (3). Beide laatste vorderen de oplossing van eene derde magtsvergelijking om y in x uitgedrukt, en alzoo door middel der vergelijking de kromme te construeren; wanneer wij echter genoodzaakt waren, deze vergelijkingen tot de constructie te gebruiken, zouden wij deze derde magtsvergelijking kunnen ontwijken, en het zal niet ondienstig zijn dit voor een der vergelijkingen b. v. voor de vergelijking (2) aantewijzen.

Stellen wij dan in de vergelijking (2) $x = \frac{y^2}{a}$, dan wordt dezelve

$$\frac{y^6}{a^6} + 3 \cdot \frac{y^6}{a^4} - 4y^4 + 3 \frac{y^6}{a^2} + y^2 = 0$$

$$\text{of } y^6 + 3a^2 y^4 - 4a^4 y^2 + 3a^6 y^2 + a^6 y^2 = 0$$

$$\text{waarin } y^2 = \frac{4a^4 y^2}{y^6 + 3a^2 y^4 + 3a^6 y^2 + a^6} = \frac{4a^4 y^2}{(y^2 + a^2)^3}$$

$$\text{en dus } y = \frac{2a^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ en } x = \frac{y^2}{a} = \frac{4a^3}{(x^2 + a^2)^3}$$

offchoon wij dan y niet in x kunnen y en x echter beide derlyke t worden uitgedrukt; zou zijn, welke uit C perp. zij AF ontmoet. Door dit in iedere waarde van t , x en y

itdrukken, rde veran- ier de lijn at tot dat dan. voor k te con-

strueren of te bereekenen zijn: $\frac{y}{a}$, $\frac{x}{a}$ enz. zou- den

den alle functien van t alleen worden, en dit zou het onderzoek der Tangenten, Maxima enz., mede veel gemakkelijker maken, dan dat men hiertoe de aequatie zelve zou bezigen.

§. 7. Wij zullen ons dan bij hetgeen wij verder over onze kromme willen zeggen, alleen tot de polaire vergelijking $v = a \sin. 2\phi$, als de eenvoudigste zijnde, bepalen, en wij merken op, dat wanneer wij den inhoud van eenig stuk, begrepen tusschen den boog ASP en de ordinaat AP $= I$; den boog ASP $= z$ en den hoek APU, welke de tangens van eenig punt P met de ordinaat AP maakt, $= \phi'$ stellen, wij in de oplossing van het 121. voorstel gevonden hebben

$$\delta I = \frac{1}{2} v^2 \delta \phi \dots \dots (4)$$

$$\delta z^2 = v^2 \delta \phi^2 + \delta v^2 \dots \dots (5)$$

en $\cos. \phi' = \frac{\delta v}{\delta z}$. Uit deze laatste is $\sin. \phi' =$

$$\frac{\sqrt{\delta z^2 - \delta v^2}}{\delta z} \text{ en dus } \tan. \phi' = \frac{\sqrt{\delta z^2 - \delta v^2}}{\delta v};$$

maar uit (5) hebben wij $\sqrt{(\delta z^2 - \delta v^2)} = \sqrt{v^2 \delta \phi^2} = v \delta \phi$ en hierdoor wordt dan

$$\tan. \phi' = \frac{v \delta \phi}{\delta v} \dots \dots (6)$$

§. 8. Gaan wij dan over tot het trekken van eene raaklijn aan eenig punt P van de kromme, dan hebben wij $v = a \sin. 2\phi$; $\delta v = 2a \cos. 2\phi \delta \phi$ en bijgevolg

$$\tan. \phi' = \frac{v \delta \phi}{\delta v} = \frac{\sin. 2\phi}{2 \cos. 2\phi} = \frac{1}{2} \tan. 2\phi.$$

Hieruit volgt deze opmerkenswaardige eigenschap der kromme. *De tangens van den hoek, welke de raaklijn van eenig punt der kromme met de polaire ordinaat maakt, is gelijk aan de helft van de tangens der dubbele hoek van die ordinaat met de as, en hierdoor hebben wij deze eenvoudige Constructie.*

Deel BV midden door in W en maak $\angle APU =$

$= \angle WAB$, dan zal PU de begeerde tangens van het punt P zijn.

Voor de punten I, K, L en N is $Tang. 2\phi = 0$ en dus ook $Tang. \phi' = 0 = Tang. 90^\circ$. het welk bevestigt, dat de kromme aldaar perpendiculair op de radius zijnde, den cirkel raakt.

Voor het punt A is $2\phi = n\pi$, dus $Tang. 2\phi = 0$ en dus ook $Tang. \phi' = 0 = Tang. 0$. Hierbij moet worden aangemerkt, dat offchoon in die gevallen AP zelve gelijk nul wordt, zij echter als dan of in de rigting van CE of in de rigting van BD ligt, en dat alzoo CE en BD zelve Tangenten der kromme zijn, zoo als wij dit reeds vroeger hebben aangemerkt.

§. 9. Om te onderzoeken, waar eenig blad AP'IPA deszelfs grootste breedte OO' bereikt, zouden wij uit de vergelijking (3) moeten zoeken, voor welke waarde van x ; y een maximum wordt. De formule $Tang. \phi' = \frac{1}{2} Tang. 2\phi$ geeft ons hiertoe echter een gemakkelijker middel aan de hand, want als dan moet de tangens evenwijdig met AI en dus $\phi' = 45^\circ - \phi$ zijn.

Hieruit is nu $Tang. \phi' = \frac{1 - Tang. \phi}{1 + Tang. \phi}$; maar $Tang. \phi' = \frac{1}{2} Tang. 2\phi = \frac{Tang. \phi}{1 - Tang^2. \phi}$ zijnde

de, hebben wij, om ϕ te bepalen, $\frac{1 - Tang. \phi}{1 + Tang. \phi} =$

$\frac{Tang. \phi}{1 - Tang^2. \phi}$, of $1 - Tang. \phi = \frac{Tang. \phi}{1 - Tang. \phi}$,

dat is $(1 - Tang. \phi)^2 = Tang. \phi$; eene qua-

draatsvergelijking, waaruit $Tang. \phi = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$,

zijnde het bovenste teeken voor het punt O' en het benedenste voor het punt O. Daar het echter voldoet één dezer punten te kennen, zoo nemen wij het benedenste teeken en hebben als dan,

Sin.

$$\begin{aligned} \sin. 2\phi &= 2 \sin. \phi \cos. \phi = \frac{\sec. \phi \cdot \cos. \phi}{\sqrt{(1 + \text{Tang}^2. \phi)(1 + \text{Cot}^2. \phi)}} = \frac{\text{Tang} \phi}{1 + \text{Tang}^2. \phi} \\ &= \frac{2 - \sqrt{5}}{3} = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{3(3 - \sqrt{5})} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

waaruit $y = a \sin. 2\phi = \frac{2}{3}a$, zoodat $AQ = \frac{2}{3}AB$; beschrijvende dus met AQ gelijke $\frac{2}{3}AB$ als radius een' cirkel, zullen de acht punten van, waarin deze onze kromme snijdt, de begeerde punten aanhwijzen; zijnde verder $AN' = AB \cos. (45^\circ - \phi) = a \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$ en $QQ' = 2AO \sin. (45^\circ - \phi) = a \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$.

§. 101. Bij de punten Q en Q' enz., alwaar de kromme het verke van de assen DB en CE verlaat, moet de tangens parallel aan die assen zijn. Voor het punt Q moet alzoo $\phi' = 135^\circ - \phi$ en bijgevoig $\text{Tang} \phi' = -\text{Tang} \phi$ zijn; wij hebben dus voor die gevat $-\text{Tang} \phi$

$$= \frac{1}{2} \text{Tang} 2\phi = \frac{\text{Tang} \phi}{1 - \text{Tang}^2. \phi}, \text{ of wel } \dots$$

$\text{Tang}^2. \phi = 1 = \frac{1}{2}$, waaruit $\text{Tang} \phi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ zoodan' $BA = BO$ gemaakt wordt, zal, AK trekkende, het punt Q , waarin zij de kromme snijdt, het begeerde punt zijn, en op gelijke wijze kunnen de overige punten Q' enz. gevonden worden.

Wij kunnen echter eene nog eenvoudiger constructie voor die punten vinden, want $\text{Tang} \phi$

$$= \frac{1}{2} \text{Tang} 2\phi = \frac{\sin. 2\phi}{1 + \cos. 2\phi} = \frac{\sin. 2\phi}{2 \cos^2. \phi} = \frac{\sin. \phi}{\cos. \phi} = \text{Tang} \phi$$

zoodat $BC = a\sqrt{2}$ is, $AQ = \frac{2}{3}BC$. Beschrijvende dus uit A , met $AQ = \frac{2}{3}BC$ als radius, eenen cirkel, zullen de acht punten Q , waarin deze cirkel de kromme snijdt, de begeerde punten zijn.

Hierdoor kan ook gemakkelijk den inhoud van het quadrat $abcd$ om onze kromme beschreven be-

bepaald worden, want uit $Tang. \phi = \frac{v}{2}$ volgt $Sin. \phi = \frac{v}{2}$ en $Cos. \phi = \frac{1}{2}$, en dus is de zijde van dit kwadraat, $4c = 2v Sin. \phi = \frac{1}{2} v \sqrt{3}$ zoodat de inhoud gelijk is aan $\frac{67}{12} AB^2$.

§. 11. De vergelijking (4). geeft ons nu den inhoud $\delta I = \frac{1}{2} v^2 \delta \phi$ en daar $v = a Sin. 2\phi$ is, $\delta I = \frac{1}{2} a^2 Sin^2. 2\phi \delta \phi$, waarvan de integraal is (zie voorstel 132 Bijlage B).

$$I = \frac{1}{4} a^2 \left(-\frac{1}{2} Sin. 2\phi Cos. 2\phi + \frac{1}{2} . 2\phi \right)$$

$$\phi \delta I = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} a^2 . 2\phi - \frac{1}{2} a^2 . Sin. 2\phi . Cos. 2\phi \right)$$

welke integraal geene verbetering noodig heeft, omdat zij in de onderstelling van $\phi = 0$ verdwijnt.

Nu is $AH = a Cos. 2\phi$ en $HG = a Sin. 2\phi$ en dus $\Delta AHG = \frac{1}{2} AH.HG = \frac{1}{2} a^2 Sin. 2\phi . Cos. 2\phi$.

Verder is boog $BG = 2\phi$ en dus Sector $ABEGA = \frac{1}{2} AB^2 \times$ boog $BG = \frac{1}{2} a^2 . 2\phi$, en de inhoud wordt hier door

$$ASPA = \frac{1}{2} (Sector ABEGA - \Delta AHG) = \frac{1}{4} a^2 \phi - \frac{1}{4} a^2 Sin. 2\phi . Cos. 2\phi$$

$$\text{of } ASPA = \frac{1}{4} a^2 \phi - \frac{1}{4} a^2 Sin. 2\phi . Cos. 2\phi; \text{ dat is.}$$

De inhoud van eenig stuk der kromme, tusschen de kromme en een gelijkvormige ordinaten, is gelijk aan het achtste gedeelte van het cirkel segment, waarvan de boog het viervoud van de hoek der polaire ordinaten met den as is.

Om nu den inhoud van een geheel blad $APIP'A$ te bekomen, merken wij op, dat alsdan $\phi = \frac{\pi}{2}$ zijnde, het cirkelsegment van den viervoudigen boog alsdan de cirkel zelve is, en dat dus de inhoud van zulk een blad een achtste deel van den inhoud des geheelen cirkels, of wel de helft van het quadrant is: waaruit verder volgt, dat de acht stukken, waarin deze kromme den cirkel verdeelt, alle even groot zijn.

§. 12. Om tot de rectificatie der kromme overtegaan, nemen wij de vergelijking (5), dat is

$$\delta z^2 = v^2 \delta \phi^2 + \delta v^2$$

nu is $v = a Sin. 2\phi$ en $\delta v = 2a Cos. \phi . \delta \phi$ en bijgevolg

$$\delta z^2$$

$$\delta z^2 = a^2 (\sin^2 . 2\phi + 4 \cos^2 . 2\phi) \delta\phi$$

$$\text{of } \delta z = a \delta\phi \sqrt{(\sin^2 . 2\phi + 4 \cos^2 . 2\phi)}$$

Deze formule kan niet anders dan door eene oneindige reeks worden geïntegreerd, doch wij kunnen, om eenigermate aan dit ongemak te gemoet te komen, de rectificatie van onze kromme tot die van de Ellips herleiden.

Laat hiertoe op $CE = 2a$ als groote, en $AF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} a$ als halve kleine as, een Ellips beschreven worden; dan deelt deze Ellips alle lijnen gm , welke evenwijdig aan AD zijn, midden door in p . Stel nu $Am = x'$, $mp = y'$ en boog $TP = z'$, dan is zoo als bekend is $(\delta z')^2 = (\delta x')^2 + (\delta y')^2$, maar $x' = HG = a \sin . 2\phi$ en $y' = \frac{1}{2} mG = \frac{1}{2} a \cos . 2\phi$ zijn. de, is $\delta x' = 2a \cos . 2\phi . \delta\phi$ en $\delta y' = -a \sin . 2\phi . \delta\phi$, en substitueerende dit in de waarde van $(\delta z')^2$, komt er

$$(\delta z')^2 = a^2 (\sin^2 . 2\phi + 4 \cos^2 . 2\phi) \delta\phi^2 = \delta z^2.$$

De bogen Tp en AP hebben dus dezelfde differentiaal en zij moeten bovendien beide in dezelfde onderstelling van $\phi = 0$ verdwijnen, waaruit dan volgt dat de boog AP van onze kromme gelijk aan den boog Tp van den ellips zal zijn.

Hieruit volgt dan verder. Boog $API =$ boog TpC , en de omtrek van een blad onzer kromme zal dus gelijk zijn aan den halven omtrek van de ellips. De geheele omtrek van onze kromme is alzoo gelijk aan tweemaal den omtrek van de Ellips.

*

VERBETERINGEN

E N

D R U K F E I L E N.

Op pag. 348 is door overhaasting eene misflag ingeslopen: de periode, van regel 5 tot regel 11 ingesloten, moet aldus gelezen worden:

1^o. *Fig.* $PERBP = 2a^2\pi - \frac{2}{3}a^2\sqrt{3}$; maar $BM = \frac{2}{3}a$ en $PM = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$ zijnpe, is $2\Delta PMB = \frac{2}{3}a^2\sqrt{3}$; dus is, HQ midden door declende in B' , $\Delta BB'P = \frac{2}{3}a^2\sqrt{3}$, en bijgevolg *Fig.* $PB'BEP = 2a^2\pi$. Daar wij nu voor den geheelen inhoud gevonden hebben $6a^2\pi$, blijkt hier uit, dat de geknikte lijn $PB'P'$ den inhoud in twee deelen verdeelt, welke tot elkander in reden zijn, als één tot twee.

Op pag. 352 moet in de vijfde aanmerking aldus gelezen worden:

Wij laten zulks voor den lezer over en eindigen met aantemerken, dat de krommen van *Fig.* 110, 111, en 112, niet alleen tot het geslacht der Epicycloïden behooren, maar ook tot dat de Conchoïden, enz.

Pag. 133 reg. 13 van boven, staat hoek BED, lees hoek BEC

— 138 reg. 18 van bened. staat hoek ADE, lees hoek BDE

— 142 reg. 13 van boven, staat β , lees B

— 143 reg. 14 van bened. staat *Log. b*, lees *Log. A*

— 222 reg. 8 van boven, staat $B =$, lees $C =$

— 222 reg. 16 van bened. staat $B =$, lees $C =$

— 263 reg. 8 van boven, staat $(x-2)(x-3)$, lees $(x-2)(x-3)$

Pag.

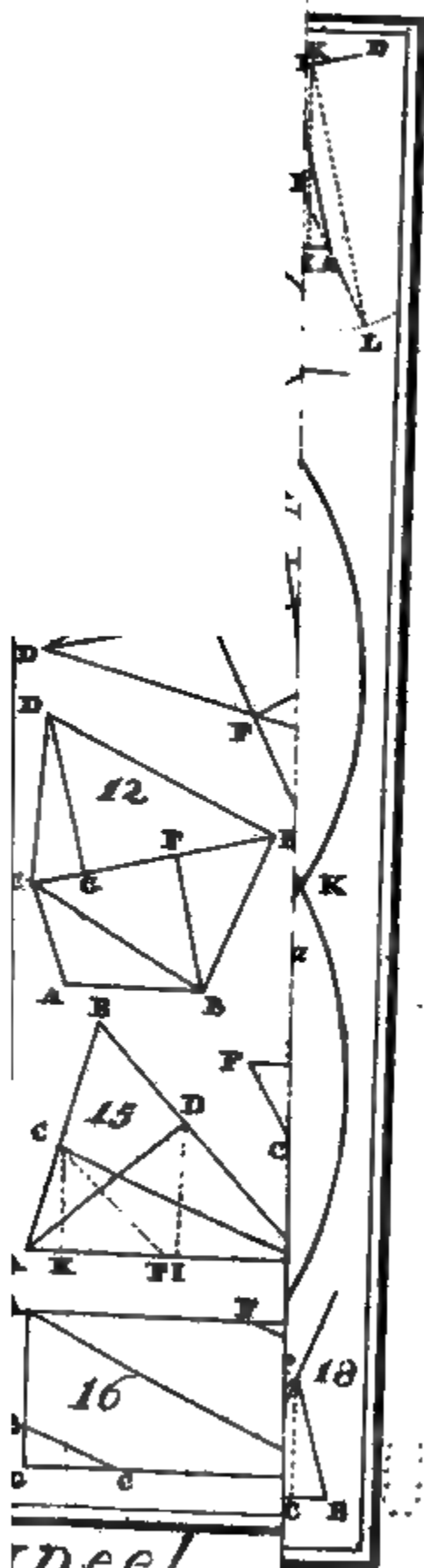
VERBETERINGEN EN DRUKFEILEN.

- Pag. 267 reg. 19 van bened. *staat* + 34] $\text{Cos. } \phi \times \text{Sin. } \phi$,
lees + 34 $\text{Cos. } \phi \times \text{Sin. } \phi$]
- 283 reg. 16 van bened. *staat* $BC = a \times \frac{1}{8} \sqrt{}$
 $(39 + 4 \sqrt{13})$, *lees* $BC = a \times \frac{1}{8} \sqrt{(16 + \sqrt{13})}$
- 283 reg. 15 van bened. *staat* $AB = \frac{1}{32} (1174 +$
 $286 \sqrt{13})$, *lees* $AB = \frac{1}{32} \sqrt{(1174 + 286 \sqrt{13})}$
- 344 reg. 14 van bened. *staat* $3a^2 \phi$, *lees* $3a^2 \pi$
- 355 reg. 1 van boven *staat* $x = a \frac{p + q}{p - q}$,
lees $x = a \frac{p - q}{p + q}$
- 526 reg. 19 van boven *staat* Fig. 158, *lees* Fig. 168
- 539 reg. 5, moet ingevuld worden: Fig. 162

Drukfeilen in de Opgaven.

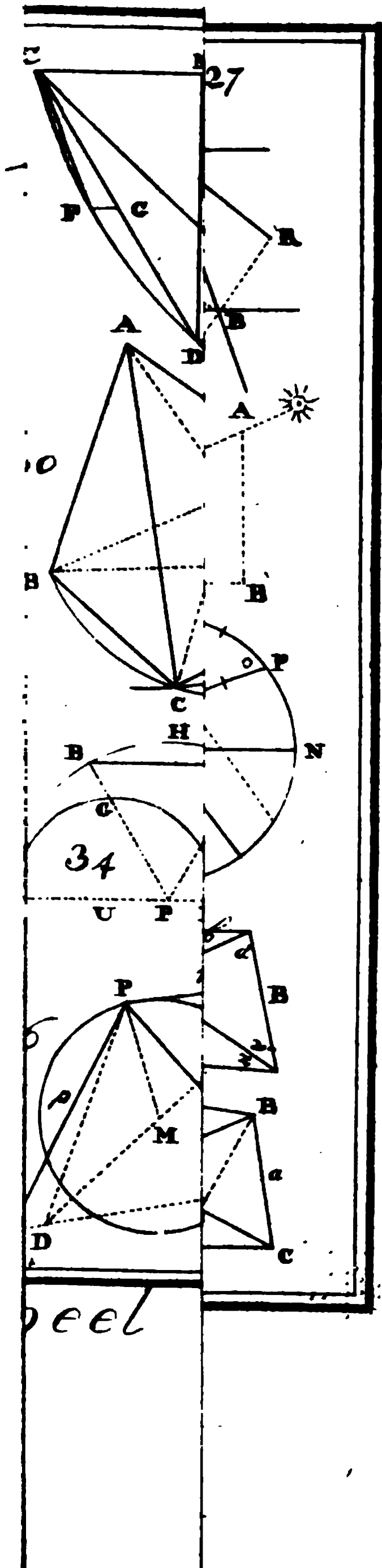
- Pag. 42 reg. 9 van onder *staat* S, *lees* M
- 42 reg. 4 van onder *staat* PS, *lees* PM
- 49 reg. 16 van boven *staat* één minder, *lees*
 twee meer.
- 49 reg. 19 van boven *staat* het, *lees* de som
 van maand en
- 54 reg. 3 van onder *staat* driehoeks, *lees*
 vierkants
- 57 reg. 10 van onder *staat* 133, *lees* 113
- 57 reg. 3 van onder *staat* in den noemer $6\pi^2$,
lees $6a^2$.

bl r

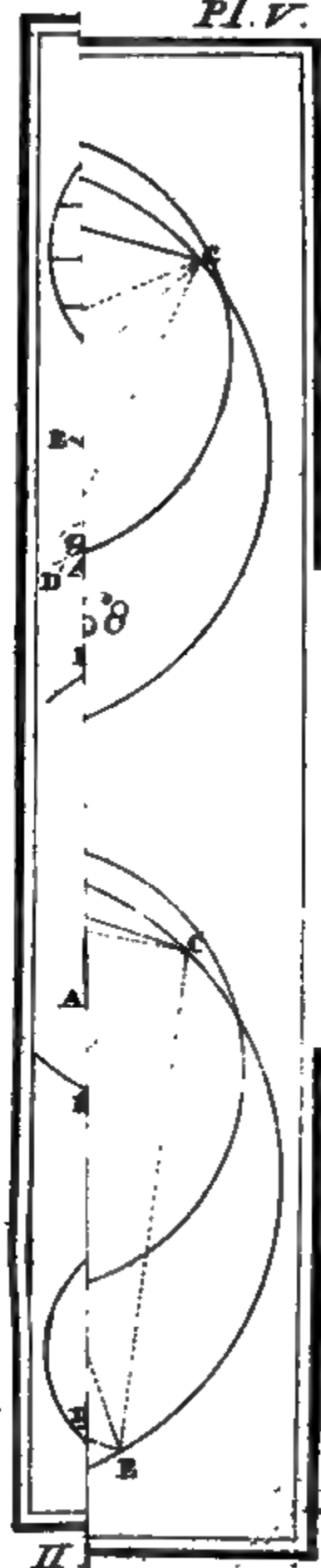


Deel

P/H

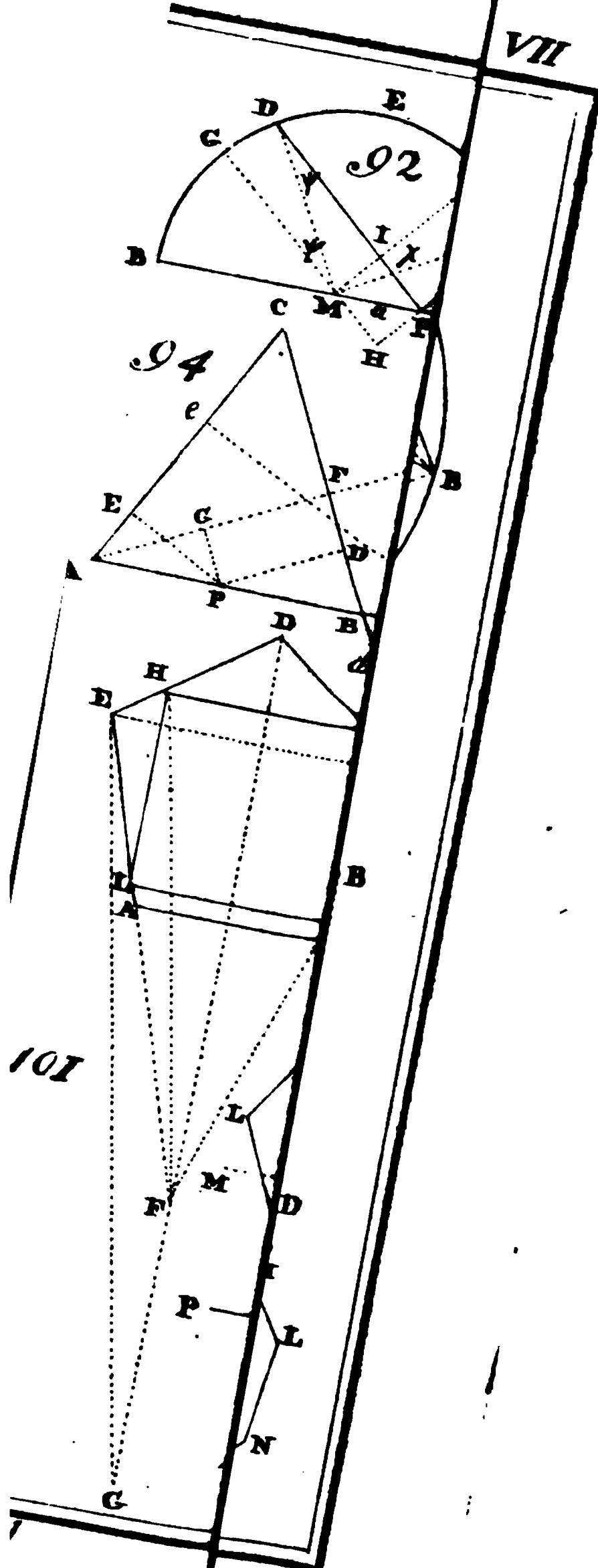


Pl. V.





VII

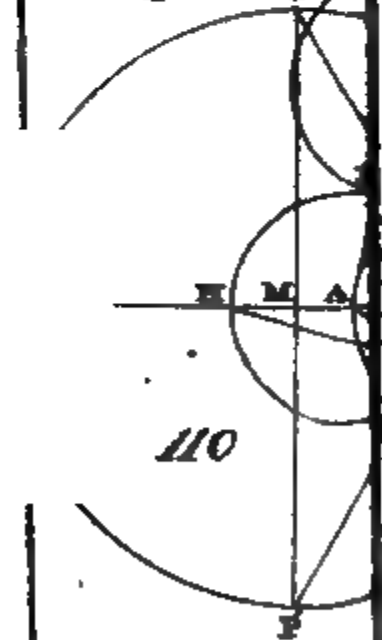
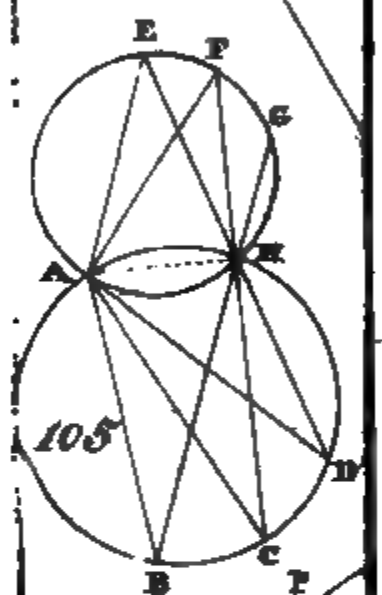
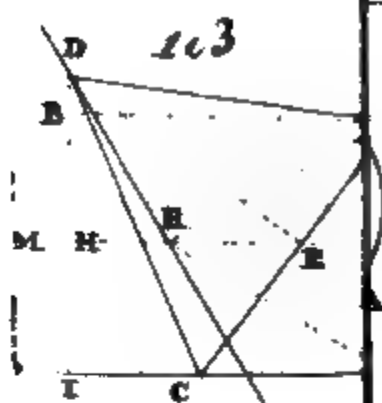


—



ME

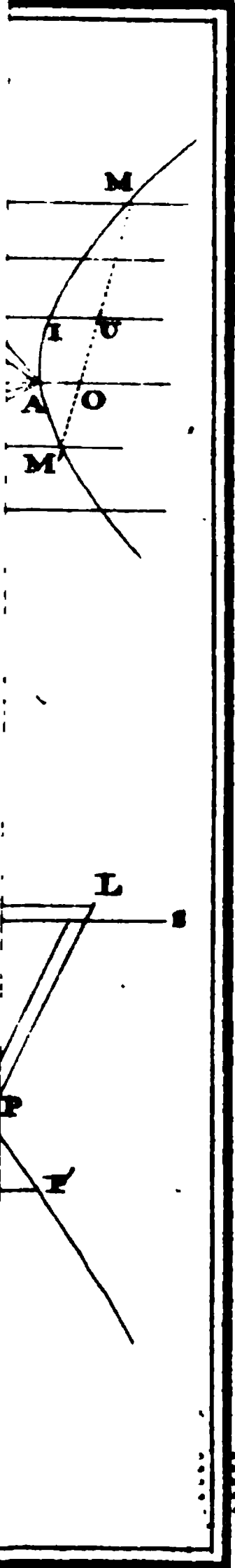
VIII



pe el

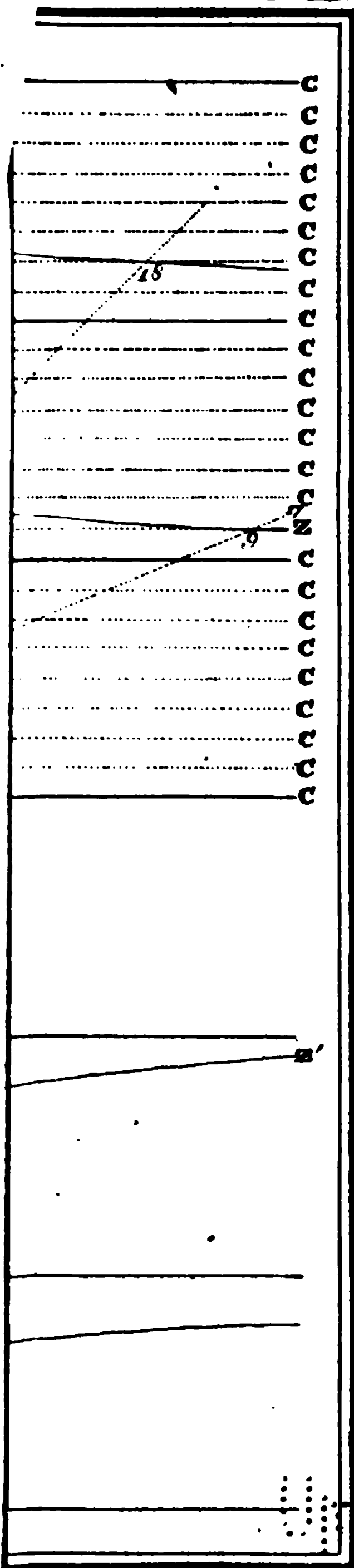


Pl IX

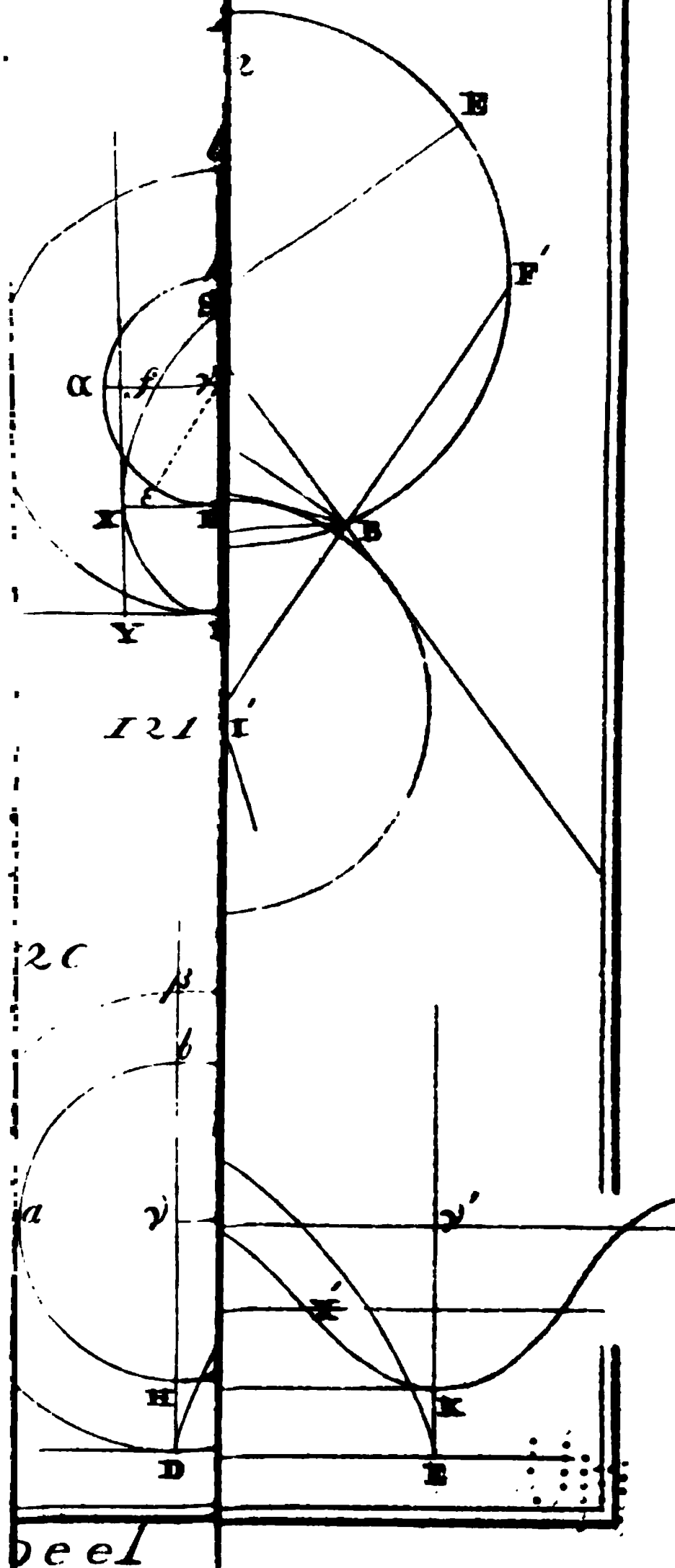


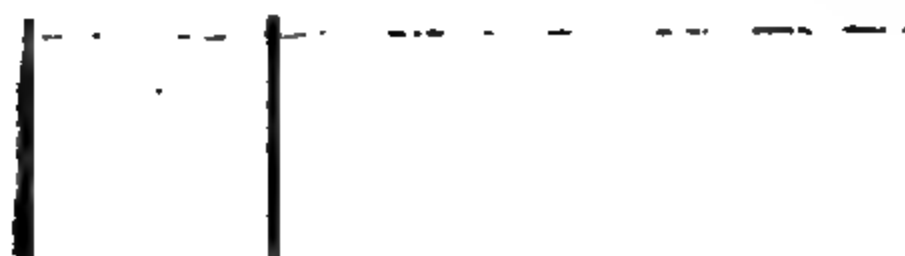
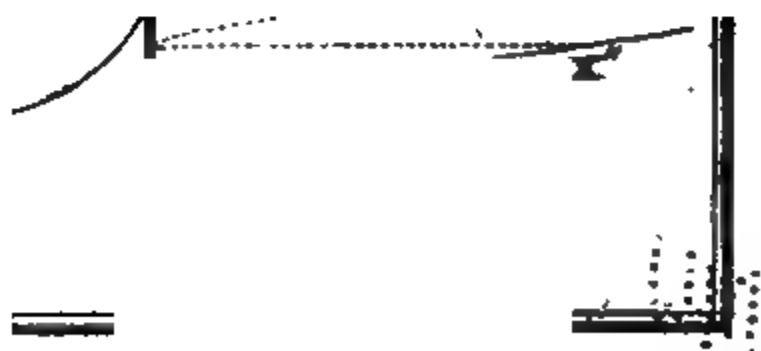
N

P1.X.



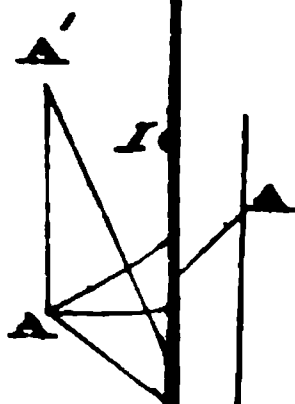
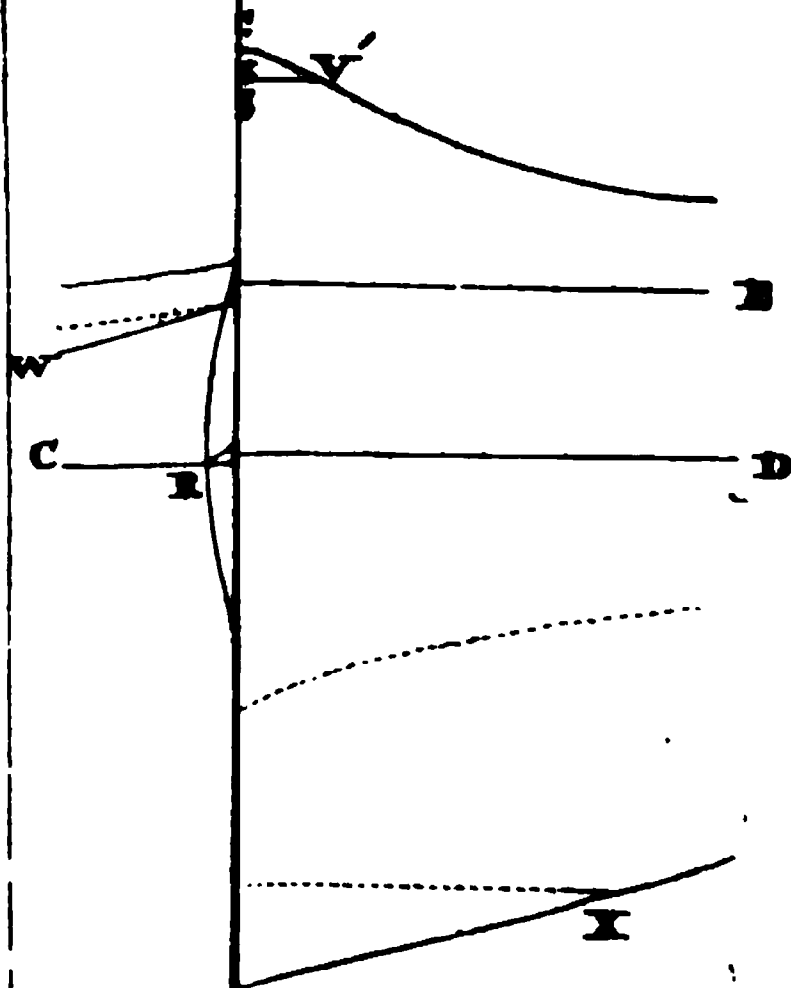
P I XI





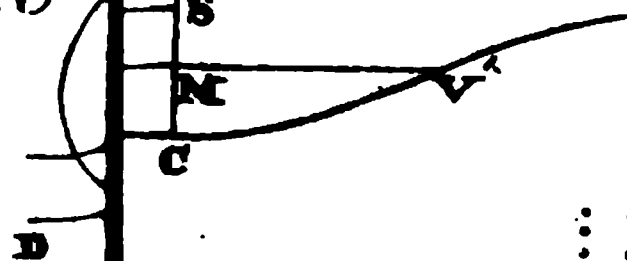
126

127

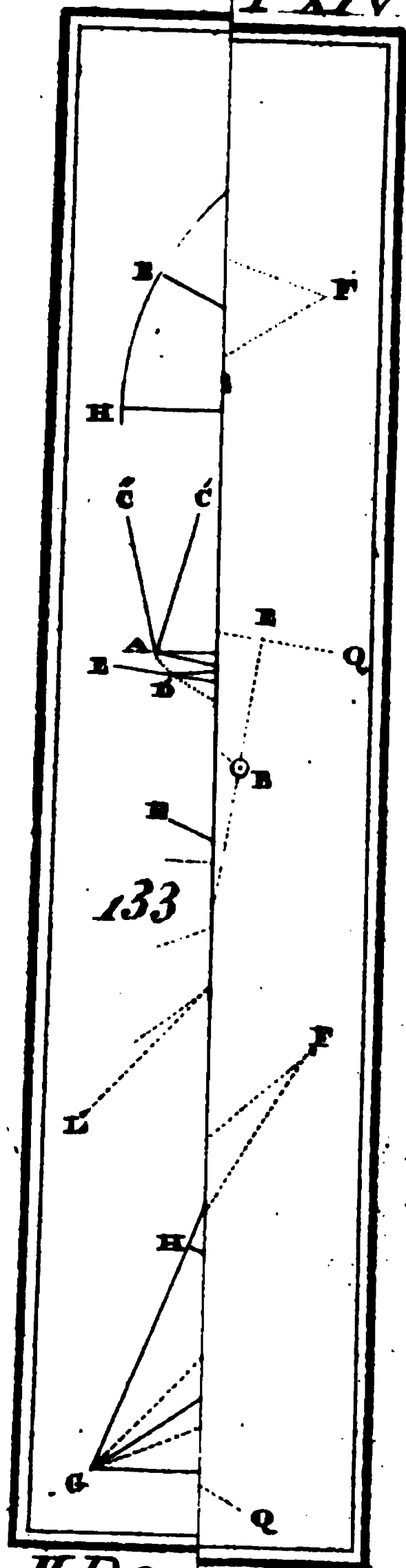


130

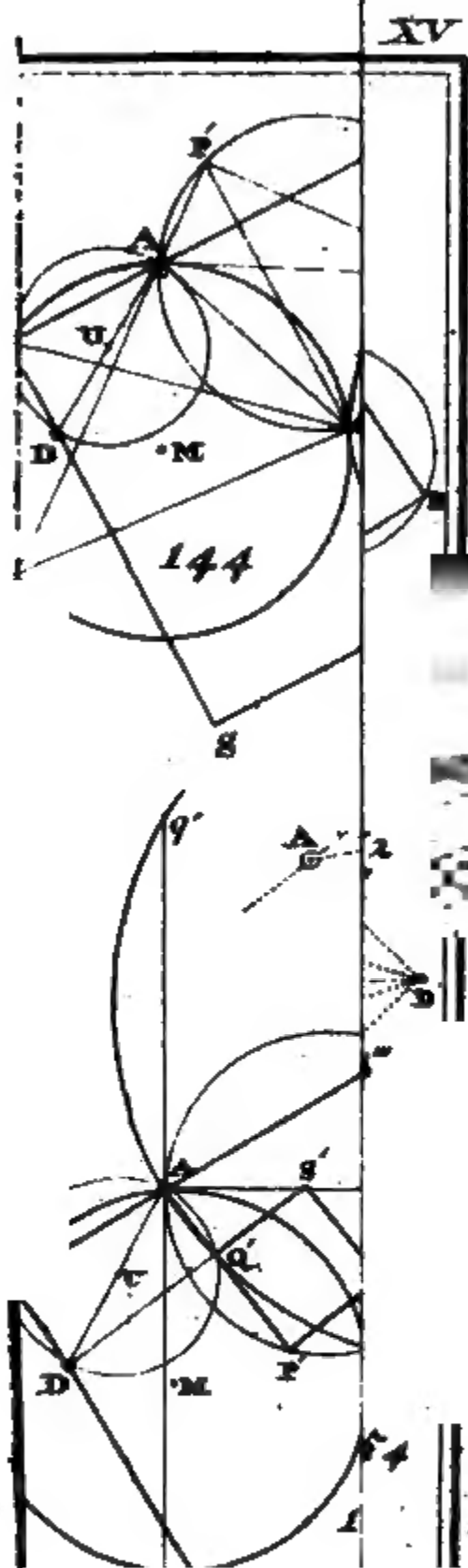
128



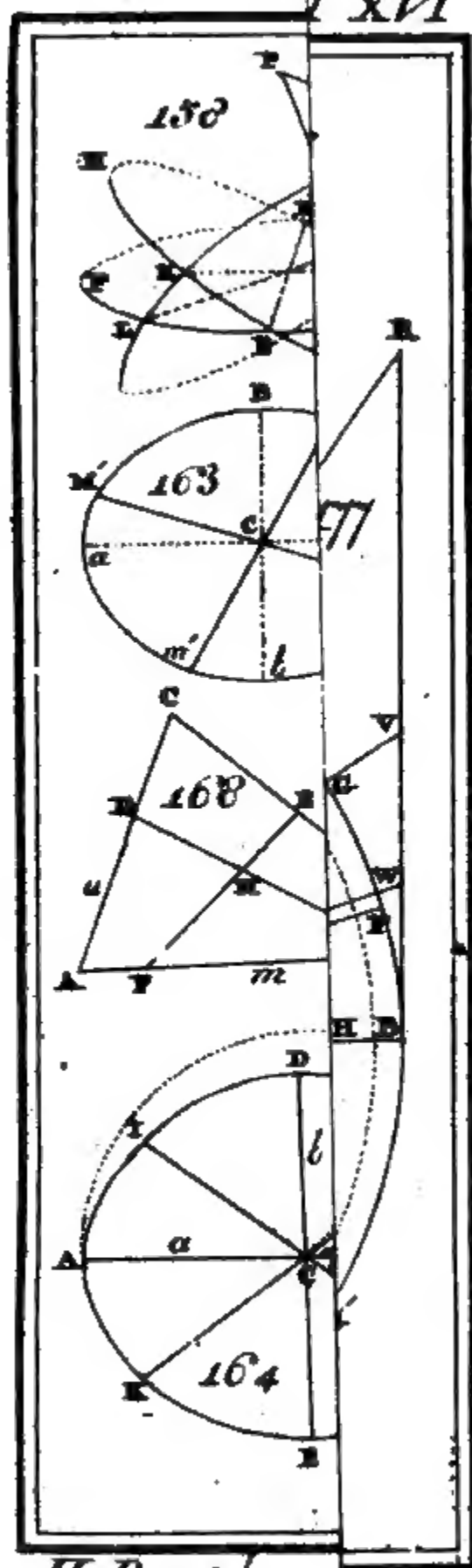
II D e



133



Deel



For Room Use Only